

S E R W A Y

# ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Tercera Edición  
Revisada

**Mc  
Graw  
Hill**

## RELACIÓN DE TÉRMINOS EQUIVALENTES

Cantidad de movimiento	Ímpetu
Cantidad de movimiento angular	Momentum angular
Circuito de corriente directa	Circuito de corriente continua
Coefficiente de ejecución	Coefficiente de rendimiento
Condensador	<b>Capacitor</b>
Contaminación térmica	Polución
Corrientes de eddy	Corrientes parásitas, de remolino <b>turbollinaria</b> , de vórtice
Decaimiento de muones	Decrecimiento de muones
Deflexión de la luz	Curvatura de la luz, desviación de la luz
Efecto túnel	Tunelamiento
Ejecución	Performance, rendimiento
Energía de enlace	Energía de ligadura
Enlace	Ligadura
<b>Faradio</b>	Farad
Fuerza gravitatoria	Fuerza gravitacional, acción gravitatoria
Fuerzas de fricción	Fuerzas de rozamiento, resistivas
Fusión nuclear	Reacción nuclear
Giróscopo	Giroscopio
Ligadura	Amarre
Líneas de flujo	Líneas de corriente
Máquina Stirling	Motor Stirling
Microscopio iónico de campo	Microscopio de campo ión
Momento del electrón	Momentum del electrón
Momento de una fuerza	Momento de torsión, <b>torca</b> , torque
Movimiento de rotación	Movimiento de rodadura, rotacional
Número de Leptón	Número leptónico
Número másico	Número de masa, masaico
Patrón de franjas	Patrón de borde
Patrones	<b>Estándares</b>
Producto <b>vectorial</b>	Producto cruz
Punto fijo de temperatura	Punto estable de temperatura
Resorte	Muelle
Rms ( <b>root mean square</b> )	Raíz cuadrática media, Rcm
Trayectoria media libre	Recorrido medio libre
Voltímetro	Vólmetro

# ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Tercera Edición Revisada

**Raymond A. Serway**  
*James Madison University*

**COORDINACIÓN DE TRADUCCIÓN:**  
**Juan Antonio Flores Lira**  
*Ph. D. University of Calgary*  
*Profesor numerario, Depto. de Física*  
*Universidad Iberoamericana*

## TRADUCCIÓN:

**Enrique Sánchez Aguilera**  
*Licenciado en Física, UNAM*  
*Profesor numerario, Depto. de Física*  
*Universidad Iberoamericana*

**Juan Cristóbal Cárdenas Oviedo**  
*Físico, UNAM*  
*Director del Depto. de Matemáticas*  
*Universidad Iberoamericana*

**Rebeca Sosa Fonseca**  
*Licenciada en Física*  
*Profesora asociada, Depto. de Física*  
*Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa*

**César Conrado D'León Sánchez**  
*Ingeniero Físico, UIA*  
*Depto. de Física*  
*Universidad Iberoamericana*

**McGRAW-HILL**

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK  
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO  
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS  
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

# Prólogo

---

El cambio de los esquemas de relación internacional ha generado profundas modificaciones en el contexto político, económico, social y educativo al interior de los países y en el umbral del siglo XXI, México necesita de un Sistema Nacional de Educación Superior más dinámico, mejor distribuido territorialmente, más equilibrado y diversificado en sus opciones profesionales y técnicas, y sobre todo de excelente calidad.

En el ámbito de la educación tecnológica, el Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos inició un arduo proceso de transformación, destacando la reestructuración de planes y programas de estudio pertinentes y flexibles que ofrezcan contenidos relevantes acordes con los requerimientos del contexto productivo actual.

Por lo anterior, el Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, preocupado por mejorar la calidad de la educación y asegurar la adquisición de núcleos básicos de conocimientos que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje para formar mejores profesionistas, se ha dado a la tarea de desarrollar diversas actividades, siendo una de ellas la compilación por parte de profesores de los tecnológicos de la presente obra editorial, la cual constituye un excelente material didáctico con el que se espera que los catedráticos se actualicen y los alumnos satisfagan sus necesidades de aprendizaje.

Se agradece la participación en este proyecto a los catedráticos de los institutos tecnológicos de Apizaco, Celaya, Orizaba y Zacatepec, así como el gran apoyo recibido por la compañía editorial McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V.



DR. ESTEBAN HERNÁNDEZ PÉREZ  
Director General de los Institutos Tecnológicos

# Nota

---

El presente texto, *Electricidad y magnetismo*, es una compilación de los capítulos 23 al 32 del libro *Física* tomo II, de **Raymond A. Serway**, realizada con base en los programas de estudio de las materias correspondientes impartidas en los Institutos Tecnológicos dependientes de la Secretaría de Educación Pública. Por tanto, la secuencia del texto obedece a la de los planes de estudio, no a la dictada por el libro original. Esto explica, además, las posibles menciones que remiten al lector a páginas o capítulos no incluidos en la compilación.

# Contenido

°Estas secciones son opcionales

## PARTE IV ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO 1

### Capítulo 23 Campos eléctricos 3

23.1	Propiedades de las cargas eléctricas	3
23.2	Aislantes y conductores	6
23.3	Ley de Coulomb	7
23.4	Campo eléctrico	11
23.5	Campo eléctrico de una distribución continua de carga	14
23.6	Líneas de campo eléctrico	18
23.7	Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme	20
° 23.8	El osciloscopio	23
	Resumen	24

### Capítulo 24 Ley de Gauss 35

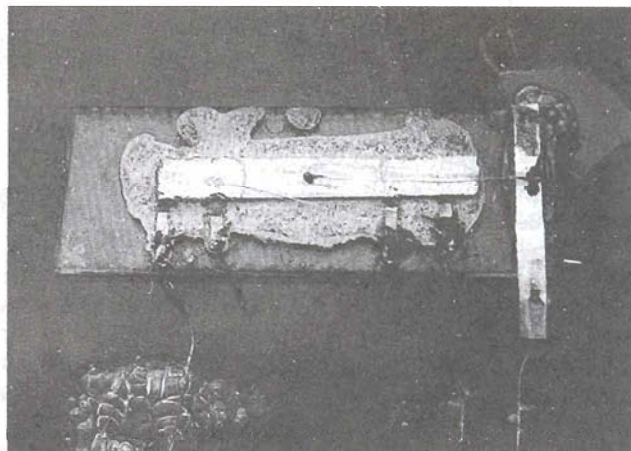
24.1	Flujo eléctrico	35
24.2	Ley de Gauss	38
24.3	Aplicaciones de la ley de Gauss a aisladores cargados	40
24.4	Conductores en equilibrio electrostático	44
° 24.5	Demostración experimental de las leyes de Gauss y Coulomb	46
° 24.6	Deducción de la ley de Gauss	47
	Resumen	48

### Capítulo 25 Potencial eléctrico 57

25.1	Diferencia de potencial y potencial eléctrico	58
25.2	Diferencias de potencial en un campo eléctrico uniforme	59
25.3	Potencial eléctrico y energía potencial debida a cargas puntuales	62
25.4	Potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua	64
° 25.5	Obtención de $E$ a partir del potencial eléctrico	67
25.6	Potencial de un conductor cargado	69
° 25.7	Experimento de la gota de aceite de Millikan	72
° 25.8	Aplicaciones electrostáticas	73
	Resumen	77



Aurora boreal vista desde un domo en el oeste de la costa de la bahía de Hudson. (O David Hiser/Photographers Aspen.)



El primer circuito integrado. (Cortesía de Texas Instruments.)

### Capítulo 26 Capacitancia y condensadores 87

26.1	Definición de capacitancia	87
26.2	Cálculo de la capacitancia	88
26.3	Combinaciones de condensadores	92
26.4	Energía almacenada en un condensador cargado	95
26.5	Condensadores con dieléctrico	97
° 26.6	Dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo	101
° 26.7	Una descripción atómica de los dieléctricos	103
	Resumen	106

### Capítulo 27 Corriente y resistencia 117

27.1	La batería	118
27.2	Comente eléctrica	119
27.3	Resistencia y la ley de Ohm	121
27.4	Resistividad de conductores diferentes	126
27.5	Superconductores	127
27.6	Modelo de conducción eléctrica	129
27.7	Energía eléctrica y potencia	132
° 27.8	Conversión de energía en aparatos eléctricos del hogar	134
	Resumen	135

### Capítulo 28 Circuitos de corriente directa 143

28.1	Fuerza electromotriz	144
28.2	Resistencias en serie y en paralelo	145
28.3	Reglas de Kirchhoff	149
28.4	Circuitos RC	153
° 28.5	Instrumentos eléctricos	158
° 28.6	El puente de Wheatstone	161
° 28.7	Potenciómetro	161
° 28.8	Alambrado doméstico y seguridad eléctrica	162
	Resumen	164

### Capítulo 29 Campos magnéticos 175

29.1	Introducción	176
29.2	Definición y propiedades de un campo magnético	177
29.3	Fuerza magnética sobre un conductor que lleva una corriente eléctrica	180
29.4	Momento sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme	183

29.5	Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético	186
° 29.6	Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético	189
° 29.7	Efecto Hall	193
° 29.8	Efecto Hall cuántico	196
	Resumen	196
<b>Capítulo 30 Fuentes de campo magnético</b>		<b>205</b>
30.1	Ley de Biot-Savart	206
30.2	Fuerza magnética entre dos conductores paralelos	210
30.3	Ley de Ampère	211
30.4	El campo magnético de un solenoide	215
30.5	Campo magnético a lo largo del eje de un solenoide	217
30.6	Flujo magnético	218
30.7	Ley de Gauss del magnetismo	219
30.8	Comente de desplazamiento y la generalización de la ley de Ampère	220
30.9	Magnetismo en la materia	222
30.10	Campo magnético de la Tierra	230
	Resumen	231

### Capítulo 31 Ley de Faraday

31.1	Ley de inducción de Faraday	241
31.2	Fem de movimiento	241
31.3	Ley de Lenz	250
31.4	Fem inducidas y campos eléctricos	251
31.5	Generadores y motores	251
31.6	Comentes de Eddy (parásitas)	251
31.7	Las maravillosas ecuaciones de Maxwell	259
	Resumen	260

### Capítulo 32 Inductancia

32.1	Autoinductancia	271
32.2	Circuitos RL	271
32.3	Energía en un campo magnético	278
32.4	Inductancia mutua	281
32.5	Oscilaciones de un circuito LC	282
° 32.6	Circuitos RLC	286
	Resumen	288

### Apéndice

	Respuestas a problemas de número impar	A.9
--	--	-----

# PARTE IV

## Electricidad y magnetismo

Ahora se inicia el estudio de la rama de la física a la cual conciernen los fenómenos eléctricos y magnéticos. Las leyes de la electricidad y magnetismo desempeñan un papel central en la comprensión del funcionamiento de varios dispositivos como los radios, las televisiones, los motores eléctricos, **computadoras, aceleradores** de alta energía y otros dispositivos electrónicos que se utilizan en medicina. Sin embargo, fundamentalmente, ahora se sabe que las fuerzas **interatómicas** e intermoleculares, que son **las** responsables de la formación de sólidos y líquidos, son de origen **eléctrico**. Además, fuerzas como las de **repulsión** y de atracción entre objetos y la fuerza elástica en un resorte provienen de las fuerzas eléctricas a nivel atómico.

Evidencias en documentos chinos sugieren que el **magnetismo** fue conocido a principios del año 2000 A.C. Los antiguos griegos observaron los fenómenos eléctricos y magnéticos posiblemente a principios del año 700 A.C. Descubrieron que un **pedazo** de ámbar frotado se electrificaba y era capaz de atraer trozos de paja o plumas. La existencia de la fuerza magnética se conoció al observar que pedazos de roca natural llamada **magnetita** ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) atraen al hierro. (La palabra **eléctrico** viene del vocablo griego para el ámbar, *elektron*. La palabra magnética viene del nombre de un distrito central al norte de Grecia donde se descubrió, *Magnesia*.)

En 1600, William **Gilbert** descubre que la electrificación no estaba limitada al ámbar sino que éste es un fenómeno general. Así, científicos electrificaron una variedad de objetos, **¡incluyendo a gallinas y personas!** Experimentos realizados por **Charles Coulomb** en 1785 **confirmaron** la ley del inverso del cuadrado para la **electricidad**.

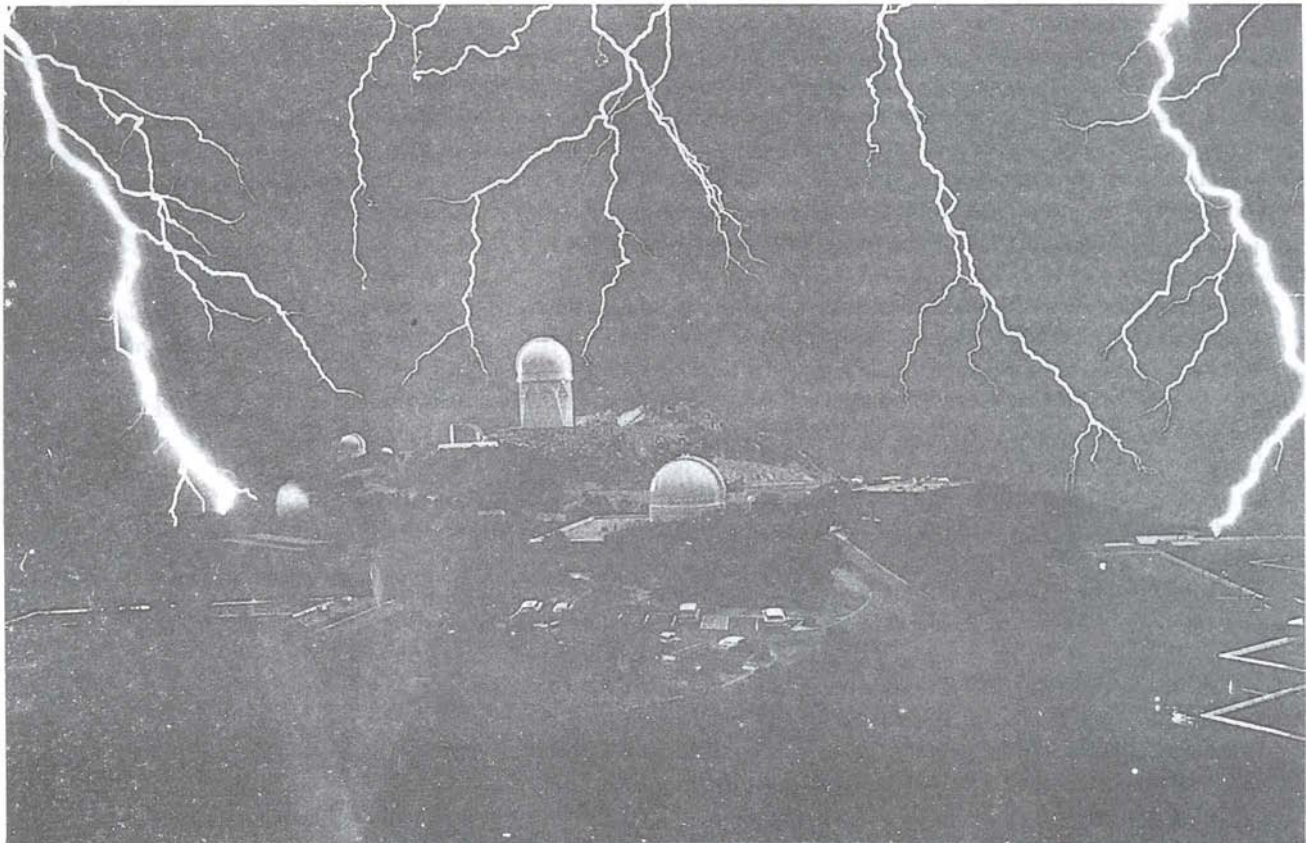
Hasta principios del siglo XIX los **científicos establecieron** que la electricidad y el **magnetismo** son, en efecto, fenómenos relacionados. En 1820 Hans **Oersted** descubre que una brújula se **deflecta cuando** se coloca cerca de un circuito que lleve corriente eléctrica. En 1831, **Michael Faraday**, y **simultáneamente**, **Joseph Henry**, demuestran que, cuando un alambre se mueve cerca de un imán o de manera equivalente, cuando un imán se mueve cerca de un alambre, una corriente **eléctrica** se observa en el alambre. En 1873, **James Clerk Maxwell** usó estas **observaciones** y otros factores experimentales como base, y formula las leyes del **electromagnetismo** que conocemos actualmente. (**Electromagnetismo** es el nombre dado a la **combinación** de los campos eléctrico y magnético.) Poco tiempo después (alrededor de 1888), **Heinrich Hertz** verifica las predicciones de **Maxwell** **produciendo** ondas electromagnéticas en el laboratorio. Esto fue seguido por **desarrollos prácticos** como el radio y la televisión.

**Las** contribuciones de **Maxwell** a la ciencia del **electromagnetismo** fueron especialmente significativas debido a que las leyes formuladas por él son básicas para **todas** las formas de los **fenómenos electromagnéticos**. Su trabajo es comparable en **importancia** al **descubrimiento** de Newton con sus leyes del movimiento y la teoría de la gravitación.

*Para la consideración de personas de . . . diferentes tipos, la verdad científica deberá presentarse en diferentes formas, y deberá juzgarse como igualmente científica, ya sea en la presentación de una demostración física, en forma robusta y con vívido colorido, o con la delicadeza y palidez de una expresión simbólica.*

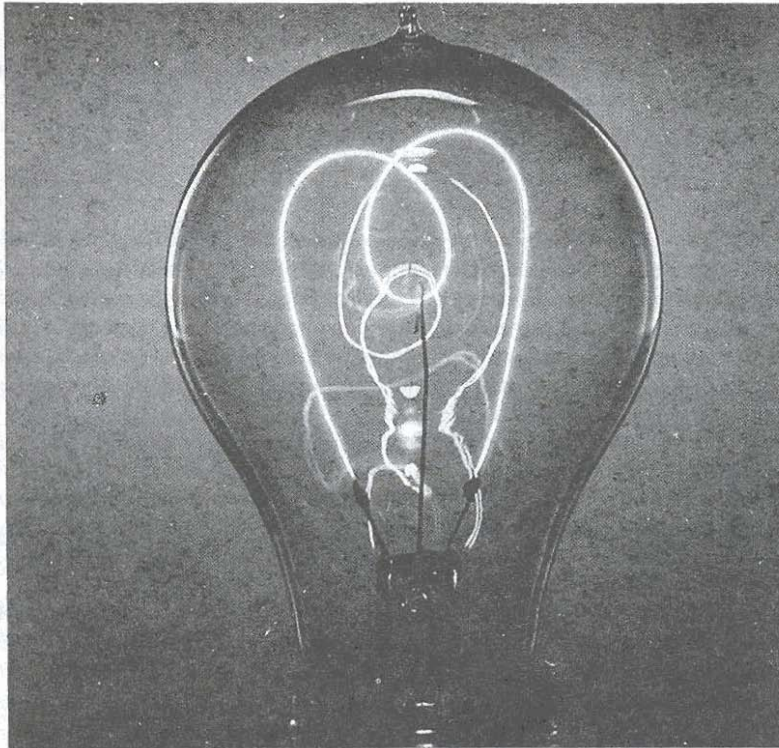
JAMES CLERK MAXWELL





*Esta fotografía de un instante dramático que muestra múltiples rayos de luz iluminando el Kitt Peak National Observatory, en Ariwna, ejemplifica irrupción eléctrica en la atmósfera. (© Gary Ladd 1972)*

## Campos eléctricos



*Fotografía de un filamento de carbón de una lámpara incandescente. El primer bulbo de Thomas Edison también usó un pedazo de hilo de algodón carbonizado como filamento. La lámpara de filamento de carbón emite un espectro diferente de luz al que produce la lámpara de tungsteno debido a su composición y a que opera a baja temperatura. (Cortesía de GENCO)*

**L**a fuerza electromagnética entre partículas cargadas es una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Este capítulo principia con la descripción de algunas de las propiedades básicas de las fuerzas electrostáticas. A continuación se analiza la ley de Coulomb, que es la ley fundamental de la fuerza entre cualesquiera dos partículas cargadas. Después, se introduce el concepto de campo eléctrico asociado con una distribución de carga y se describe su efecto sobre otras partículas cargadas. Se analiza el método para calcular campos eléctricos de una distribución de carga dada, a partir de la ley de Coulomb, y se dan varios ejemplos. Más adelante se analiza el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme. El capítulo concluye con una descripción breve del osciloscopio.

### 1 PROPIEDADES DE LAS CARGAS ELÉCTRICAS

Es posible llevar a cabo cierto número de experimentos para demostrar la existencia de las fuerzas y cargas eléctricas. Por ejemplo, si frotamos un peine contra nuestro pelo, se observará que aquél atraerá pedacitos de papel. A menudo la fuerza de atracción es lo suficientemente fuerte como para mantener suspendidos los pedacitos de papel. El mismo efecto ocurre al frotar otros materiales, tales como el vidrio o el caucho.



## Reseña biográfica

**Charles Coulomb**  
(1736-1806)

Charles Coulomb, el gran físico francés por quien después la unidad de carga eléctrica fue llamada *coulomb*, nació en Angoulême en 1736. Estudió en la École du Génie en Mézières, graduándose en 1761 como ingeniero militar con el rango de teniente. Coulomb sirvió en las Indias occidentales durante nueve años, donde supervisó la construcción de la fortificación de Martinique.

En 1774, Coulomb es **corresponsal** de la Academia de la Ciencia en París. Allí comparte el primer premio de la Academia por su artículo sobre el compás magnético (brújula) y también recibe el primer premio por su trabajo clásico sobre la fricción, estudio que no fue superado en 150 años. Durante los siguientes 25 años, presentó 25 artículos a la Academia sobre electricidad, magnetismo, torsión y aplicaciones de la balanza de torsión, así como también algunos cientos de reportes a comités sobre proyectos de ingeniería y civiles.

Coulomb **aprovechó** totalmente los diversos puestos que tuvo durante su vida. Por ejemplo, su experiencia como ingeniero le permitió **investigar** sobre los **esfuerzos** en materiales y **determinar** las **fuerzas que afectan** a objetos sobre vigas, contribuyendo con esto al campo de la **mecánica estructural**. También **ayudó** al campo de la **ergonomía**. Sus investigaciones contribuyeron al entendimiento de las formas en las cuales las personas y los animales pueden realizar más trabajo e **influyó** grandemente las posteriores investigaciones de **Gaspard Coriolis (1792-1843)**.

La mayor contribución de Coulomb a la ciencia fue en el campo de la **electrostática** y el magnetismo, en el cual hizo uso de la **balanza de torsión que él mismo diseñó** (Véase figura 23.2). El **artículo que describe esta invención también tiene un diseño para una brújula usando el principio de torsión en una suspensión**. Su siguiente artículo **proporcionó la prueba de la ley del inverso del cuadrado para la fuerza electrostática** entre cargas.

Coulomb **murió** en 1806, **cinco años** después de ser nombrado presidente del Instituto de Francia (**anteriormente**, la Academia de la Ciencia de París). **Sus investigaciones sobre electricidad y magnetismo llevaron esta área de la física fuera de la tradicional filosofía natural y la convirtieron en ciencia exacta.**

(Fotografía cortesía de AIP Biblioteca Niel Bohr, Colección E. Scott Barr)

Otro experimento sencillo es frotar un globo inflado contra una tela de lana. El globo puede **adherirse** a una pared o al techo de una **habitación** durante varias horas. Cuando los materiales se comportan de esa manera se dice que están **electrizados** o que se han **cargado eléctricamente**. Podemos electrificar con facilidad nuestro cuerpo frotando vigorosamente nuestros zapatos contra una alfombra de lana. La carga de nuestro **cuerpo** se puede eliminar tocando (y asustando) a un amigo. En ciertas condiciones una chispavisible se puede observar cuando una persona toca a otra, y **sentirse un pequeño toque**. (Experimentos como éstos se **realizan** mejor en un día seco ya que una cantidad excesiva de humedad puede **producir** una fuga de carga del cuerpo electrizado **hacia** la tierra, a través de diversas trayectorias.)

En una sucesión sistemática de experimentos un tanto simples, se encuentra que existen dos tipos de cargas eléctricas a las cuales Benjamin Franklin (1706-1790) les dio el nombre de positiva y **negativa**. Para demostrar este **hecho**, considérese que se frota una barra dura de caucho contra una piel y a **continuación** se suspende de un **hilo** no metálico, como se muestra en la figura 23.1. Cuando una barra de vidrio frotada con una tela de seda **se** acerca a la barra de caucho, ésta **será** atraída hacia la barra de vidrio. Por otro lado, si dos barras de caucho cargadas (o bien dos barras de vidrio cargadas) se aproximan una a la otra, **como** se muestra en la **figura 23.1b**, la **fuerza** entre ellas será de repulsión. Esta observación demuestra que el caucho y el vidrio se encuentran en dos estados de electrificación diferente; Con base en **estas observaciones**, podemos **concluir** que

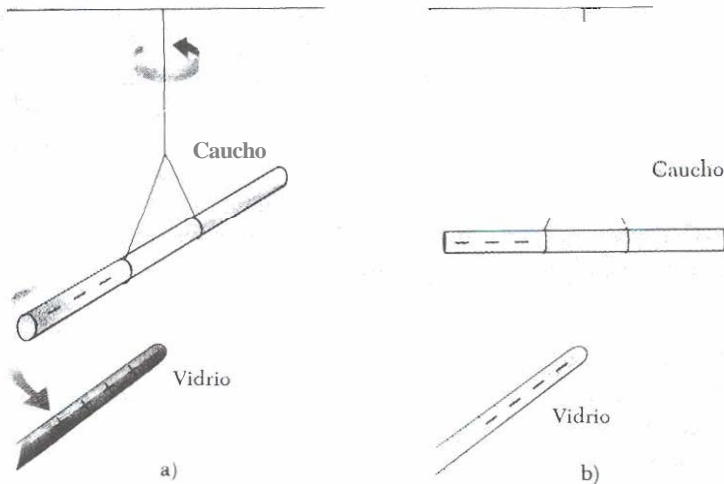


Figura 23.1 a) La barra de caucho cargada negativamente, suspendida por un hilo, es atraída hacia la barra de vidrio cargada positivamente. b) La barra de caucho cargada negativamente es repelida por otra barra de caucho cargada negativamente.

cargas iguales se repelen y cargas diferentes se atraen. Usando la convención sugerida por Franklin, la carga eléctrica en la barra de vidrio se llama positiva y la carga de barra de caucho se llama negativa. Por lo tanto, cualquier cuerpo cargado que es atraído por una barra de caucho cargada (o repelido por una barra de vidrio cargada) debe tener una carga positiva. Inversamente, cualquier cuerpo cargado que es repelido por una barra de caucho cargada (o atraído por una barra de vidrio cargada) debe tener carga negativa.

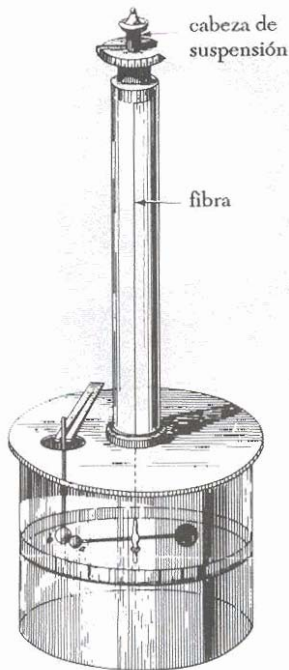
Otro aspecto importante del modelo de Franklin de la electricidad es la implicación de que la carga eléctrica siempre se conserva. Esto es, cuando se frota un cuerpo contra otro no se crea carga en el proceso. El estado de electrificación se debe a la transferencia de carga de un cuerpo a otro. Por lo tanto, un cuerpo gana cierta cantidad de carga negativa mientras que el otro gana la misma cantidad de carga positiva. Por ejemplo, cuando una barra de vidrio es frotada con seda, ésta obtiene una carga negativa que es igual en magnitud a la carga positiva de la barra de vidrio. Por los conocimientos sobre la estructura atómica sabemos que son los electrones negativamente cargados los que se transfieren del vidrio a la seda en el proceso de frotamiento. Del mismo modo, cuando se frota el caucho contra la piel, se transfieren electrones de la piel al caucho, dando a éste una carga neta negativa y a aquélla una carga positiva. Esto es consecuente con el hecho de que la materia neutra no cargada contiene tantas cargas positivas (protones en el núcleo) como cargas negativas (electrones):

En 1909, Robert Millikan (1886-1953) demostró que la carga eléctrica siempre se presenta como algún múltiplo entero de alguna unidad fundamental de carga  $e$ . En términos modernos, se dice que la carga  $q$  está cuantizada. Esto es, la carga eléctrica existe como paquetes discretos. Entonces, podemos escribir  $q = Ne$ , donde  $N$  es algún entero. Otros experimentos en el mismo periodo demostraron que el electrón tiene una carga de  $-e$  y que el protón una carga igual y opuesta de  $+e$ . Algunas partículas elementales, como el neutrón, no tienen carga. Un átomo neutro debe contener el mismo número de protones que de electrones.

Las fuerzas eléctricas entre objetos cargados fueron medidas por Coulomb utilizando la balanza de torsión, diseñada por él (Fig. 23.2). Por medio de este aparato, Coulomb confirmó que la fuerza eléctrica entre dos pequeñas esferas cargadas es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia que las separa, es decir,  $F \propto 1/r^2$ . El principio de operación de la balanza de torsión es el mismo que

### Conservación de la carga

### La carga está cuantizada



**Figura 23.2** Balanza de torsión de Coulomb la cual se utilizó para establecer la ley del inverso del cuadrado para la fuerza electrostática entre dos cargas. (Tomada de las memorias de Coulomb 1785 de la Academia de la Ciencia Francesa)

el del aparato usado por Cavendish para medir la constante de gravitación (Sec. 14.2), reemplazando masas por esferas cargadas. La fuerza eléctrica entre las esferas cargadas produce una torsión en la fibra de suspensión. Como el momento de una fuerza de restitución de la fibra es proporcional al ángulo que describe al girar, una medida de este ángulo proporciona una medida cuantitativa de la fuerza eléctrica de **atracción** o repulsión. Si las esferas **se** cargan por frotamiento, la fuerza eléctrica entre las esferas es muy grande comparada con la **atracción** gravitacional; por lo que **se** desprecia la fuerza gravitacional.

Por lo visto hasta ahora en nuestra discusión, **se** concluye que la carga eléctrica tiene las importantes propiedades siguientes:

1. **Existen** dos clases de cargas en la naturaleza, con la propiedad de que **''** **gas diferentes se atraen** y **cargas iguales se repelen**.
2. La fuerza entre cargas **varía wn el inverso del cuadrado** de la distancia que las separa
3. La carga **re conserva**
4. La carga **está cuantizada**

## 23.2 AISLANTES Y CONDUCTORES

Es conveniente clasificar las sustancias en términos de **su** capacitancia para conducir carga **eléctrica**.

**Los conductores son los materiales en los cuales las cargas eléctricas se mueven con bastante libertad, en tanto que son aisladores los que no transportan la carga con facilidad.**

Materiales **como** el vidrio, caucho y la lucita **están** dentro de la categoría de aisladores. Cuando estos materiales son cargados por frotamiento, **sólo** el área que se frota **se** carga y ésta no se mueve hacia **otras** regiones del material.

En contraste, materiales como el cobre, el aluminio y la plata **son** buenos conductores. Cuando estos materiales se cargan en alguna pequeña región, la carga rápido **se** distribuye sobre toda la superficie del wnductor. Si se sostiene una barra de cobre con la mano y **se** frota con lana o cualquier piel, la barra no **atraerá a** un pequeño pedazo de papel. Esto podría sugerir **que** no se puede cargar un metal. Por otro lado, si se sostiene la barra de cobre con un mango de lucita y después se **frota**, la barra permanecerá cargada y atraerá al trozo de papel. Esto **se** puede explicar al observar que en el primer caso, la carga eléctrica producida por frotamiento pasa con facilidad del cobre a nuestra mano y, finalmente, hacia la **tierra**. En el segundo caso, el mango aislador de lucita evita el flujo de la carga hacia la tierra.

Los **semiconductores** constituyen una **tercera** clase de materiales, y sus propiedades eléctricas se encuentran entre las correspondientes a los **aislantes** y los conductores. El silicio y el germanio son ejemplos bien conocidos de **semiconductores** que se **utilizan** con frecuencia en la fabricación de una variedad de dispositivos electrónicos. **Las** propiedades eléctricas de los semiconductores pueden ser cambiadas en varios **órdenes** de magnitud, agregando cantidades controladas de átomos extraños a los materiales.

Cuando un wnductor se conecta a tierra por medio de un alambre conductor o de un tubo de **cobre**, **se** dice que está **aterrizado**. La tierra puede considerarse como un sumidero infinito hacia el cual los electrones pueden emigrar con facilidad. Con esto en mente, se puede comprender cómo cargar un conductor por un proceso conocido como **inducción**.

**La metales son buenos conductores**

**Carga por inducción**

Para entender la **inducción**, considere que una **barra de caucho cargada negativamente** se acerca a una esfera **conductora neutra** (no cargada) aislada de la tierra. Es decir, no existe trayectoria inductora hacia la tierra (Fig. 23.3a). La región de la esfera más cercana a la **barra cargada negativamente obtendrá un exceso de cargas positivas**, mientras que la región de la esfera **más lejana de barra obtendrá un exceso de carga negativa**. (Es decir, los electrones en la **parte de la esfera cercana** a la barra **emigrarán** al lado opuesto de la esfera). Si el mismo experimento se realiza con un alambre conductor conectado a tierra (Fig. 23.3b), algunos electrones serán repelidos hacia la tierra. Si el alambre a tierra se quita, (Fig. 23.3c), la esfera inductora **contendrá un exceso de carga positiva inducida**. Finalmente, cuando se retira la barra de caucho de la vecindad de la esfera (Fig. 23.3d), la carga positiva inducida permanece en la esfera **no aterrizada**. Nótese que la carga remanente en la esfera está distribuida **uniformemente** en la **superficie** de la esfera debido a la presencia de **las fuerzas repulsivas entre** cargas semejantes. En el proceso, la barra de caucho no pierde su carga negativa.

Entonces, se puede observar que para cargar un objeto por inducción no se requiere contacto con el cuerpo inductor de la carga. Esto **contrasta** con la carga de un objeto por frotamiento (es decir, carga por **conducción**), la cual sí requiere del contacto entre los dos cuerpos.

Un proceso similar al que se realiza para cargar por inducción un conductor se utiliza para los aislantes. En la mayoría de los átomos y moléculas neutros, el centro de carga positivas **coincide con** el centro de cargas negativas. Sin embargo, en presencia de un objeto cargado, estos **centros** pueden ser desviados **ligeramente**, resultando más positiva la carga de un lado de la molécula que del otro. Este efecto, conocido como **polarización**, se discutirá por **completo** en el capítulo 26. Así, este **reacomodo de cargas en cada una de las moléculas produce** una carga inducida en la superficie del aislador como se muestra en la figura 23.4. Con **estas ideas**, podríamos intentar **explicar** por qué un peine que ha sido frotado **contra** el pelo podrá atraer trocitos de papel neutro, o por qué un globo que ha sido frotado en la ropa se puede adherir a una pared neutra.

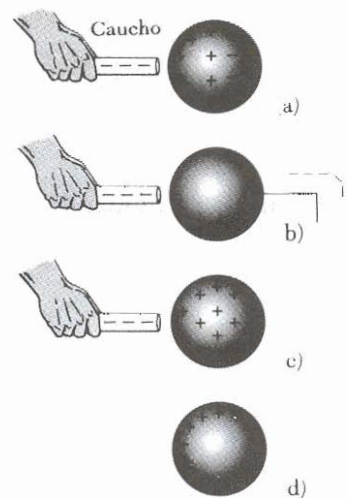
### 23.3 LEY DE COULOMB

En 1785, Coulomb estableció la ley fundamental de la **fuerza eléctrica** entre dos **partículas** cargadas estacionarias. Los experimentos muestran que la **fuerza eléctrica** tiene las siguientes propiedades: 1) La **fuerza** es inversamente proporcional al inverso del cuadrado de la distancia de separación  $r$  **entre** las dos partículas, medida a lo largo de la línea recta que las une. 2) La fuerza es proporcional al **producto** de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  de las dos partículas. 3) La **fuerza** es atractiva si las **cargas** son de signos opuestos, y **repulsiva** si las **cargas** son del mismo signo. A partir de estas observaciones podemos expresar la **fuerza eléctrica** entre las dos cargas **como**:

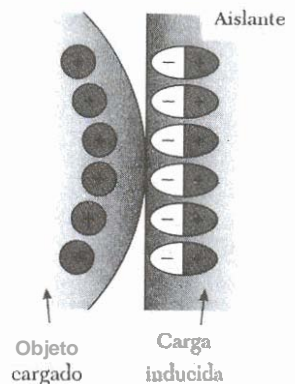
$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (23.1)$$

donde  $k$  es una constante **conocida** como **constante de Coulomb**. En sus experimentos, Coulomb pudo demostrar que el **exponente** de  $r$  era 2, con sólo un pequeño porcentaje de incertidumbre. Los experimentos modernos han **demostrado** que el exponente es 2 con una precisión de algunas partes en  $10^9$ .

La constante  $k$  en la ecuación 23.1 tiene un valor que depende de la elección de las unidades. La unidad de carga en el SI de unidades es el **coulomb (C)**. El



**Figura 23.3** Cargando un objeto metálico por inducción. a) La carga sobre una esfera metálica neutra se redistribuye cuando una barra cargada de caucho se acerca a la esfera. b) La esfera es aterrizada y algunos electrones salen del conductor. c) La conexión a tierra se quita y la esfera tiene carga positiva no uniforme. d) Cuando la barra de caucho se retira, la esfera viene a quedar cargada uniformemente.



**Figura 23.4** El objeto cargado de la izquierda induce carga sobre la superficie del aislante de la derecha.

### Ley de Coulomb

**coulomb** se define en términos de la unidad de corriente llamada *ampere* (A), donde la corriente es igual a la rapidez del flujo de carga. (El ampere será definido en el capítulo 27.) Cuando la corriente en un alambre es de 1 A, la cantidad de carga que fluye en un determinado punto del alambre en 1 s es 1 C. La constante de coulomb  $k$  en el SI de unidades tiene un valor de

### Constante de Coulomb

$$k = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (23.2)$$

Para simplificar los cálculos, se usará el valor aproximado

$$k \cong 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (23.3)$$

La constante  $k$  también se puede escribir

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

donde la constante  $\epsilon_0$  se conoce como la **permitividad** del espacio libre y tiene un valor de

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (23.4)$$

La unidad más pequeña de carga conocida en la naturaleza es la que tiene un electrón o un protón.<sup>1</sup> La carga de un electrón o de un protón tiene una magnitud de

### Carga de un electrón o un protón

$$|e| = 1.60219 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (23.5)$$

Por lo tanto, 1 C de carga es igual a la carga de  $6.3 \times 10^{18}$  electrones (esto es,  $1/e$ ). Se puede comparar esto con el número de electrones libres que se encuentran en 1 cm<sup>3</sup> de **cobre**,<sup>2</sup> que es del orden de  $10^{23}$ . Nótese que 1 C es una cantidad importante de carga. En experimentos **electrostáticos** típicos, en los cuales se carga una barra de caucho o de **vidrio** por frotamiento, la carga neta que se obtiene es del orden de  $10^{-6} \text{ C}$  ( $= 1 \mu\text{C}$ ). En otras palabras, **sólo** una pequeña fracción de la carga total disponible se trasfiere entre el material de la barra y el material con que se frota.

Las cargas y las masas del electrón, **protón** y neutrón se presentan en la tabla 23.1.

Cuando se aplica la ley de la **fuerza de Coulomb**, debe recordarse que la fuerza es una cantidad **vectorial** y debe tratarse como tal. **Además nótese** que la **ley de Coulomb sólo** se aplica a cargas puntuales o **partículas**. La fuerza eléctrica  $q_2$  debida a  $q_1$ , escrita como  $F_{21}$ , puede ser expresada en forma vectorial

$$\text{como: } F_{21} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (23.6)$$

<sup>1</sup>No hay unidad de carga más pequeña que  $e$  que haya sido detectada como carga libre; sin embargo, algunas teorías recientes han propuesto la existencia de partículas llamadas *quarks* que tienen cargas de  $e/3$  y  $2e/3$ . Aun cuando existe evidencia experimental de que tales partículas pertenecen a la materia nuclear, nunca se ha detectado un quark libre. Se discutirán otras propiedades de los quarks en el capítulo 47 de la versión aumentada de este texto.

<sup>2</sup>Un **átomo metálico**, como el cobre, contiene uno o más electrones externos, los cuales son débilmente atraídos al núcleo. Cuando algunos átomos se combinan para formar un metal, a estos electrones externos se les conoce como **electrones** libres, los cuales no están sujetos a ningún átomo. Estos electrones se mueven en el metal en forma similar a las moléculas de un gas que se mueven en su contenedor.

Tabla 23.1 Carga y masa del electrón, protón y neutrón

Partícula	Carga (C)	Masa (kg)
Electrón (e)	$-1.6021917 \times 10^{-19}$	$9.1095 \times 10^{-31}$
Protón (p)	$+1.6021917 \times 10^{-19}$	$1.67261 \times 10^{-27}$
Neutrón (n)	0	$1.67492 \times 10^{-27}$

entonces la fuerza eléctrica sobre  $q_1$  debida a  $q_2$ , la cual se representa por  $F_{12}$ , se puede expresar en forma vectorial como

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (23.6)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario dirigido de  $q_1$  a  $q_2$  como se muestra en la figura 23.5a. Debido a que la ley de Coulomb obedece la tercera ley de Newton, la fuerza eléctrica sobre  $q_2$  debida a  $q_1$  es igual en magnitud a la fuerza sobre  $q_1$  debida a  $q_2$  y en sentido opuesto, es decir,  $F_{21} = -F_{12}$ . Finalmente, de la ecuación 23.6 se ve que si  $q_1$  y  $q_2$  tienen el mismo signo, su producto es positivo y la fuerza es de repulsión, como se muestra en la figura 23.5a. Por otro lado, si  $q_1$  y  $q_2$  son de signos opuestos, su producto será negativo y la fuerza es atractiva, como se muestra en la figura 23.5b.

Cuando están presentes más de dos cargas, la fuerza entre cualquier par de ellas se obtiene de la ecuación 23.6. Por lo tanto, la fuerza resultante sobre cualquiera de ellas es igual al vector suma de las fuerzas debidas a las diversas cargas por separado. Este principio de superposición, aplicado a las fuerzas electrostáticas es un hecho observado experimentalmente. Por ejemplo, si se tienen cuatro cargas, entonces la fuerza resultante sobre la partícula 1 debida a las partículas 2, 3 y 4 está dada por

$$F_1 = F_{12} + F_{13} + F_{14}$$

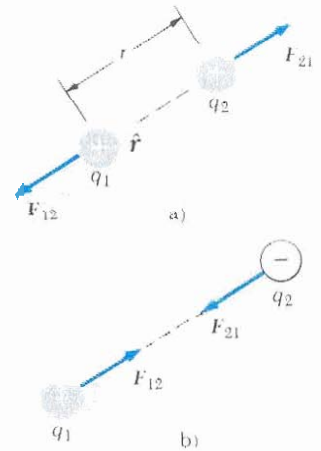


Figura 23.5 Dos cargas puntuales separadas una distancia  $r$  ejercen una sobre la otra una fuerza dada por la ley de Coulomb. Nótese que la fuerza sobre  $q_1$  es igual y opuesta a la fuerza sobre  $q_2$ . a) Cuando las cargas son del mismo signo, la fuerza es de repulsión. b) Cuando las cargas son de signos opuestos, la fuerza es de atracción.

### EJEMPLO 23.1 Determinación de la fuerza resultante

Considérense tres cargas puntuales ubicadas en los vértices de un triángulo, como se ve en la figura 23.6, donde  $q_1 = q_3 = 5 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -2 \mu\text{C}$  ( $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{C}$ ), y  $a = 0.1 \text{m}$ . **Determinése la fuerza resultante sobre  $q_3$ .**

**Solución** Primero obsérvese la dirección de cada una de las fuerzas sobre  $q_3$  debidas a  $q_1$  y  $q_2$ . La fuerza sobre  $q_3$  debida a  $q_2$  es de atracción ya que  $q_3$  y  $q_2$  tienen signos opuestos. La fuerza sobre  $q_3$  debida a  $q_1$  es de repulsión, dado que las dos son positivas.

Ahora calcúlese la magnitud de las fuerzas sobre  $q_3$ . La magnitud de la fuerza sobre  $q_3$  debida a  $q_2$  está dada por

$$\begin{aligned} F_{32} &= k \frac{|q_3||q_2|}{a^2} \\ &= \left(9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(5 \times 10^{-6} \text{C})(2 \times 10^{-6} \text{C})}{(0.1 \text{m})^2} \\ &= 9.0 \text{N} \end{aligned}$$

Nótese que siendo  $q_3$  y  $q_2$  de signos opuestos,  $F_{32}$  es hacia la izquierda, como se muestra en la figura 23.6

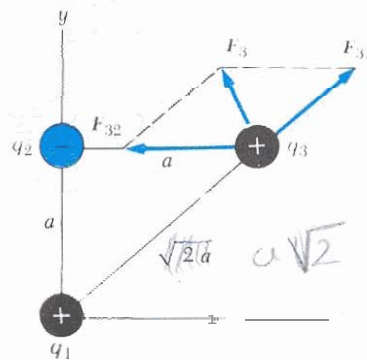


Figura 23.6 (Ejemplo 23.1) La fuerza sobre  $q_3$  debida a  $q_1$  es  $F_{31}$ . La fuerza sobre  $q_3$  debida a  $q_2$  es  $F_{32}$ . La fuerza total  $F_3$  sobre  $q_3$  es la suma vectorial  $F_{31} + F_{32}$ .



La magnitud de la fuerza sobre  $q_3$  debida a  $q_1$  está dada por

$$F_{31} = k \frac{|q_3||q_1|}{(\sqrt{2}a)^2} = \left(9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(5 \times 10^{-6} \text{ C})(5 \times 10^{-6} \text{ C})}{2(0.1 \text{ m})^2} = 11 \text{ N}$$

La fuerza  $F_{31}$  es repulsiva y hace un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$ . Por lo tanto, las componentes  $x$  y  $y$  de  $F_{31}$  son iguales, con magnitud dada por  $F_{31} \cos 45^\circ = 7.9 \text{ N}$ . La fuerza  $F_{32}$  está en la dirección negativa de la  $x$ . De donde las componentes  $x$  y  $y$  de la fuerza resultante sobre  $q_3$  están dadas por

$$F_x = F_{31x} + F_{32} = 7.9 \text{ N} - 9.0 \text{ N} = -1.1 \text{ N}$$

$$F_y = F_{31y} = 7.9 \text{ N}$$

También se puede expresar la fuerza resultante sobre  $q_3$  en la forma de vectores unitarios como  $F_3 = (-1.1\mathbf{i} + 7.9\mathbf{j}) \text{ N}$ .

**Ejercicio 1** Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre  $q_3$ .

**Solución**  $8.0 \text{ N}$  con un ángulo de  $98^\circ$  con el eje  $x$ .

**EJEMPLO 23.2 ¿Dónde es cero la fuerza resultante?**

Tres cargas están a lo largo del eje  $x$ , como se ve en la figura 23.7. La carga positiva  $q_1 = 15 \mu\text{C}$  está en  $x = 2 \text{ m}$  y la carga positiva  $q_2 = 6 \mu\text{C}$  está en el origen. ¿En dónde debe colocarse una carga negativa  $q_3$  sobre el eje  $x$ , de modo que la fuerza resultante sobre ella sea cero?

**Solución** Ya que  $q_3$  es negativa y tanto  $q_1$  como  $q_2$  son positivas, tanto la fuerza  $F_{31}$  como la  $F_{32}$  son de atracción, como se indica en la figura 23.7. Si  $x$  es la coordenada de  $q_3$ , entonces las fuerzas  $F_{31}$  y  $F_{32}$  tienen magnitudes dadas por

$$F_{31} = k \frac{|q_3||q_1|}{(2-x)^2} \quad \text{y} \quad F_{32} = k \frac{|q_3||q_2|}{x^2}$$

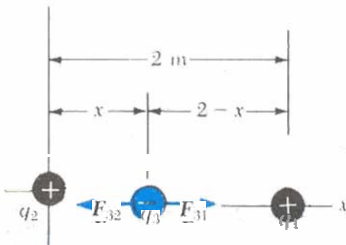


Figura 23.7 (Ejemplo 23.2) Tres cargas puntuales se colocan a lo largo del eje  $x$ . La carga  $q_3$  es negativa, mientras que  $q_1$  y  $q_2$  son positivas. Si la fuerza neta sobre  $q_3$  es cero, entonces la fuerza sobre  $q_3$  debida a la carga  $q_2$  debe ser igual y opuesta a la fuerza sobre  $q_3$  debida a  $q_1$ .

Si la fuerza resultante sobre  $q_3$  es cero, entonces  $F_{32}$  debe ser igual y opuesta a  $F_{31}$ , es decir

$$k \frac{|q_3||q_2|}{x^2} = k \frac{|q_3||q_1|}{(2-x)^2}$$

Ya que  $k$  y  $q_3$  son comunes a ambos lados, al despejar  $x$  se tiene

$$(2-x)^2|q_2| = x^2|q_1|$$

$$(4 - 4x + x^2)(6 \times 10^{-6} \text{ C}) = x^2(15 \times 10^{-6} \text{ C})$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para  $x$  se encuentra que  $x = 0.775 \text{ m}$ . ¿Por qué la raíz negativa no es aceptable?

**EJEMPLO 23.3 El átomo de hidrógeno**

El electrón y el protón de un átomo de hidrógeno están separados en promedio por una distancia aproximada de  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Calcúlese la magnitud de la fuerza eléctrica y de la fuerza gravitacional entre las dos partículas.

**Solución** De la ley de Coulomb, podemos determinar que la fuerza de atracción eléctrica tiene una magnitud de

$$F_e = k \frac{|e|^2}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Usando la ley de la gravitación universal de Newton y la tabla 23.1, encontramos que la fuerza gravitacional tiene una magnitud de

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = \left(6.7 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right) \times \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} = 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

La razón  $F_e/F_g \approx 3 \times 10^{39}$ . Por lo tanto, la fuerza gravitacional entre partículas atómicas cargadas es despreciable comparada con la fuerza eléctrica entre ellas.

**EJEMPLO 23.4 Determinación de la carga sobre una esfera**

Dos pequeñas esferas cargadas, cada una con masa de  $3 \times 10^{-2} \text{ kg}$ , están suspendidas en equilibrio como se muestra en la figura 23.8a. Si la longitud de cada hilo es de  $0.15 \text{ m}$  y el ángulo  $\theta = 5^\circ$ . Encuéntrese la magnitud de la carga en cada esfera, suponiendo que las esferas tienen igual carga.

**Solución** Del triángulo recto de la figura 23.8a, se puede ver que  $\sin \theta = a/L$ . Ya que se conocen la longitud del hilo

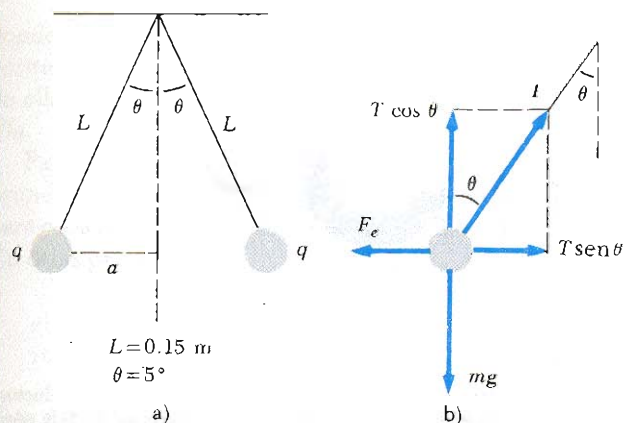


Figura 23.8 (Ejemplo 23.4) a) Dos esferas idénticas, cada una con carga  $q$ , suspendidas en equilibrio por cuerdas. b) Diagrama de cuerpo libre para la esfera cargada del lado izquierdo.

y el ángulo que hace el hilo con la vertical, la distancia  $a$  se puede obtener

$$a = L \sin \theta = (0.15 \text{ m}) \sin 5^\circ = 0.013 \text{ m}$$

Por lo tanto, la separación de las esferas es  $2a = 0.026 \text{ m}$ .

Las fuerzas que actúan sobre una de las esferas se muestran en la figura 23.8b. Ya que la esfera está en equilibrio, la resultante de las fuerzas en las direcciones horizontal y vertical por separado debe ser cero:

$$(1) \quad \sum F_x = T \sin \theta - F_e = 0$$

$$(2) \quad \sum F_y = T \cos \theta - mg = 0$$

A partir de (2) vemos que  $T = mg/\cos \theta$ , y así  $T$  puede ser eliminada de (1) si se hace la sustitución. Esto da un valor para la fuerza eléctrica  $F_e$ :

$$(3) \quad F_e = mg \tan \theta \\ = (3 \times 10^{-2} \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \tan(5^\circ) \\ = 2.57 \times 10^{-2} \text{ N}$$

Con base en la ley Coulomb (Ec. 23.1), la fuerza eléctrica entre cargas de igual magnitud está dada por

$$F_e = k \frac{|q|^2}{r^2}$$

donde  $r = 2a = 0.026 \text{ m}$  y  $|q|$  es la magnitud de la carga de cada esfera. Nótese que el término  $|q|^2$  se utilizó ya que se había asumido que la carga es la misma en ambas esferas. Esta ecuación puede ser resuelta para  $|q|^2$  a fin de obtener la carga como sigue

$$|q|^2 = \frac{F_e r^2}{k} = \frac{(2.57 \times 10^{-2} \text{ N})(0.026 \text{ m})^2}{9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}$$

$$4.4 \times 10^{-8} \text{ C}$$

**Ejercicio 2** Si la carga sobre una hoja delgada de metal es negativa, ¿cuántos electrones fueron añadidos para que su carga neta sea de  $-4.4 \times 10^{-8} \text{ C}$ ?

**Solución**  $2.7 \times 10^{11}$  electrones.

## 23.4 CAMPO ELÉCTRICO

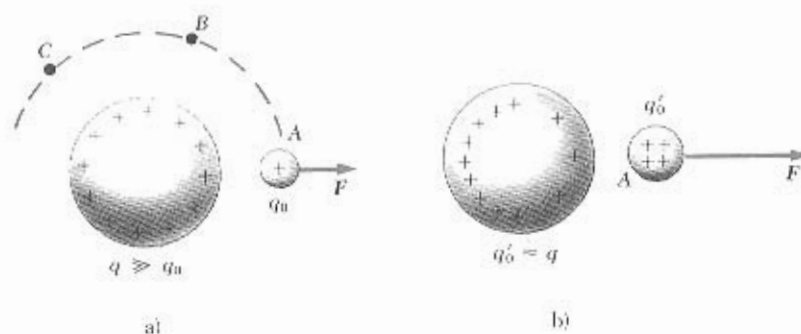
El campo gravitacional  $g$  en un punto en el espacio se definió en el capítulo 14 como la fuerza gravitacional  $F$  que actúa sobre una masa de prueba  $m_0$  dividida por la masa de prueba. Es decir,  $g = F/m_0$ . De manera similar, un campo eléctrico en un punto dado del espacio puede ser definido en términos de la fuerza eléctrica que actúa sobre una carga de prueba  $q_0$  colocada en ese punto. Siendo más preciso,

**el vector campo eléctrico  $E$  en un punto en el espacio está definido como la fuerza eléctrica  $F$  que actúa sobre una carga de prueba positiva colocada en ese punto y dividida por la magnitud de la carga de prueba  $q_0$ :**

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (23.7)$$

**Definición de campo eléctrico**

Nótese que  $E$  es el campo *externo* a la carga de prueba —no es el campo producido por la carga de prueba—. El vector  $E$  tiene como unidades en el SI, newton por coulomb (N/C). La dirección de  $E$  es la dirección de  $F$  ya que asumimos que  $F$  actúa sobre una carga de prueba positiva. Así, podemos decir que *un campo eléctrico existe en un punto si una carga de prueba en reposo situada en ese punto experimenta una fuerza eléctrica*. Una vez que se conoce el campo eléctrico en



**Figura 23.9** a) Cuando una pequeña carga de prueba  $q_0$  se coloca cerca de una esfera conductora de carga  $q$  (donde  $q \gg q_0$ ), la carga sobre la esfera conductora permanece uniforme. b) Si la carga de prueba es del orden de la carga sobre la esfera, la carga sobre la esfera no es uniforme.

algún punto, es posible calcular, a partir de la ecuación 23.7, la fuerza sobre cualquier partícula cargada que se coloque en ese punto. Es más, se puede decir que existe el campo eléctrico en un punto (incluso en el espacio vacío) sin importar si está localizada o no una carga de prueba en ese punto.

Al aplicar la ecuación 23.7, debe suponerse que la carga de prueba  $q_0$  es lo suficientemente pequeña de modo que no perturbe la distribución de carga que produce el campo eléctrico.<sup>3</sup> Por ejemplo, si coloca una carga de prueba  $q_0$  de tamaño imperceptible cerca de una esfera metálica cargada uniformemente, como se muestra en la figura 23.9a, la carga de la esfera metálica, la cual produce el campo eléctrico, permanecerá uniformemente distribuida. Es más, la fuerza  $F$  sobre la carga de prueba  $q_0$  tendrá la misma magnitud en los puntos A, B y C, que están equidistantes de la esfera. Si la carga de prueba es lo suficientemente grande ( $q'_0 \gg q_0$ ) como en la figura 23.9b, se modificará la distribución de carga de la esfera metálica y la razón de la fuerza a la carga de prueba, en el punto A, será diferente: ( $F'/q'_0 \neq F/q_0$ ). Es decir, en virtud de esta redistribución de carga sobre la esfera metálica, el campo eléctrico producido por ella en el punto A en la figura 23.9b debe ser diferente al del punto A de la figura 23.9a. Además, la redistribución de carga cambiará cuando la carga menor se mueva de A a B o C.

Considérese una carga puntual  $q$  ubicada a una distancia  $r$  de una carga de prueba  $q_0$ . Según la ley de Coulomb, la fuerza sobre esta carga de prueba es

$$F = k \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

Como el campo eléctrico en la posición de la carga de prueba se define como  $E = F/q_0$ , se tiene que el campo eléctrico *debido a la carga  $q$  en la posición de  $q_0$*  es

$$E = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (23.8)$$

<sup>3</sup>Para ser más precisos, la carga de prueba debe ser infinitesimalmente pequeña de tal forma que su presencia no altere la distribución original de carga. Es decir, estrictamente hablando, debería reemplazarse la ecuación 23.7 por la expresión

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{F}{q_0}$$

Es imposible seguir en forma estricta esta prescripción ya que experimentalmente no se conoce la existencia de una carga más pequeña que  $e$ . Sin embargo, en la práctica, es siempre posible seleccionar una carga de prueba lo suficientemente pequeña para obtener el grado de exactitud deseado.

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario que está dirigido de  $q$  hacia  $q_0$  (Fig. 23.10). Si  $q$  es positiva, como en la figura 23.10a, el campo está dirigido radialmente *hacia afuera* de ella. Si  $q$  es *negativa*, como en la figura 23.10b, el campo está dirigido *hacia dentro* de ella.

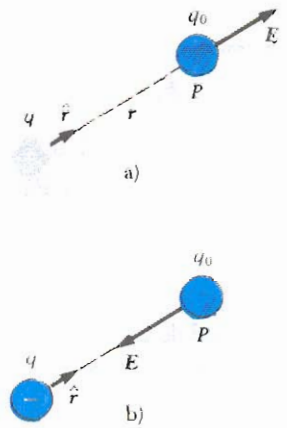
Para determinar el valor del campo debido a un grupo de cargas puntuales, primero se calcula el vector de campo eléctrico en el punto  $P$  en forma individual para cada carga utilizando la ecuación 23.8 y después sumándolos vectorialmente. En otras palabras.

el campo eléctrico total debido a un grupo de cargas es igual al vector resultante de la suma de los campos eléctricos de todas las cargas.

Este **principio de superposición** de los campos eléctricos se deduce directamente de la propiedad de superposición de las fuerzas eléctricas. Por lo tanto, el campo eléctrico de un grupo de cargas (excluyendo la carga de prueba  $q_0$ ) se puede expresar como

$$E = k \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (23.9)$$

donde  $r_i$  es la distancia de la  $i$ -ésima carga,  $q_i$ , al punto  $P$  (la ubicación de la carga de prueba), y  $\hat{r}_i$  es un vector unitario dirigido desde  $q_i$  hasta  $P$ .



**Figura 23.10** Una carga de prueba  $q_0$  en el punto  $P$  que está a una distancia  $r$  de la carga puntual  $q$ . a) Si  $q$  es positiva el campo eléctrico en  $P$  está radialmente hacia afuera de  $q$ . b) Si  $q$  es negativa el campo eléctrico en  $P$  es radialmente hacia dentro de  $q$ .

### EJEMPLO 23.5 Fuerza eléctrica sobre un protón

Determinese la fuerza eléctrica sobre un protón colocado en un campo eléctrico de  $2 \times 10^4$  N/C, dirigido a lo largo del eje positivo de las  $x$ .

**Solución** Como la carga del protón es

$$+e = +1.6 \times 10^{-19} \text{ C},$$

la fuerza eléctrica sobre éste es

$$\begin{aligned} F &= eE = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2 \times 10^4 \text{ N/C}) \\ &= 3.2 \times 10^{-15} \text{ i N} \end{aligned}$$

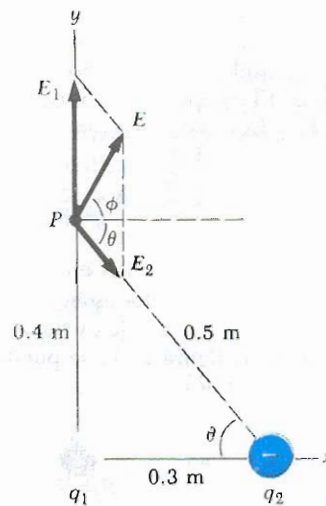
donde  $i$  es un vector unitario en la dirección positiva del eje  $x$ . El peso del protón se calcula como  $mg = (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 1.6 \times 10^{-26} \text{ N}$ . Como puede observarse, la magnitud de la fuerza gravitacional es despreciable comparada con la eléctrica.

### EJEMPLO 23.6 Campo eléctrico debido a dos cargas

La carga  $q_1 = 7 \mu\text{C}$  está colocada en el origen y una segunda carga  $q_2 = -5 \mu\text{C}$  está colocada sobre el eje  $x$  a 0.3 m del origen (Fig. 23.11). Determine el campo eléctrico en un punto  $P$  con coordenadas (0, 0.4)m.

**Solución** Primero, encontremos las magnitudes de los campos eléctricos debidos a cada una de las cargas. El campo eléctrico  $E_1$  debido a la carga de  $7 \mu\text{C}$  y el campo eléctrico  $E_2$  debido a la carga de  $-5 \mu\text{C}$  en el punto  $P$  se muestran en la figura 23.11. Sus magnitudes están dadas por

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = \left( 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(7 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.4 \text{ m})^2}$$



**Figura 23.11** (Ejemplo 23.6) El campo eléctrico total  $E$  en  $P$  es igual la suma vectorial  $E_1 + E_2$ , donde  $E_1$  es el campo debido a la carga positiva  $q_1$  y  $E_2$  es el campo debido a la carga negativa  $q_2$ .

$$= 3.94 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= k \frac{|q_2|}{r_2^2} = \left( 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(5 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.5 \text{ m})^2} \\ &= 1.8 \times 10^5 \text{ N/C} \end{aligned}$$

El vector  $E_1$  sólo tiene componente  $y$ . El vector  $E_2$  tiene una componente  $x$  dada por  $E_2 \cos \theta = \frac{3}{5} E_2$  y una compo-

nente  $y$  negativa dada por  $-E_2 \sin \theta = -\frac{1}{3} E_2$ . Por lo tanto, los vectores se pueden expresar como

$$E_1 = 3.94 \times 10^5 \mathbf{j} \text{ N/C}$$

$$E_2 = (1.1 \times 10^5 \mathbf{i} - 1.4 \times 10^5 \mathbf{j}) \text{ N/C}$$

El campo resultante  $E$  en  $P$  es la superposición de  $E_1$  y  $E_2$ :

$$E = E_1 + E_2 = (1.1 \times 10^5 \mathbf{i} + 2.5 \times 10^5 \mathbf{j}) \text{ N/C}$$

De este resultado, podemos encontrar que  $E$  tiene una magnitud de  $2.7 \times 10^5 \text{ N/C}$  y hace un ángulo  $\phi$  de  $66^\circ$  con el eje positivo de las  $x$ .

**Ejercicio 3** Determine la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba de  $2 \times 10^{-8} \text{ C}$  colocada en el punto  $P$ .

**Solución**  $5.4 \times 10^{-3} \text{ N}$  en la misma dirección que  $E$ .

**EJEMPLO 23.7 Campo eléctrico de un dipolo**

Un dipolo eléctrico consta de una carga positiva  $q$  y una negativa  $-q$  separadas por una distancia  $2a$ , como se muestra en la figura 23.12. Encuéntrese el campo eléctrico  $E$  debido a estas cargas en un punto  $P$  localizado a lo largo del eje  $y$ , el cual está a una distancia  $y$  del origen. Suponga que  $y \gg a$ .

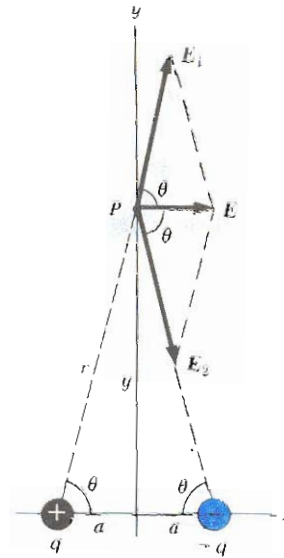
**Solución** En  $P$ , los campos  $E_1$  y  $E_2$  debidos a las dos cargas son iguales en magnitud, ya que equidistan de las dos cargas iguales y opuestas. El campo total  $E = E_1 + E_2$ , donde las magnitudes de  $E_1$  y  $E_2$  están dadas por

$$E_1 = E_2 = k \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{y^2 + a^2}$$

Las componentes en  $y$  se cancelan entre sí. Las componentes  $x$  son iguales, ya que las dos están a lo largo del eje  $x$ . Por lo tanto,  $E$  está a lo largo del eje  $x$  y tiene una magnitud igual a  $2E_1 \cos \theta$ . En la figura 23.12 se puede ver que  $\cos \theta = a/r = a/(y^2 + a^2)^{1/2}$ . Por lo tanto,

$$E = 2E_1 \cos \theta = 2k \frac{q}{(y^2 + a^2)} \frac{a}{(y^2 + a^2)^{1/2}} = k \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

usando la aproximación  $y \gg a$ , podemos despreciar  $a^2$  en



**Figura 23.12** (Ejemplo 23.7) El campo eléctrico total en  $P$  debido a dos cargas iguales y opuestas (un dipolo eléctrico) es igual a la suma vectorial  $E_1 + E_2$ . El campo  $E_1$  es debido a la carga positiva  $q$ , y  $E_2$  es el campo debido a la carga negativa  $-q$ .

denominador y escribir

$$E \approx k \frac{2qa}{y^3} \tag{23.10}$$

En consecuencia, se ve que a lo largo del eje  $y$  el campo de un dipolo en un punto distante varía proporcionalmente a  $1/r^3$ , mientras que el campo debido a una carga puntual varía en forma más lenta ya que lo hace proporcionalmente a  $1/r^2$ . Este hecho se debe a que en puntos distantes los campos de las dos cargas iguales y opuestas casi se cancelan entre sí. Para un punto distante a lo largo del eje  $x$  también se obtiene la variación de  $1/r^3$  en  $E$  para el dipolo (Probl. 61), así como para un punto distante en general. El dipolo es un buen modelo para muchas moléculas, como la de HCl.

Como se verá en capítulos posteriores, los átomos y las moléculas neutros se comportan como dipolos al colocarse en un campo eléctrico externo. Es más, muchas moléculas como la de HCl, son dipolos permanentes. (Esencialmente, el HCl es un ion  $H^+$ , combinado con un ion  $Cl^-$ .) El efecto de tales dipolos en el comportamiento de materiales sujetos a campos eléctricos se discutirá en el capítulo 26.

**23.5 CAMPO ELÉCTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA**

En la sección anterior se mostró la manera de calcular el campo eléctrico de una carga puntual aplicando la ley de Coulomb. Se obtuvo el campo total de un grupo de cargas puntuales tomando la suma vectorial de los campos debidos a cada una

de las cargas. Este procedimiento supone que el principio de superposición es aplicable al campo electrostático.

Con mucha frecuencia las cargas que interesan están muy próximas entre sí en comparación con las distancias a los puntos que se consideran. En situaciones de este tipo, puede considerarse al sistema de cargas como si fuera *continuo*. Es decir, si se supone que el sistema de cargas muy próximas es equivalente a una carga total continuamente distribuida a través de un volumen o sobre una superficie.

Para evaluar el campo eléctrico de una distribución continua de carga se aplica el siguiente procedimiento. En primer lugar, se divide la distribución de carga en pequeños elementos, cada uno de los cuales contiene una pequeña carga  $\Delta q$ , como se ve en la figura 23.13. A continuación se aplica la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico debido a uno de estos elementos en el punto  $P$ . Por último, se evalúa el campo total en  $P$  debido a la distribución de carga sumando las contribuciones de todos los elementos de carga (esto es, aplicando el principio de superposición).

El campo eléctrico en  $P$  debido a un elemento de carga  $\Delta q$  está dado por

$$\Delta \mathbf{E} = k \frac{\Delta q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

donde  $r$  es la distancia desde el elemento al punto  $P$  y  $\hat{\mathbf{r}}$  es el vector unitario dirigido desde el elemento de carga hacia  $P$ . El campo eléctrico total en  $P$  debido a todos los elementos en la distribución de carga está aproximadamente dado por

$$\mathbf{E} \approx k \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

donde el índice  $i$  se refiere al  $i$ -ésimo elemento en la distribución. Si la separación entre los elementos de la distribución de carga es pequeña comparada con la distancia a  $P$ , como una aproximación puede considerarse que la distribución de carga es continua. Por lo tanto, el campo total en  $P$  en el límite  $\Delta q \rightarrow 0$  viene a ser

$$\mathbf{E} = k \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (23.11)$$

en donde la integral es una operación *vectorial* y debe realizarse con cuidado. Se mostrará este tipo de cálculo con varios ejemplos en los que se supondrá que la carga está distribuida *uniformemente* sobre una línea, una superficie o en todo un volumen. Al llevar a cabo cálculos de este tipo, es conveniente utilizar el concepto de densidad de carga junto con las notaciones siguientes:

Si una carga  $Q$  está uniformemente distribuida en un volumen  $V$ , la *carga por unidad de volumen*  $\rho$  está definida por

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad (23.12)$$

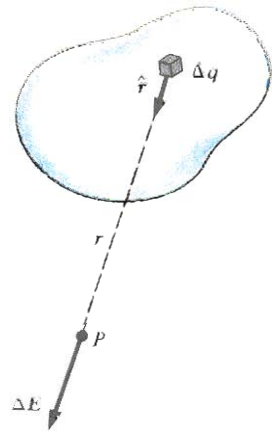
donde  $\rho$  tiene unidades de  $C/m^3$ .

Si una carga  $Q$  está uniformemente distribuida sobre una superficie de área  $A$ , la *densidad de carga superficial*  $\sigma$  está definida por

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (23.13)$$

donde  $\sigma$  tiene unidades de  $C/m^2$ .

### Distribución de carga continua



**Figura 23.13** El campo eléctrico en  $P$  debido a una distribución de carga continua es la suma vectorial de los campos debidos a todos los elementos  $\Delta q$  de la distribución de carga.

### Campo eléctrico de una distribución continua de carga

#### Densidad de carga volumétrica

#### Densidad de carga superficial

Finalmente, si una carga  $Q$  está uniformemente distribuida a lo largo de una línea de longitud  $\ell$ , la *densidad de carga lineal*  $\lambda$  se define como

**Densidad de carga lineal**

$$\lambda \equiv \frac{Q}{\ell} \tag{23.14}$$

donde  $\lambda$  tiene unidades de C/m.

Si la carga *no está uniformemente distribuida* sobre un volumen, superficie o línea, se tendrían que expresar las densidades de carga como

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \sigma = \frac{dQ}{dA} \quad \lambda = \frac{dQ}{d\ell}$$

donde  $dQ$  es la cantidad de carga en un elemento pequeño de volumen, superficie o longitud.

**EJEMPLO 23.8 Campo eléctrico debido a una barra cargada**

Una barra cargada de longitud  $\ell$  tiene una carga positiva por unidad de longitud  $\lambda$  y una carga total  $Q$ . Calcúlese el campo eléctrico en un punto  $P$  a lo largo del eje de la barra, a una distancia  $d$  de uno de los extremos (Fig. 23.14).

**Solución** Para este cálculo se considera que la barra está colocada a lo largo del eje de las  $x$ . La razón de  $\Delta q$ , la carga sobre el segmento a  $\Delta x$ , la longitud del segmento, es igual a la razón de la carga total a la longitud total de la barra. Es decir,  $\Delta q / \Delta x = Q / \ell = \lambda$ . Por lo tanto, la carga  $\Delta q$  sobre un pequeño segmento está dada por  $\Delta q = \lambda \Delta x$ .

El campo  $\Delta E$  debido a este segmento en el punto  $P$  está en la dirección negativa del eje  $x$  y su magnitud se expresa como<sup>4</sup>

$$\Delta E = k \frac{\Delta q}{x^2} = k \frac{\lambda \Delta x}{x^2}$$

Observe que cada elemento produce un campo en la dirección  $x$  negativa y, por lo tanto, en este caso el problema de sumar las contribuciones es particularmente sencillo. El campo total en  $P$  debido a todos los segmentos de la barra, los cuales están a distancias diferentes de  $P$ , se obtiene de la ecuación 23.11, la cual en este caso viene a ser

$$E = \int_d^{\ell+d} k\lambda \frac{dx}{x^2}$$

donde los límites de la integración se extienden desde uno

<sup>4</sup> Es importante que entienda el procedimiento utilizado para sacar las integrales como ésta. Primero elija un elemento cuyas partes sean equidistantes del punto hacia el cual se está calculando el campo. En seguida, exprese el elemento de carga  $\Delta q$  en términos de las otras variables de la integral (en este ejemplo, hay una variable,  $x$ ). En ejemplos con simetría esférica o cilíndrica, la variable será una coordenada radial.

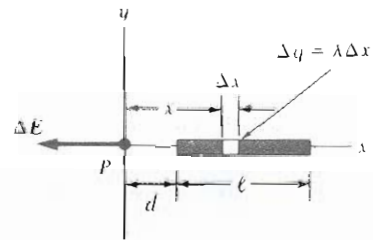


Figura 23.14 (Ejemplo 23.8) El campo eléctrico en  $P$  debido a una barra cargada uniformemente colocada a lo largo del eje  $x$ . El campo en  $P$  debido a un segmento de carga  $\Delta q$  está dada por  $k \Delta q / x^2$ . El campo total en  $P$  es la suma vectorial sobre todos los segmentos de la barra.

de los extremos de la barra ( $x = d$ ) hasta el otro ( $x = \ell + d$ ). Como  $k$  y  $\lambda$  son constantes, pueden sacarse de la integral; así se encuentra

$$\begin{aligned} E &= k\lambda \int_d^{\ell+d} \frac{dx}{x^2} = k\lambda \left[ -\frac{1}{x} \right]_d^{\ell+d} \\ &= k\lambda \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{\ell+d} \right) \\ &= \frac{kQ}{d(\ell+d)} \end{aligned} \tag{23.15}$$

donde se ha utilizado el hecho de que la carga total  $Q = \lambda \ell$ . A partir de este resultado se ve que si el punto  $P$  está lejos de la barra ( $d \gg \ell$ ), entonces puede despreciarse la  $\ell$  del denominador y  $E \approx kQ/d^2$ . Ésta es la forma que se espera para un carga puntual; por lo tanto, a distancias grandes de la barra, la distribución de carga se comporta como una carga puntual de magnitud  $Q$ . El uso de la técnica de los límites ( $d \rightarrow \infty$ ) a menudo resulta un buen método para verificar una fórmula teórica

**EJEMPLO 23.9 Campo eléctrico de un anillo uniforme de carga**

Un anillo de radio  $a$  tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud, con una carga total  $Q$ . Calcúlese el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo, en un punto que esté a una distancia  $x$  del centro del anillo (Fig. 23.15a).

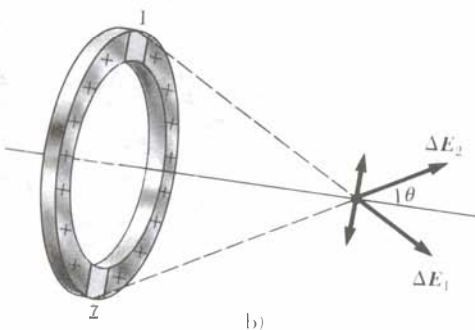
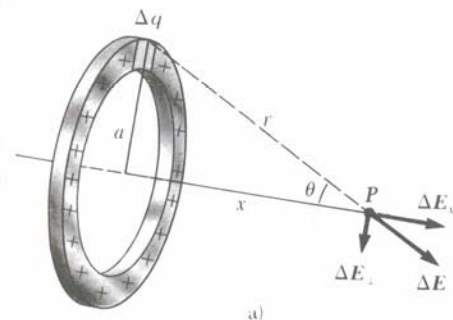
**Solución** La magnitud del campo eléctrico en  $P$  debida al segmento de carga  $\Delta q$ , es

$$\Delta E = k \frac{\Delta q}{r^2}$$

Este campo tiene una componente  $x$  dada por  $\Delta E_x = \Delta E \cos \theta$ , a lo largo del eje del anillo, y una componente  $\Delta E_{\perp}$ , perpendicular a dicho eje. Pero como se ve en la figura 23.15b, el campo resultante en  $P$  debe estar a lo largo del eje  $x$  ya que las componentes perpendiculares al sumarse darán por resultado cero. Es decir, la componente perpendicular de cualquier elemento se cancela por la componente perpendicular de un elemento que está en el lado opuesto del anillo. Como  $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$  y  $\cos \theta = x/r$ , se encuentra que

$$\Delta E_x = \Delta E \cos \theta = \left( k \frac{\Delta q}{r^2} \right) \frac{x}{r} = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \Delta q$$

En este caso, todos los segmentos del anillo tienen una misma contribución para el campo en el punto  $P$ , dado que todos equidistan de este punto. Por lo tanto, puede sumarse



**Figura 23.15** (Ejemplo 23.9) Anillo uniformemente cargado de radio  $a$ . a) El campo en  $P$  sobre el eje  $x$  debido a un elemento de carga  $\Delta q$ . b) El campo eléctrico total en  $P$  está a lo largo del eje  $x$ . Nótese que la componente perpendicular del campo eléctrico en  $P$  debido al segmento 1 se cancela con la componente perpendicular debida al segmento 2, la cual es opuesta al segmento 1.

con facilidad sobre todos los segmentos con el fin de obtener el campo total en  $P$ :

$$E_x = \sum \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \Delta q = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} Q \quad (23.16)$$

Este resultado muestra que el campo es cero para  $x = 0$ . ¿Lo sorprende?

**Ejercicio 4** Demuestre que a grandes distancias del anillo ( $x \gg a$ ) el campo eléctrico a lo largo del eje se aproxima al de una carga puntual de magnitud  $Q$ .

**EJEMPLO 23.10 Campo eléctrico de un disco uniformemente cargado**

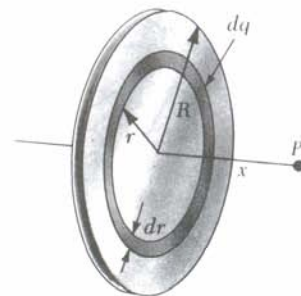
Un disco de radio  $R$  tiene una carga uniforme por unidad de área  $\sigma$ . Calcúlese el campo eléctrico a lo largo del eje del disco a una distancia  $x$  de su centro (Fig. 23.16).

**Solución** La solución de este problema es directa si se considera el disco como un conjunto de anillos concéntricos. Podemos hacer uso del resultado de ejemplo 23.9, el cual da el campo eléctrico de un anillo de radio  $r$ , y suma las contribuciones de todos los anillos que conforman el disco. Por simetría, el campo en el punto axial debe ser paralelo a este eje.

El anillo de radio  $r$  y anchura  $dr$  tiene un área igual a  $2\pi r dr$  (Fig. 23.16). La carga  $dq$  sobre este anillo es igual al área del mismo multiplicada por la carga por unidad de área, o sea,  $dq = 2\pi\sigma r dr$ . Aplicando este resultado en la ecuación 23.16 (reemplazando  $a$  por  $r$ ) se obtiene para el campo debido al anillo la expresión

$$dE = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} (2\pi\sigma r dr)$$

Para obtener el campo total en  $P$ , se integra esta expresión entre los límites  $r = 0$  y  $r = R$ , observando que  $x$  es constante, entonces se tiene



**Figura 23.16** (Ejemplo 23.10) Disco cargado uniformemente de radio  $R$ . El campo eléctrico en un punto axial  $P$  está dirigido a lo largo de este eje perpendicular al plano del disco.



$$\begin{aligned}
 E &= kx\pi\sigma \int_0^R \frac{2r \, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\
 &= kx\pi\sigma \int_0^R (x^2 + r^2)^{-3/2} d(r^2) \\
 &= kx\pi\sigma \left[ \frac{(x^2 + r^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R \\
 &= 2\pi k\sigma \left( \frac{x}{|x|} - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right) \quad (23.17)
 \end{aligned}$$

El resultado es válido para todos los valores de  $x$ . El campo en un punto cercano al disco sobre el eje **también** se puede obtener de la ecuación 23.17 haciendo que  $x \rightarrow 0$  (o bien que  $R \rightarrow \infty$ ); de donde se obtiene

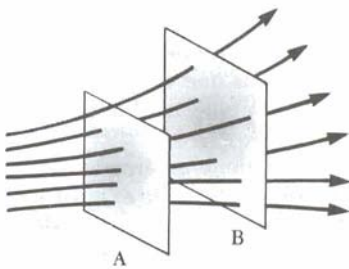
$$E = 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (23.18)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre, dada por la ecuación 23.4. Como se verá en el próximo capítulo, este mismo resultado se obtiene al calcular el campo de una lámina infinita uniformemente cargada.

**Ejercicio S** Demuestre que a grandes distancias del disco el campo eléctrico a lo largo del eje se aproxima al de una carga puntual de magnitud  $Q = \sigma\pi R^2$ .

### 23.6 LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO

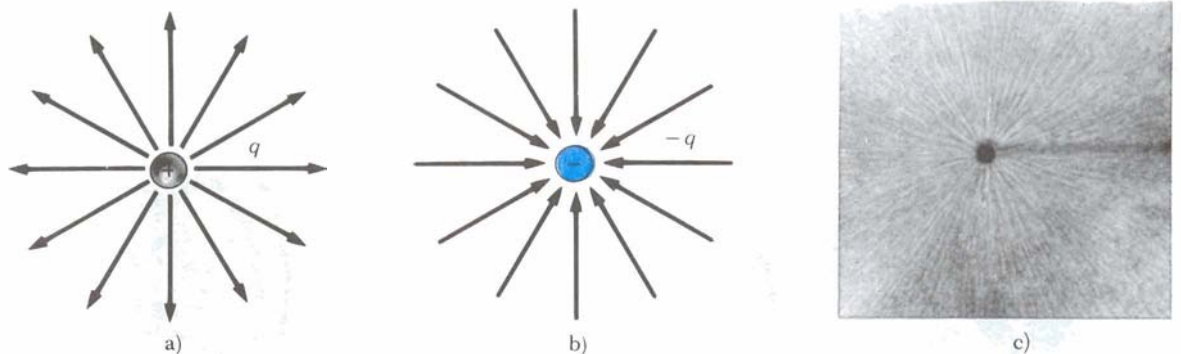
Una ayuda conveniente para **visualizar** los patrones del campo eléctrico es trazar líneas en la misma dirección que el vector de campo **eléctrico** en varios puntos. Estas líneas se conocen como **líneas de campo eléctrico** y están relacionadas con el **campo** eléctrico en alguna región del espacio de la siguiente manera:



1. El vector campo eléctrico  $\vec{E}$  es tangente a la **línea** de campo eléctrico en cada punto.
2. El número de líneas por unidad de área que pasan por una superficie **perpendicular** a las líneas de campo es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en esa región. En consecuencia,  $\vec{E}$  es grande cuando las líneas están muy próximas **entre** sí, y es pequeño cuando **están** separadas.

Figura 23.17 **Líneas** de campo eléctrico que **penetran** dos superficies. La magnitud del campo es mayor en la superficie A que en la superficie B.

Estas propiedades se ven en la figura 23.17. La densidad de líneas a través de la **superficie** A es mayor que la densidad de líneas a través de la superficie B. Por lo tanto, el campo eléctrico es más intenso en la superficie A que en la superficie B. Además, el campo que se observa en la figura 23.17 no es uniforme ya que las líneas en ubicaciones diferentes apuntan hacia direcciones diferentes.



**Figura 23.18** Líneas de campo **eléctrico** para una carga puntual. a) Para una carga puntual positiva, las **líneas** son radialmente hacia afuera. b) Para una carga puntual negativa, las **líneas** son radialmente hacia adentro. Nótese que en la figura **sólo** se muestran las líneas que **están** sobre el plano que contiene la carga. c) El área sombreada son **pequeñas** piezas de fibra suspendida en aceite, las cuales se alinean **con** el campo **eléctrico** producido por un pequeño conductor cargado en el centro. (Fotografía cortesía de **Harold M. Waage**, Princeton University.)

Algunas líneas representativas del campo eléctrico para una partícula puntual positiva se aprecian en la figura 23.18a. Obsérvese que en los dibujos bidimensionales sólo se muestran las líneas del campo que están en el plano que contiene a la carga. Las líneas están dirigidas radialmente hacia afuera de la carga en *todas* direcciones como las espinas de un puerco espín. Dado que la carga de prueba es positiva, al ser colocada en este campo, sería repelida por la carga  $q$ , por lo que las líneas están radialmente dirigidas hacia afuera desde la carga positiva. En forma similar, las líneas de campo eléctrico de una carga negativa puntual están dirigidas hacia la carga (Fig. 23.18b). En cualquiera de los casos las líneas siguen la dirección radial y se prolongan al infinito. Nótese que las líneas se juntan más cuando están más cerca de la carga, lo cual indica que la intensidad del campo se incrementa al acercarse a la carga.

Las reglas para trazar las líneas de campo eléctrico de cualquier distribución de carga son las siguientes:

1. Las líneas deben partir de cargas positivas y terminar en las cargas negativas, o bien en el infinito en el caso de un exceso de carga.
2. El número de líneas que partan de la carga positiva o lleguen a la negativa es proporcional a la magnitud de la carga.
3. Dos líneas de campo no pueden cruzarse.

#### Reglas para el trazo de líneas de campo eléctrico

¿Concuerda esta representación del campo eléctrico, en términos de líneas del campo, con la ley de Coulomb? Para responder esta pregunta, consideremos una superficie esférica imaginaria de radio  $r$  concéntrica con la carga. Por simetría, se ve que la magnitud del campo eléctrico es la misma en cualquier punto de la superficie de la esfera. El número de líneas  $N$  que emergen de la carga es igual al número que penetra la superficie esférica. Se infiere que el número de líneas por unidad de área en la esfera es  $N/4\pi r^2$  (donde el área de superficie de la esfera es  $4\pi r^2$ ). Siendo  $E$  proporcional al número de líneas por unidad de área, se puede ver que  $E$  varía como  $1/r^2$ . Lo cual es consecuente con el resultado obtenido de la ley de Coulomb, es decir,  $E = kq/r^2$ .

Es importante hacer notar que las líneas de campo no son objetos materiales. Éstas sólo se utilizan para dar una descripción cualitativa del campo eléctrico. Un problema que presenta este modelo es el hecho de que siempre se traza un número finito de líneas desde cada carga, lo que puede hacer pensar que el campo está cuantizado y que sólo actuará en cierta dirección. De hecho, el campo es continuo —existe en todo punto. Otro problema con este modelo es el peligro de adquirir una impresión equivocada al estar usando una representación bidimensional de las líneas de campo para describir una situación tridimensional.

Como la carga está cuantizada, el número de líneas que salen de cualquier objeto material debe ser  $0, \pm C'e, \pm 2C'e, \dots$ , donde  $C'$  es una constante arbitraria de proporcionalidad (pero fija). Una vez que se elige  $C'$ , el número de líneas no es arbitrario. Por ejemplo, si un objeto 1 tiene una carga  $Q_1$  y un objeto 2 tiene una carga  $Q_2$ , entonces la razón entre los números de líneas es  $N_2/N_1 = Q_2/Q_1$ .

Las líneas de campo eléctrico para dos partículas cargadas de igual magnitud, pero de signos opuestos (dipolo eléctrico), se muestran en la figura 23.19. En este caso, el número de líneas que empiezan en la carga positiva debe ser igual al número que terminan en la carga negativa. En puntos cercanos a las cargas, las líneas son prácticamente radiales. La alta densidad de las líneas entre las cargas indica una región de campo eléctrico intenso. La naturaleza atractiva de la fuerza entre las cargas también puede verse en la figura 23.19.

La figura 23.20 muestra las líneas de campo eléctrico en la vecindad de dos cargas puntuales positivas e iguales. Nuevamente, las líneas son casi radiales en los puntos cercanos a las cargas. Emerge el mismo número de líneas desde cada carga, ya que éstas tienen magnitudes iguales. A grandes distancias de las cargas

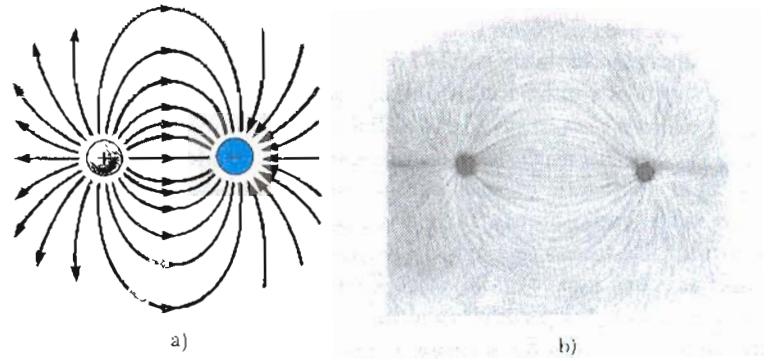


Figura 23.19 a) Líneas de campo eléctrico para dos cargas iguales y opuestas (dipolo eléctrico). Nótese que el número de líneas que salen de la carga positiva es igual al número que terminan en la carga negativa. b) Fotografía tomada utilizando pequeñas piezas de fibra suspendida en aceite, las cuales se alinean con el campo eléctrico. (Fotografía cortesía de Harold M. Waage, Universidad de Princeton)

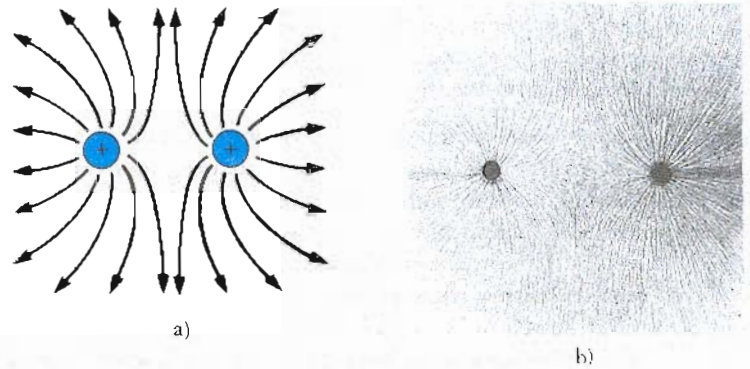


Figura 23.20 a) Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales positivas. b) La fotografía fue tomada utilizando pequeñas piezas de fibra suspendidas en aceite, las cuales se alinean con el campo eléctrico. (Fotografía cortesía de Harold M. Waage, Universidad de Princeton)

el campo es aproximadamente igual al de una sola carga puntual de magnitud  $2q$ . La desviación hacia afuera de las líneas del campo entre las cargas indica la naturaleza repulsiva de la fuerza eléctrica entre cargas del mismo signo.

Finalmente, en la figura 23.21 se tiene un esquema de las líneas del campo eléctrico asociado con una carga positiva de  $+2q$  y una carga negativa  $-q$ . En este caso, el número de líneas que sale de la carga  $+2q$  es el doble del número de líneas que entran a  $-q$ . Por consiguiente, la mitad restante suponemos que pueden ser localizadas en el infinito. A grandes distancias de las cargas (grande comparada con la distancia que las separa), las líneas de campo eléctrico son equivalentes a las de una simple carga  $+q$ .

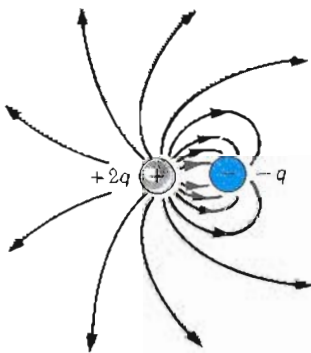


Figura 23.21 Líneas de campo eléctrico para una carga puntual  $+2q$  y una segunda carga puntual  $-q$ . Nótese que de cada dos líneas que salen de  $+2q$  sólo termina una sobre  $-q$ .

### 23.7 MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

En esta sección se describe el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme. Como se verá, el movimiento es equivalente al de un proyectil que se mueve en un campo gravitacional uniforme. Cuando una partícula de carga  $q$  se coloca en un campo eléctrico  $E$ , la fuerza eléctrica sobre la carga es  $qE$ . Si ésta es la única fuerza que actúa sobre la carga, entonces la segunda ley de Newton

aplicada a la carga produce

$$F = qE = ma$$

donde  $m$  es la masa de la carga y se supone que la velocidad es pequeña comparada con la de la luz. La aceleración de la partícula estará dada por lo tanto como

$$a = \frac{qE}{m} \quad (23.19)$$

Si  $E$  es uniforme (es decir, constante en magnitud y dirección), se puede ver que la aceleración es una constante del movimiento. Si la carga es positiva, la aceleración será en la dirección del campo eléctrico. Si la carga es negativa, la dirección de la aceleración será *opuesta* a la del campo eléctrico.

### EJEMPLO 23.11 Aceleración de una carga positiva

Una carga puntual positiva  $q$  de masa  $m$  se libera desde el reposo en un campo eléctrico uniforme  $E$  dirigido a lo largo del eje  $x$  como se muestra en la figura 23.22. Describese su movimiento.

**Solución** la aceleración de la carga es constante y está dada por  $qE/m$ . El movimiento es sólo lineal a lo largo del eje  $x$ . Por lo tanto, se pueden aplicar las ecuaciones cinemáticas en una dimensión (Cap. 3):

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad v = v_0 + at$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Tomando  $x_0 = 0$  y  $v_0 = 0$  se obtiene

$$x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{qE}{2m} t^2$$

$$v = at = \frac{qE}{m} t$$

$$v^2 = 2ax = \left( \frac{2qE}{m} \right) x$$

La energía cinética de la partícula después de que ha recorrido una distancia  $x$  está dada por

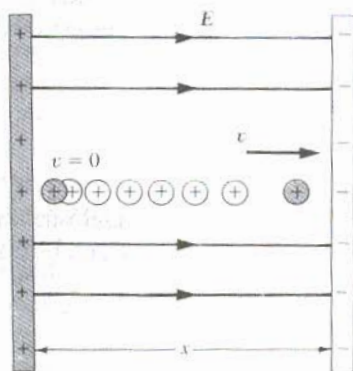


Figura 23.22 (Ejemplo 23.11) Una carga puntual positiva  $q$  en un campo eléctrico uniforme  $E$  está bajo una aceleración constante en la dirección del campo.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{2qE}{m} \right) x = qEx$$

Este resultado también se obtiene del teorema de trabajo y energía, ya que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es  $F_e x = qEx$  y  $W = \Delta K$ .

El campo eléctrico que existe en la región comprendida entre dos placas metálicas planas con cargas opuestas es aproximadamente uniforme (Fig. 23.23). Suponga que un electrón de carga  $-e$  se proyecta horizontalmente dentro de un campo eléctrico con una velocidad inicial  $v_{0i}$ . Debido a que el campo eléctrico  $E$  está en la dirección positiva del eje  $y$ , la aceleración del electrón es la dirección negativa del eje  $y$ . Es decir,

$$a = -\frac{eE}{m} \mathbf{j} \quad (23.20)$$

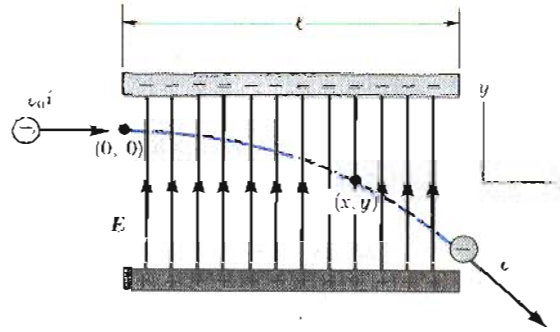


Figura 23.23 Un electrón se lanza horizontalmente dentro de un campo eléctrico producido por dos placas paralelas. El electrón está sujeto a una aceleración hacia abajo (opuesta a  $E$ ) y su movimiento es parabólico.

Ya que la aceleración es constante, podemos aplicar las ecuaciones cinemáticas en dos dimensiones (del capítulo 4) con  $v_{0x} = v_0$  y  $v_{0y} = 0$ . Las componentes de la velocidad después de un tiempo  $t$  en el campo eléctrico son

$$v_x = v_0 = \text{constante} \tag{23.21}$$

$$v_y = at = -\frac{eE}{m} t \tag{23.22}$$

Del mismo modo, las coordenadas del electrón después de transcurrir un tiempo  $t$  en el campo eléctrico son

$$x = v_0 t \tag{23.23}$$

$$y = \frac{1}{2} at^2 = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \tag{23.24}$$

Si se sustituye el valor  $t = x/v_0$  tomado de la ecuación 23.23 en la ecuación 23.24, se ve que  $y$  es proporcional a  $x^2$ . De donde la trayectoria es una parábola. Después de que el electrón sale del campo eléctrico uniforme, sigue moviéndose en línea recta con una rapidez  $v > v_0$ .

Nótese que se ha despreciado la fuerza gravitacional que actúa sobre el electrón. Ésta es una buena aproximación cuando se trata de partículas de dimensiones atómicas. Para un campo eléctrico típico de  $10^4$  N/C, la razón de la fuerza eléctrica  $eE$  a la fuerza gravitacional  $mg$  para un electrón es del orden de  $10^{14}$ . La razón correspondiente para un protón es del orden de  $10^{11}$ .

**EJEMPLO 23.12 Un electrón acelerado**

Un electrón entra a la región de un campo eléctrico uniforme como se ve en la figura 23.23 con  $v_0 = 3 \times 10^6$  m/s y  $E = 200$  N/C. El ancho de la placa es de  $\ell = 0.1$  m.  
a) Determínese la aceleración del electrón mientras se encuentre en el campo eléctrico.

Como la carga del electrón tiene una magnitud de  $1.6 \times 10^{-19}$  C y  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg, a partir de la ecuación 23.20 se obtiene

$$a = -\frac{eE}{m} j = -\frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(200 \text{ N/C})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} j$$

$$= -3.51 \times 10^{13} \text{ j m/s}^2$$

b) Calcule el tiempo que tarda el electrón en recorrer la región del campo eléctrico.

La distancia horizontal recorrida por el electrón mientras está en el campo eléctrico es de  $\ell = 0.1$  m. Si se aplica la ecuación 23.23 con  $x = \ell$ , se encuentra que el tiempo transcurrido en el campo eléctrico está dado por

$$t = \frac{\ell}{v_0} = \frac{0.1 \text{ m}}{3 \times 10^6 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-8} \text{ s}$$

c) ¿Cuál es el desplazamiento vertical  $y$  del electrón mientras está en el campo eléctrico?

Aplicando la ecuación 23.24 y los resultados de los incisos a) y b), encontramos que

$$y = \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}(3.51 \times 10^{13} \text{ m/s}^2)(3.33 \times 10^{-8} \text{ s})^2$$

$$= -0.0195 \text{ m} = -1.95 \text{ cm}$$

Si la separación entre las placas es menor que esto, el electrón chocará contra la placa positiva.

**Ejercicio 6** Calcule la velocidad del electrón al salir del campo eléctrico.

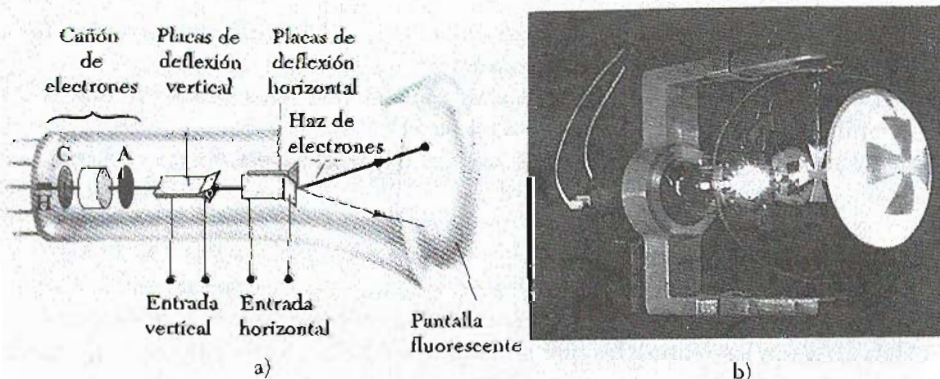
**Solución**  $3.22 \times 10^6 \text{ m/s}$ .

### 23.8 EL OSCILOSCOPIO

El osciloscopio es un dispositivo electrónico que se utiliza ampliamente para realizar mediciones eléctricas. El componente principal del osciloscopio es el tubo de rayos catódicos (TRC), que se muestra en la figura 23.24. Este tubo es comúnmente utilizado para obtener imágenes visuales de informaciones electrónicas de otras aplicaciones, incluyendo el sistema de radar, receptores de televisión y computadoras. El TRC es un tubo al vacío en el que los electrones que están en su interior son acelerados y desviados con la influencia de campos eléctricos.

El haz de electrones se produce por un ensamble conocido como *cañón de electrones*, localizado en el cuello del tubo. El ensamble que se ve en la figura 23.24 consta de un calentador H, un cátodo C y un ánodo cargado positivamente A. Una corriente eléctrica mantenida en el calentador produce que su temperatura se eleve, con lo cual se calienta el cátodo. El cátodo al encontrarse a altas temperaturas libera electrones. Esto no se muestra en la figura, el cañón de electrones también incluye un elemento que enfoca el haz de electrones y uno que controla el número de electrones que se liberan del cátodo (esto es, el control de brillantes). El ánodo tiene un agujero en el centro para que los electrones pasen a través de él y no choquen contra el ánodo. Estos electrones viajan en línea recta hasta que chocan con la pantalla del TRC. La pantalla es el frente del tubo y tiene colocado un material que emite luz visible cuando se bombardea con electrones. Con esto se obtiene una imagen visible en la pantalla del CRT.

Los electrones son deflectados en varias direcciones por dos conjuntos de placas colocadas en ángulo recto una respecto de otra en el cuello del tubo. Para



**Figura 23.24** a) Diagrama esquemático de un tubo de rayos catódicos. Los electrones que salen del cátodo caliente C son acelerados hasta el ánodo A. El cañón de electrones también se utiliza para enfocar el haz, y las placas para deflectarlo. b) Fotografía de la Cruz de Malta en un tubo que muestra la sombra de un haz de rayos catódicos que caen sobre la pantalla luminescente del tubo. El filamento caliente también produce un haz de luz y una segunda sombra de la cruz. (Cortesía de CENCO)

entender como operan las placas de deflexión, primero consideremos las placas de deflexión horizontal que se ven en la figura 23.24a. Un circuito eléctrico externo se usa como control y cambio de la cantidad de carga presente sobre estas placas, con carga positiva en una y negativa en la otra. (En el capítulo 25 se verá que esto se puede realizar aplicando un voltaje a través de las placas.) Al incrementar la carga se incrementa el campo eléctrico entre las placas, con lo cual se ocasiona que el haz de electrones sea deflexado de su trayectoria en línea recta. La pantalla del tubo es fluorescente y por lo tanto ilumina después de que los electrones se mueven de un punto a otro sobre la pantalla. Incrementando lentamente la carga sobre las placas horizontales se ocasiona que el haz de electrones se mueva en forma gradual desde el centro hacia un lado de la pantalla. Sin embargo, debido a la fluorescencia, uno observa una línea horizontal extendida a través de la pantalla en lugar de un simple movimiento del punto. La línea horizontal se puede mantener sobre la pantalla por rapidez repetitiva de trazos.

Las placas de deflexión vertical actúan exactamente de la misma forma que las placas horizontales, excepto que el cambio de carga en ellas controlado con el circuito externo ocasionará una línea vertical en la pantalla del tubo. En la práctica, las placas de deflexión vertical y horizontal se utilizan simultáneamente. Para ver cómo el osciloscopio puede desplegar una información visual, examinaremos cómo se observa una onda sonora de un diapasón sobre la pantalla. Para este propósito, la carga sobre la placa horizontal cambia de tal manera que el haz de electrones barra la pantalla con rapidez constante. Al golpear el diapasón, el sonido es captado por un micrófono, el cual cambia la señal sonora en una señal eléctrica que se aplica a las placas verticales. El efecto combinado de las placas verticales y horizontales ocasiona que el haz barra el tubo horizontalmente y de arriba hacia abajo al mismo tiempo, con el movimiento vertical correspondiendo a la señal del diapasón. Un patrón como ese se muestra en la figura 23.25 y se puede observar sobre la pantalla.

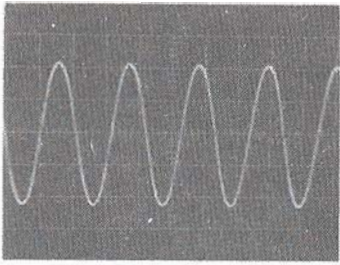


Figura 23.25 Una onda sinusoidal producida por un generador de onda y proyectada en el osciloscopio. (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

## RESUMEN

Las **cargas eléctricas** tienen las siguientes propiedades:

1. Cargas de signos contrarios se atraen, cargas del mismo signo se repelen.
2. La carga eléctrica siempre se conserva.
3. La carga está cuantizada, es decir, existen paquetes discretos que son múltiplos enteros de la carga del electrón.
4. La fuerza entre las cargas varía inversamente al cuadrado de la distancia que las separa.

Los **conductores** son materiales en los cuales las cargas se mueven con facilidad. Algunos ejemplos de buenos conductores son cobre, aluminio y plata. **Aislantes** son los materiales que no transportan la carga con facilidad. Algunos ejemplos son el vidrio, el caucho y la madera.

La **ley de Coulomb** establece que la fuerza electrostática entre partículas estacionarias cargadas separadas una distancia  $r$  tiene una magnitud dada por

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (23.1)$$

## Propiedades de las cargas eléctricas

## Ley de Coulomb

donde la constante  $k$  tiene un valor de

$$k = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (23.2)$$

Constante de Coulomb

La unidad de carga más pequeña conocida en la naturaleza es la carga de un electrón o un protón. La magnitud de esta carga  $e$  está dada por

$$|e| = 1.60219 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (23.5)$$

Carga de un electrón o protón

El **campo eléctrico**  $E$  en algún punto en el espacio está definido como la fuerza eléctrica  $F$  que actúa sobre una pequeña carga de prueba colocada en ese punto, dividida por la magnitud de carga de prueba  $q_0$ :

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (23.7)$$

Definición de campo eléctrico

El campo eléctrico debido a una carga puntual  $q$  a una distancia  $r$  de la carga está dada por

$$E = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (23.8)$$

Campo eléctrico de una carga puntual  $q$

donde  $\hat{r}$  es el vector unitario dirigido desde la carga hacia el punto en cuestión. El campo eléctrico siempre está dirigido radialmente hacia afuera desde una carga positiva y directamente hacia una carga negativa.

El campo eléctrico debido a un grupo de cargas puede obtenerse utilizando el **principio de superposición**. Es decir, el campo eléctrico total es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos de todas las cargas en ese punto:

$$E = k \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (23.9)$$

Campo eléctrico de un grupo de cargas

En forma semejante, el campo eléctrico debido a una distribución de carga continua en un punto está dado por:

$$E = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (23.11)$$

Campo eléctrico de una distribución de carga continua

donde  $dq$  es la carga sobre un elemento de la distribución de carga y  $r$  es la distancia desde el elemento al punto en cuestión.

Las **líneas de campo eléctrico** se usan para describir el campo eléctrico en alguna región del espacio. El vector de campo eléctrico  $E$  siempre es tangente a la línea de campo en cualquier punto. Además, el número de líneas por unidad de área a través de una superficie perpendicular a las líneas es proporcional a la magnitud de  $E$  en esa región.

Una partícula cargada de masa  $m$  y carga  $q$  que se mueve en un campo eléctrico  $E$  tiene una aceleración  $a$  dada por

$$a = \frac{qE}{m} \quad (23.19)$$

Aceleración de una carga en un campo eléctrico

Si el campo eléctrico es uniforme, la aceleración es constante y el movimiento de la carga es similar al de un proyectil que se mueve en un campo gravitacional uniforme.



## ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- 1. Unidades:** Cuando realicemos cálculos que impliquen el uso de la constante de Coulomb  $k (= 1/4\pi\epsilon_0)$  la cual aparece en la ley de Coulomb, las cargas deben estar dadas en coulombs y las distancias en metros. Si están en otras unidades deberá hacerse la conversión.
- 2. Aplicación de la ley Coulomb para cargas puntuales.** Es importante recordar el uso apropiado del principio de superposición cuando se trabaje con una colección de cargas interactuantes. Cuando varias cargas estén presentes, la fuerza resultante sobre cualquiera de las cargas es la suma vectorial de las fuerzas debidas a las interacciones individuales sobre la carga. Se debe tener cuidado con el manejo algebraico de las cantidades vectoriales. Puede ser útil revisar el material sobre suma vectorial del capítulo 2.
- 3. Cálculo del campo eléctrico de cargas puntuales:** recuerde que el principio de superposición puede ser utilizado para los campos eléctricos, los cuales también son cantidades vectoriales. Para determinar el campo eléctrico total en un punto dado, primero calcule el campo eléctrico debido a cada una de las cargas. El campo resultante en ese punto es la suma vectorial de los campos debidos a cada una de las cargas.
- 4. Distribución de carga continua:** cuando se enfrente con problemas que impliquen una distribución continua de carga, la suma vectorial para evaluar el campo eléctrico total en algún punto debe ser reemplazada por una integral vectorial. La distribución de carga se divide en piezas infinitesimales, y la suma vectorial se lleva a cabo por integración sobre la distribución de carga completa. Podría revisar los ejemplos 8, 9 y 10, en los que se demuestra el procedimiento.
- 5. Simetría:** siempre que se trate de una distribución de cargas puntuales o de una distribución continua de carga, se podrá tomar ventaja de cualquier simetría del sistema para simplificar los cálculos.
- 6. Partículas cargadas que se mueven en campos eléctricos uniformes:** el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme (aquel que es constante en magnitud y dirección) puede ser descrito por medio de las ecuaciones del movimiento de proyectiles desarrolladas en el capítulo 4. En este caso, la aceleración uniforme está dada por  $a = qE/m$ .

## PREGUNTAS

1. Con frecuencia se observan (o se escuchan) chispazos en un día seco cuando nos quitamos la ropa en la oscuridad. Dé una explicación.
2. Explique desde el punto de vista atómico por qué la carga es comúnmente transferida por electrones.
3. Un globo se carga negativamente al frotarlo y entonces puede ser pegado en la pared. ¿Significa esto que la pared está cargada positivamente? ¿Por qué finalmente el globo se cae?
4. Una esfera ligera metálica no cargada, suspendida de un hilo, es atraída por una barra de caucho cargada. Después de tocar la barra, la esfera se repele por la barra. Dé una explicación.
5. Explique qué se entiende por un átomo neutral.
6. Si un objeto suspendido A es atraído por un objeto B, el cual está cargado, ¿se podría concluir que el objeto A está cargado? Dé una explicación.
7. Un peine cargado podría atraer algunas piezas pequeñas de papel seco que salen volando después de tocar el peine. Dé una explicación.
8. ¿Por qué algunas piezas de ropa se adhieren entre sí y a nuestro cuerpo al sacarlas de una secadora?
9. Una gran esfera metálica aislada de tierra se carga con un generador electrostático mientras una persona en un banquillo aislante toca la esfera cuando se carga. ¿Por qué está a salvo al hacer esto? ¿Por qué no estaría a salvo otra persona que tocará la esfera después de que se ha cargado?
10. ¿Cuál es la diferencia entre cargar un objeto por inducción y cargarlo por conducción?
11. ¿Cuáles son las similitudes y las diferencias entre la ley universal de la gravitación de Newton  $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$  y la ley de Coulomb  $F = \frac{kQ_1Q_2}{r^2}$ ?
12. Suponga que alguna persona propusiera una teoría que dijera que las personas están sobre la tierra debido a la fuerza eléctrica en vez de por la fuerza gravitacional. ¿Cómo podría probar que la teoría es equivocada?

13. ¿Sería diferente la vida si el electrón tuviera carga positiva mientras que la del protón fuera negativa? ¿Al escoger el signo se tienen que considerar las interacciones físicas y químicas? Dé una explicación.
14. Cuando se define el campo eléctrico, ¿por qué es necesario especificar que la magnitud de la carga de prueba debe ser pequeña (es decir, tome el límite cuando  $q \rightarrow 0$ )?
15. Dos esferas de radio  $a$  están separadas por una distancia  $r > 2a$ . ¿Es la fuerza que actúa sobre cada esfera la que da la ley de Coulomb? Dé una explicación. (Sugerencia: recuerde lo visto en el capítulo 14 acerca de la gravitación.)
16. ¿Cuándo es válido aproximar una distribución de carga a una carga puntual?
17. ¿Es posible que exista el campo eléctrico en el espacio vacío?
18. Explique por qué las líneas de campo eléctrico no pueden hacer la forma de un lazo cerrado.
19. Explique por qué las líneas de campo eléctrico nunca se cruzan. (Sugerencia:  $\mathbf{E}$  debe tener una sola dirección en cualquier punto.)
20. Un electrón y un protón libres se colocan en un campo eléctrico idéntico. Compare las fuerzas eléctricas que actúan sobre cada partícula. Compare sus aceleraciones.
21. Explique qué pasa con la magnitud del campo eléctrico de una carga puntual cuando  $r$  se aproxima a cero.
22. Una carga negativa se coloca en una región del espacio donde el campo eléctrico está dirigido verticalmente hacia arriba. ¿Cuál es la dirección de la fuerza eléctrica experimentada por esta carga?
23. Una carga de  $4q$  está a una distancia  $r$  de una carga  $-q$ . Compare el número de líneas de campo eléctrico que salen de la carga de  $4q$  con el número que entra en la carga  $-q$ .
24. En la figura 23.21, ¿dónde terminan las líneas extras que salen de la carga  $+2q$ ?
25. Considere dos cargas puntuales iguales separadas una distancia  $d$ . En qué punto (diferente del  $\infty$ ) podría colocarse una tercera carga que no experimentara fuerza neta.
26. Una pelota de ping pong no cargada recubierta con una placa metálica se coloca en una región entre dos placas de metal paralelas horizontales. Si las placas son cargadas, una positiva y otra negativa, describa el movimiento de la pelota de ping pong.
27. Una carga puntual negativa  $-q$  se coloca en un punto  $P$  cercano a un anillo cargado positivamente como se muestra en la figura 23.15 del ejemplo 23.9. Si  $x \ll a$ , describa el movimiento de la carga puntual si se suelta desde el reposo.
28. Explique la diferencia entre la densidad de carga lineal, superficial y volumétrica, y dé algunos ejemplos de cuando cada una podría utilizarse.
29. Si el electrón de la figura 23.23 se proyecta dentro del campo eléctrico con una velocidad arbitraria  $v_0$  (con un ángulo respecto a  $\mathbf{E}$ ), ¿sería su trayectoria todavía una parábola?
30. Si un objeto metálico recibe una carga positiva, ¿esto incrementa, decreta o deja igual su masa? ¿Qué pasa con la masa del objeto si éste recibe una carga negativa?
31. Se tienen reportes de que en algunos casos personas que estaban cerca de donde cayó un relámpago fueron despojadas de sus ropas. Explique por qué podría suceder esto.
32. ¿Por qué debe ser conectado un alambre a tierra desde la base metálica de la antena de un televisor?
33. ¿Tienen los ocupantes de una casa que se construyó con marco de acero mayor seguridad que los de una casa con marco de madera durante una tormenta eléctrica o viceversa? Dé una explicación.
34. Una hojuela de aluminio se suspende de una barra de madera. Cuando una barra con carga positiva se acerca a la hoja, las dos partes de la hoja se separan. ¿Por qué? ¿Qué tipo de carga tiene la hoja?
35. ¿Por qué es más difícil cargar un objeto por fricción en un día húmedo que en un día seco?
36. ¿Cómo se podría distinguir experimentalmente un campo eléctrico de uno gravitacional?

## PROBLEMAS

### Sección 23.3 Ley de Coulomb

1. Suponga que 1 g de hidrógeno se separa en electrones y protones. Suponga también que los protones son colocados en el Polo Norte de la Tierra y los electrones en el Polo Sur. ¿Cuál es la fuerza compresional resultante sobre la Tierra?
2. Calcule la carga neta sobre una sustancia arbitraria que consta de: a)  $8 \times 10^{13}$  electrones y b) una combinación de  $3 \times 10^{14}$  protones y  $7 \times 10^{14}$  electrones.
3. Dos protones en una molécula están separados por una distancia de  $3.8 \times 10^{-10}$  m. Determine la fuerza electrostática ejercida por uno de los protones sobre el otro.
4. Una carga de  $6.7 \mu\text{C}$  se coloca a 5.0 m de una carga de  $-8.4 \mu\text{C}$ . Determine la fuerza electrostática ejercida por una carga sobre la otra.
5. Una carga de  $1.3 \mu\text{C}$  se coloca sobre el eje  $x$  en  $x = -0.5$  m, otra carga de  $3.2 \mu\text{C}$  se coloca sobre el eje  $x$  en  $x = 1.5$  m, y una carga de  $2.5 \mu\text{C}$  se coloca en el origen. Determine la fuerza neta sobre la carga de  $2.5 \mu\text{C}$ . Todas las cargas son positivas.
6. Una carga puntual  $q_1 = -4.3 \mu\text{C}$  se coloca sobre el eje  $y$  en  $y = 0.18$  m, una carga  $q_2 = 1.6 \mu\text{C}$  se coloca sobre el origen y una carga  $q_3 = 3.7 \mu\text{C}$  se coloca sobre el eje  $x$  en  $x = -0.18$  m. Determine la fuerza resultante sobre la carga  $q_1$ .
7. Tres cargas puntuales de  $2 \mu\text{C}$ ,  $7 \mu\text{C}$  y  $-4 \mu\text{C}$  se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero como se

muestra en la figura 23.26. Calcule la fuerza eléctrica neta sobre la carga de  $7 \mu\text{C}$ .

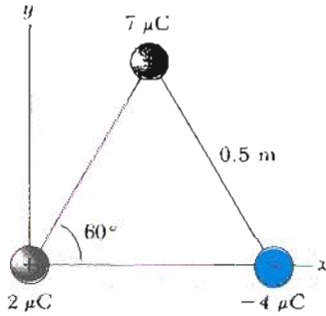


Figura 23.26 (Problemas 7 y 24).

8. Cuatro cargas puntuales se colocan en las esquinas de un cuadrado de lado  $a$ , como se muestra en la figura 23.27. Determine la fuerza resultante sobre la carga positiva  $q$ .

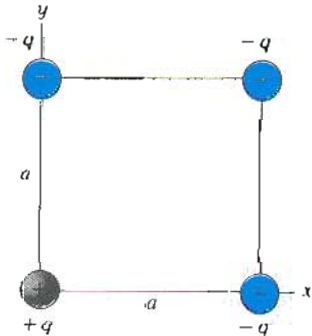


Figura 23.27 (Problemas 8 y 25).

9. Cuatro cargas puntuales idénticas ( $q = +10 \mu\text{C}$ ) se colocan sobre las esquinas de un rectángulo como se muestra en la figura 23.28. Las dimensiones del rectángulo son  $L = 60 \text{ cm}$  y  $W = 15 \text{ cm}$ . Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza neta electrostática ejercida sobre la carga de la esquina inferior izquierda del rectángulo por las otras tres cargas.

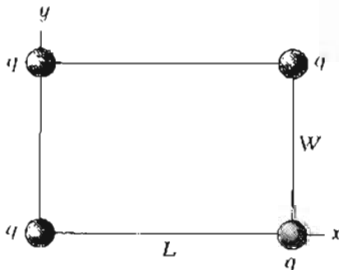


Figura 23.28 (Problemas 9 y 20).

10. Cuatro cargas puntuales idénticas, de valor arbitrario, se localizan en las esquinas de una placa rígida cuadrada. Demuestre que el momento de una fuerza neta alrededor del centro de la placa es cero.
11. Tres cargas puntuales están alineadas sobre el eje  $y$ . Una carga  $q_1 = -9 \mu\text{C}$  está en  $y = 6.0 \text{ m}$  y una carga  $q_2 = -8$

$\mu\text{C}$  está en  $y = -4.0 \text{ m}$ . ¿Dónde debe ser colocada una tercera carga  $q_3$  para que la fuerza neta sobre ésta sea cero?

12. Una carga  $q_1$  de  $+3.4 \mu\text{C}$  se coloca en  $x = +2 \text{ m}$ ,  $y = +2 \text{ m}$  y una segunda carga  $q_2 = 2.7 \mu\text{C}$  se coloca en  $x = -4 \text{ m}$ ,  $y = -4 \text{ m}$ . ¿Dónde debe ser colocada una tercera carga ( $q_3 > 0$ ) para que la fuerza sobre ella sea cero?
13. Tres cargas idénticas puntuales, cada una de magnitud  $q$ , se localizan sobre los vértices de un triángulo isósceles con su altura orientada verticalmente. La altura del triángulo es de  $4 \text{ cm}$  y su base es de  $6 \text{ cm}$ . a) Si la fuerza eléctrica resultante ejercida sobre la carga localizada en el vértice superior del triángulo tiene una magnitud de  $0.5 \text{ N}$ , determine  $q$ . b) Si la carga del vértice inferior izquierdo se reemplaza por una carga  $-q$ , determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante ejercida sobre la carga localizada en el vértice superior del triángulo.

### Sección 23.4 Campo eléctrico

14. La fuerza eléctrica sobre una carga puntual de  $4.0 \mu\text{C}$  en algún punto es  $6.9 \times 10^{-4} \text{ N}$  en la dirección  $x$  positiva. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico en ese punto?
15. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del campo eléctrico que compensa el peso de: a) un electrón y b) de un protón? (Utilice los datos de la tabla 23.1.)
16. Un objeto que tiene una carga neta de  $24 \mu\text{C}$  se coloca en un campo eléctrico uniforme de  $610 \text{ N/C}$  dirigido verticalmente. ¿Cuál es la masa del objeto si está flotando en el campo eléctrico?
17. Una carga puntual de  $-5.2 \mu\text{C}$  se localiza en el origen. Determine el campo eléctrico a) sobre el eje de las  $x$  en  $x = 3 \text{ m}$ , b) sobre el eje  $y$  en  $y = -4 \text{ m}$ , c) en un punto con coordenadas  $x = 2 \text{ m}$ ,  $y = 2 \text{ m}$ .
18. Determine el campo eléctrico a lo largo de la línea entre las dos cargas que se ven en la figura 23.29 en el punto medio entre ellas.

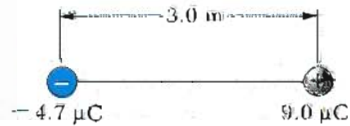


Figura 23.29 (Problemas 18 y 27).

19. Dos cargas puntuales iguales de magnitud  $2.0 \mu\text{C}$  se localizan sobre el eje  $x$ . Una está en  $x = 1.0 \text{ m}$ , y la otra está en  $x = -1.0 \text{ m}$ . a) Determine el campo eléctrico sobre el eje  $y$  en  $y = 0.5 \text{ m}$ . b) Calcule la fuerza eléctrica sobre una tercera carga de  $-3.0 \mu\text{C}$ , colocada sobre el eje  $y$  en  $y = 0.5 \text{ m}$ .
20. Cuatro cargas puntuales idénticas ( $q = +6 \mu\text{C}$ ) se localizan sobre un rectángulo como se muestra en la figura 23.28, con  $L = 80 \text{ cm}$  y  $W = 20 \text{ cm}$ . Calcule el campo eléctrico resultante en el centro del rectángulo.
21. Tres cargas puntuales idénticas ( $q = -5 \mu\text{C}$ ) se localizan a lo largo de un círculo de  $2 \text{ m}$  de radio a ángulos de  $30^\circ$ ,  $150^\circ$  y  $270^\circ$  como se muestra en la figura 23.30.

¿Cuál es el campo eléctrico resultante en el centro del círculo?

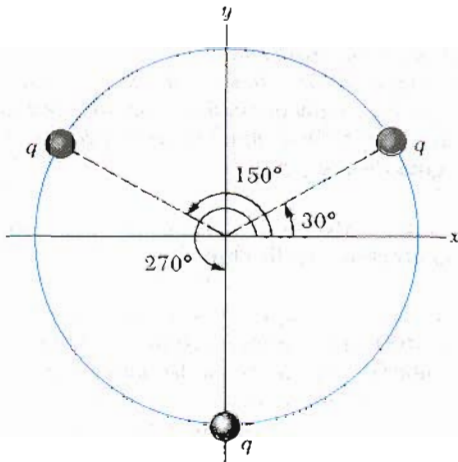


Figura 23.30 (Problema 21).

22. Tres cargas puntuales idénticas ( $q = +2.7 \mu\text{C}$ ) se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero cuyo lado tiene una longitud de 35 cm (véase la figura 23.31). ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico resultante en el centro del triángulo?

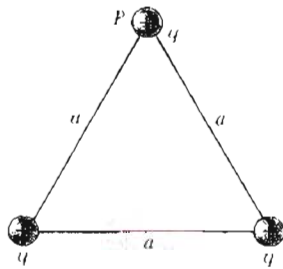


Figura 23.31 (Problemas 22 y 23).

23. Tres cargas positivas iguales  $q$  están en las esquinas de un triángulo equilátero de lados  $a$  como se muestra en la figura 23.31. a) ¿En qué punto (diferente de  $\infty$ ) en el plano de las cargas el campo eléctrico es cero? ¿Cuál es la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto  $P$  debido a las dos cargas de la base del triángulo?
24. Tres cargas están en las esquinas de un triángulo equilátero como en la figura 23.26. Calcule la intensidad del campo eléctrico en la posición de la carga de  $2 \mu\text{C}$  debida a las cargas de  $7 \mu\text{C}$  y  $-4 \mu\text{C}$ .
25. Cuatro cargas están en las esquinas de un cuadrado como en la figura 23.27. a) Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en la posición de la carga  $-q$ , si las coordenadas a las cuales se encuentra son  $x = a, y = a$ . b) ¿Cuál es la fuerza eléctrica sobre esta carga?
26. Una carga de  $-4 \mu\text{C}$  está colocada en el origen, y una carga de  $-5 \mu\text{C}$  está colocada a lo largo del eje  $y$  en  $y = 2.0$  m. ¿En qué punto a lo largo del eje  $y$  el campo eléctrico es cero?

27. En la figura 23.29, determine el punto (diferente de  $\infty$ ) en el cual el campo eléctrico sea cero.

**Sección 23.5 Campo eléctrico de una distribución continua de carga**

28. Una barra de 18 cm de longitud está cargada uniformemente y tiene una carga total de  $-22 \mu\text{C}$ . Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico a lo largo del eje de la barra en un punto a 36 cm del centro de la barra.
29. Una línea continua de carga se encuentra a lo largo del eje  $x$  extendiéndose desde  $x = +x_0$  hasta el infinito positivo. La línea posee una densidad de carga uniforme  $\lambda$ . ¿Cuál es la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el origen?
30. Una línea de carga empieza en  $x = +x_0$  y se extiende hasta el infinito positivo. Si la densidad lineal de carga está dada por  $\lambda = \lambda_0 x/x_0$ , determine el campo eléctrico en el origen.
31. Un anillo cargado uniformemente de radio 10 cm tiene una carga total de  $75 \mu\text{C}$ . Determine el campo eléctrico sobre el eje del anillo a a) 1 cm, b) 5 cm, c) 30 cm y d) 100 cm del centro del anillo.
32. Demuestre que la máxima intensidad del campo eléctrico  $E_m$  a lo largo del eje de un anillo uniformemente cargado ocurre para  $x = a/\sqrt{2}$  (véase la figura 23.15) y tiene un valor de  $Q/(6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2)$ .
33. Una esfera de 4 cm de radio tiene una carga neta de  $+39 \mu\text{C}$ . a) Si la carga está uniformemente distribuida sobre el volumen de la esfera, ¿cuál es la densidad de carga volumétrica? b) Si la carga está uniformemente distribuida sobre la superficie de la esfera, ¿cuál es la densidad superficial de carga?
34. Un disco uniformemente cargado de radio 35 cm tiene una densidad de carga de  $7.9 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$ . Calcule el campo eléctrico sobre el eje del disco a una distancia del centro de éste de a) 5 cm, b) 10 cm, c) 50 cm y d) 200 cm.
35. En el ejemplo 23.10 se derivó la expresión exacta para el campo eléctrico en un punto sobre el eje de un disco cargado uniformemente (véase la ecuación 23.17). Considere un disco de radio  $R = 3$  cm, teniendo uniformemente distribuida una carga de  $+5.2 \mu\text{C}$ . a) Utilizando el resultado del ejemplo 23.10, calcule el campo eléctrico en un punto sobre su eje y a 3 mm de su centro. Compare esta respuesta con la del campo calculado con la aproximación realizada para puntos cercanos (Ec. 23.18). b) Utilizando el resultado del ejemplo 23.10, calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje a 30 cm del centro del disco. Compare este resultado con el del campo eléctrico obtenido al tratar el disco como una carga puntual de  $+5.2 \mu\text{C}$  a una distancia de 30 cm.
36. El campo eléctrico a lo largo del eje de un disco uniformemente cargado de radio  $R$  y carga total  $Q$  se calculó en el ejemplo 23.10. Demuestre que el campo eléctrico a una distancia  $x$ , grande comparada con  $R$ , se aproxima al de una carga puntual  $Q = \sigma\pi R^2$ . (Sugerencia: primero demuestre que  $x/(x^2 + R^2)^{3/2} = (1 + R^2/x^2)^{-3/2}$  usando la expansión binomial  $(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta$  cuando  $\delta \ll 1$ .)

37. Un anillo y un disco uniformemente cargados tienen cada uno una carga de  $+25 \mu\text{C}$  y un radio de 3 cm. Para cada uno de estos objetos cargados determine el campo eléctrico en un punto a lo largo del eje del objeto el cual está a 4 cm del centro de éste.
38. Una pieza de 10 g tiene una carga neta de  $-0.7 \mu\text{C}$  y flota en el centro de una lámina de plástico horizontal muy grande la cual tiene una densidad de carga uniforme sobre su superficie. ¿Cuál es la carga por unidad de área sobre la superficie en la lámina de plástico?
39. Una barra uniformemente cargada de 14 cm se dobla para formar un semicírculo como se muestra en la figura 23.32. Si la barra tiene una carga total de  $-7.5 \mu\text{C}$ , determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en O, el centro del semicírculo.

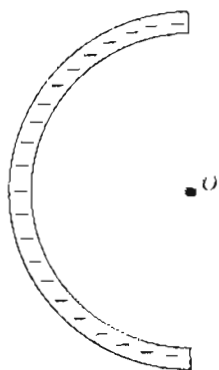


Figura 23.32 (Problema 39)

**Sección 23.6 Líneas de campo eléctrico**

40. Un disco cargado positivamente tiene una carga por unidad de longitud como la descrita en el ejemplo 23.10. Trace las líneas de campo eléctrico en un plano perpendicular al plano del disco pasando a través de su centro.
41. Una barra cargada negativamente de longitud infinita tiene una carga uniforme por unidad de longitud. Trace

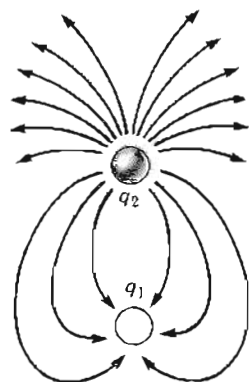


Figura 23.33 (Problema 43).

las líneas de campo eléctrico en un plano que contenga a la barra.

42. Cuatro cargas puntuales iguales están en las esquinas de un cuadrado. Trace las líneas de campo eléctrico en el plano del cuadrado.
43. La figura 23.33 muestra las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales separadas por una pequeña distancia. a) Determine la razón  $q_1/q_2$ . b) ¿Cuál son los signos de  $q_1$  y  $q_2$ ?

**Sección 23.7 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme**

44. Un electrón y un protón son colocados en reposo dentro de un campo eléctrico externo de 520 N/C. Calcule la rapidez de cada partícula después de 48 nanosegundos.
45. Un protón se acelera desde el reposo en un campo eléctrico uniforme de 640 N/C. Después de un tiempo, su rapidez es de  $1.2 \times 10^6$  m/s (no relativista ya que  $v$  es mucho menor que la rapidez de la luz). a) Determine la aceleración del protón. b) ¿Cuánto tarda el protón en alcanzar esa rapidez? c) ¿Qué distancia recorrerá en ese tiempo? d) ¿Cuál es su energía cinética en ese instante?
46. Considere un electrón el cual se coloca en reposo en un campo eléctrico uniforme. a) Si el electrón es acelerado hasta el 1% de la rapidez de la luz después de haber viajado 2 mm, ¿cuál es la intensidad del campo eléctrico? b) ¿Cuál es la rapidez del electrón después de haber viajado 4 mm desde el reposo?
47. Los electrones de un haz particular tienen cada uno una energía cinética de  $1.6 \times 10^{-17}$  J. ¿Cuál es la dirección y la magnitud del campo eléctrico que puede frenar estos electrones en una distancia de 10 cm?
48. Un electrón que se mueve con una velocidad inicial igual a  $8.6 \times 10^5$  m/s penetra a una región donde el campo eléctrico está dado por  $E = 4.1 \times 10^3$  N/C. a) Encuentre la aceleración del electrón. b) Determine el tiempo que toma el electrón en llegar al reposo después de entrar al campo. c) ¿Qué distancia recorre el electrón antes de llegar al reposo?
49. Un protón se proyecta en la dirección positiva de las  $x$  dentro de una región de campo eléctrico uniforme  $E = -6 \times 10^5$  N/C. El protón recorre 7 cm antes de llegar al reposo. Determine a) la aceleración del protón, b) su rapidez inicial y c) el tiempo que toma para llegar al reposo.
50. Un protón y un electrón están en reposo y en el mismo punto en un campo eléctrico de 370 N/C. ¿Cuán separados estarán después de  $1 \mu\text{s}$ ? (Ignore la atracción entre el protón y el electrón. Es decir, imagine que el experimento se realiza solamente con el protón y después se realiza sólo con el electrón.)
51. Un protón tiene una velocidad inicial de  $4.50 \times 10^5$  m/s en la dirección horizontal. Entra en un campo eléctrico de  $9.60 \times 10^3$  N/C dirigido verticalmente. Ignore cualquier efecto gravitacional y determine a) el tiempo que le toma al protón recorrer 5 cm horizontalmente b) el desplazamiento vertical del protón después de recorrer 5 cm horizontalmente y c) las componentes vertical y horizontal de la velocidad del protón después de recorrer 5 cm horizontalmente.

52. Un electrón se lanza con un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal con una rapidez de  $8.2 \times 10^5$  m/s, en una región con un campo eléctrico  $E = 390j$  N/C. Desprecie la gravedad y determine a) el tiempo que le toma al electrón regresar a su altura inicial, b) la máxima altura alcanzada por el electrón y c) su desplazamiento horizontal cuando alcanza su máxima altura.
53. Los protones son lanzados con una velocidad inicial dada por  $v_0 = 9.55 \times 10^3$  m/s dentro de una región donde el campo eléctrico uniforme presente es  $E = -720j$  N/C, como se muestra en la figura 23.34. Los protones chocan en un blanco que se encuentra a una distancia horizontal de 1.27 mm del punto donde los protones son lanzados. Determine a) los dos ángulos  $\theta$  de lanzamiento con que se dará en el blanco, b) el tiempo total de vuelo para cada una de estas trayectorias.

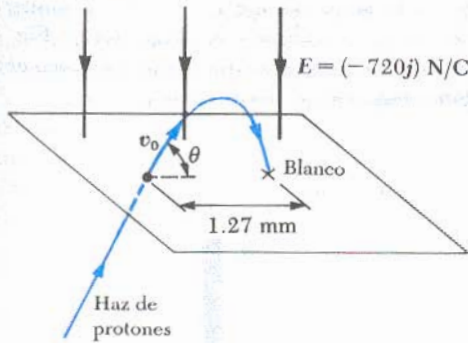


Figura 23.34 (Problema 53).

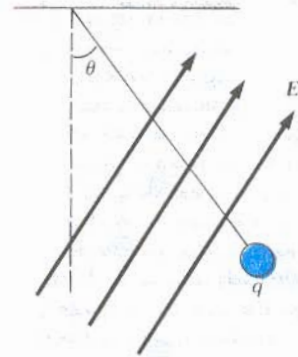


Figura 23.36 (Problema 55).

56. Dos pequeñas esferas cada una de masa 2g están suspendidas por cuerdas ligeras de 10 cm de longitud (Fig. 23.37). Un campo eléctrico uniforme se aplica en la dirección x. Si las esferas tienen cargas iguales de  $-5 \times 10^{-8}$  C y  $+5 \times 10^{-8}$  C, determine la intensidad del campo eléctrico, considerando que las dos esferas están en equilibrio cuando forman un ángulo  $\theta = 10^\circ$ .

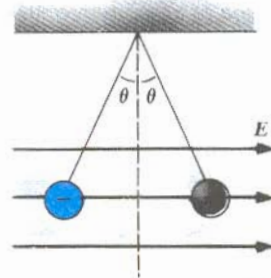


Figura 23.37 (Problema 56).

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

54. Una pequeña bola de plástico de 2 g se suspende de una cuerda de 20 cm de longitud en un campo eléctrico como se muestra en la figura 23.35. Si la bola está en equilibrio cuando la cuerda hace un ángulo  $15^\circ$  con la vertical como se indica, ¿cuál es la carga neta en la bola?
55. Una bola cargada de masa 1 g está suspendida de una cuerda ligera en presencia de un campo eléctrico uniforme como se muestra en la figura 23.36. Cuando  $E = (3i + 5j) \times 10^5$  N/C, la bola está en equilibrio con  $\theta = 37^\circ$ . Determine: a) la carga en la bola y b) la tensión en la cuerda.

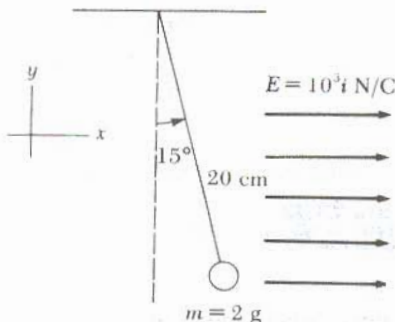


Figura 23.35 (Problema 54).

57. Dos pequeñas esferas de masa  $m$  están suspendidas por cuerdas de longitud  $l$  desde un punto en común. Una esfera tiene carga  $Q$ , y la otra tiene una carga  $2Q$ . Suponga que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que hacen las cuerdas con la vertical son pequeños. a) ¿Cuál es el valor de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ? b) Demuestre que la distancia  $r$  entre las esferas es

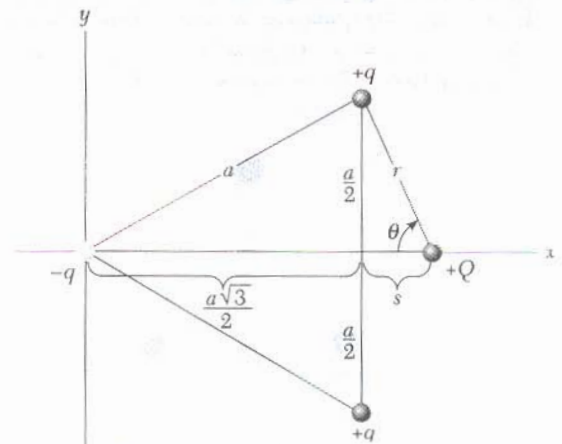


Figura 23.38 (Problema 58).

58. Tres cargas se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero como en la figura 23.38. a) Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico neto en el centro del triángulo. b) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre la carga  $-q$ .
59. Tres pequeñas bolas idénticas ( $m = 2\text{ g}$ ) están suspendidas desde un mismo punto por tres alambres no conductores de masa despreciable, cuya longitud es de 50 cm. En el equilibrio las tres bolas forman un triángulo equilátero cuyo lado es de 30 cm. ¿Cuál es la carga  $q$  que tiene cada una de las bolas?
60. Dos pequeñas esferas de carga  $Q$  se suspenden de un punto en común a través de cuerdas de longitud  $\ell$ . Una de las esferas tiene una masa  $m$ ; mientras la otra tiene una de  $2m$ . Suponga que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que hacen con la vertical son pequeños. a) ¿Cuáles son valores de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ? b) Demuestre que la distancia  $r$  entre las esferas es

$$r = \left( \frac{3kQ^2\ell}{2mg} \right)^{1/3}$$

61. Considere el dipolo eléctrico que se aprecia en la figura 23.39. Demuestre que el campo eléctrico en un punto distante a lo largo del eje  $x$  está dado por  $E_x \approx 2kp/x^3$ , donde  $p = 2qa$  es el momento dipolar.

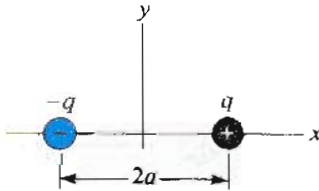


Figura 23.39 (Problema 61).

62. Dos cargas iguales  $q$  positivas están localizadas sobre el eje  $x$  en  $x = a$  y  $x = -a$ . a) Demuestre que el campo en un punto sobre el eje  $y$  está en la dirección de  $y$  y está dado por  $E_y = 2kqy/(y^2 + a^2)^{3/2}$ . b) Determine el campo en un punto sobre el eje  $y$  para  $y \gg a$ , y explique su resultado. c) Demuestre que el campo es máximo en  $y = \pm a/\sqrt{2}$ . (Sugerencia: cuando  $E_y$  es máximo,  $dE_y/dy = 0$ .)
63. Tres cargas de igual magnitud  $q$  residen en las esquinas de un triángulo equilátero de lado  $a$ . Dos de las cargas son negativas y la otra es positiva, como se muestran en la figura 23.40. a) Encuentre la magnitud y la dirección

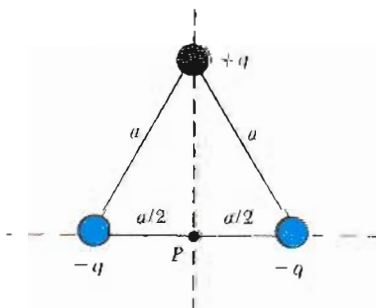


Figura 23.40 (Problema 63).

del campo eléctrico en el punto  $P$  que se encuentra a la mitad de la distancia entre las cargas negativas, en términos de  $k$ ,  $q$  y  $a$ . b) ¿Dónde debe ser colocada una carga de  $-4q$  para que cualquier carga colocada en el punto  $P$  no experimente una fuerza neta ( $F_e = 0$ )? En b) tome la distancia entre el punto  $P$  y la carga  $+q$  como un metro.

64. Dos anillos de radio  $R$  tienen orientados sus ejes a lo largo de una misma línea y están separados una distancia  $2R$ . Un anillo tiene una densidad lineal de carga  $\lambda$  y el otro tiene una densidad lineal de carga  $-\lambda$ . Encuentre a) el campo eléctrico en un punto  $P_1$  a la mitad de los dos anillos y sobre el eje común y b) el campo eléctrico en un punto  $P_2$  sobre el eje a una distancia  $R$  hacia afuera del anillo cargado negativamente.
65. Una barra de longitud  $\ell$  con una carga por unidad de longitud uniforme  $\lambda$  se coloca a una distancia  $d$  del origen a lo largo del eje  $x$ . Una barra similar con la misma carga se coloca a lo largo del  $y$  (Fig. 23.41). Determine la intensidad del campo eléctrico neto en el origen. (Sugerencia: véase ejemplo 23.8.)

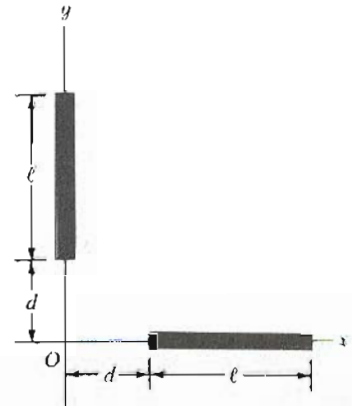


Figura 23.41 (Problema 65).

66. Una barra cargada uniformemente con una carga por unidad de longitud  $\lambda$  está doblada formando un arco circular de radio  $R$  como se muestra en la figura 23.42. El arco sustenta un ángulo  $2\theta$  del centro del círculo. Demuestre que el campo eléctrico en el centro del círculo está en la dirección del eje  $y$  y está dado por  $E = (2k\lambda \sin \theta)/R$ .

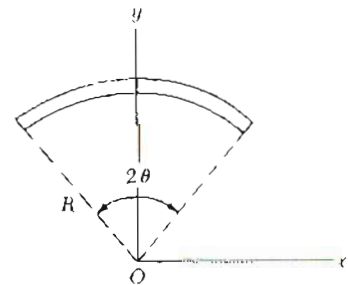


Figura 23.42 (Problema 66).

67. El aire puede romperse (pierde su calidad de aislante) y producirse una chispa como resultado si la intensidad del campo eléctrico es incrementada hasta  $3 \times 10^6\text{ N/C}$ . (Esta intensidad de campo también se expresa como

$3 \times 10^6 \text{ V/m}$ .) ¿Qué aceleración experimentará un electrón en tal campo? Si el electrón inicialmente está en reposo, a qué distancia habrá adquirido una rapidez igual al 10 % de la rapidez de la luz?

68. Una línea de carga de longitud  $\ell$  y orientada a lo largo de eje  $x$  como en la figura 23.14 tiene una carga por unidad de longitud que varía como  $\lambda = \lambda_0(x - d)/d$ , donde  $d$  es la distancia de la barra al origen (punto  $P$  en la figura) y  $\lambda_0$  es una constante. Encuentre el campo eléctrico en el origen. (Sugerencia: un elemento infinitesimal tiene una carga  $dq = \lambda dx$ , pero observe que  $\lambda$  no es una constante.)

69. Una barra delgada de longitud  $\ell$  y carga por unidad de longitud uniforme  $\lambda$  se encuentra a lo largo del eje  $x$  como se muestra en la figura 23.43. a) Demuestre que el campo eléctrico en el punto  $P$ , a una distancia  $y$  de la barra a lo largo de la bisectriz perpendicular, no tiene componente en  $x$  y está dada por la expresión  $E = 2k\lambda \sin \theta_0/y$ . b) Utilizando el resultado de a), demuestre que el campo de una barra de longitud infinita está dada por  $E = 2k\lambda/y$ . (Sugerencia: primero calcule el campo en  $P$  debido a un elemento de longitud  $dx$ , el cual tiene una carga  $\lambda dx$ . Entonces se hace un cambio de variable de  $x$  a  $\theta$  utilizando el hecho de que  $x = y \tan \theta$  y que  $dx = y \sec^2 \theta d\theta$  y se integra sobre  $\theta$ .)

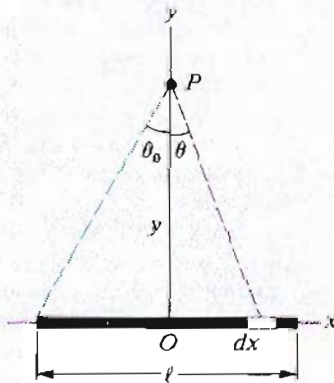


Figura 23.43 (Problema 69).

70. Una barra aislante delgada se dobla para formar un semicírculo de radio  $r$ . La barra tiene una densidad de carga no uniforme  $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$ . Donde  $\lambda_0$  es una constante y  $\theta$  es el ángulo medido desde cualquiera de los extremos de la barra utilizando el centro del semicírculo como vértice. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en el centro del semicírculo.

71. Un conjunto de ocho cargas puntuales de magnitud  $+q$ , se colocan sobre las esquinas de un cubo de lados  $s$  como se muestra en la figura 23.44. a) Determine las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la fuerza resultante ejercida sobre la carga localizada en el punto  $A$  por las otras cargas. b) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza resultante?

72. Considere la distribución de carga que se observa en la figura 23.44. a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico en el centro de cualquier cara del cubo tiene un valor de  $2.18 kq/s^2$ . b) ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en el centro de la cara superior del cubo?

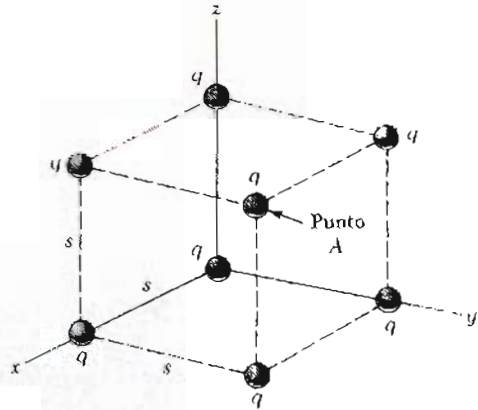


Figura 23.44 (Problemas 71 y 72).

73. Tres cargas puntuales  $q, -2q$  y  $q$  están localizadas a lo largo del eje  $x$  como se muestra en la figura 23.45. Demuestre que el campo eléctrico en un punto distante  $P$  ( $y \gg a$ ) a lo largo del eje  $y$  está dado por

$$E = -k \frac{3qa^2}{y^4} j$$

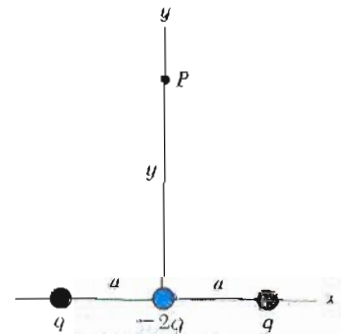


Figura 23.45 (Problema 73).

Esta distribución de carga, la cual es esencialmente la de dos dipolos eléctricos, se conoce como un *cuadropolo eléctrico*. Note que  $E$  varía como  $r^{-4}$  para un cuadropolo, comparado con la variación de  $r^{-3}$  para un dipolo y  $r^{-2}$  para un monopolo (una sola partícula).

74. Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, como en la figura 23.46, donde  $\theta$  es pequeño. El momento del dipolo es  $p = 2qa$  y la cantidad de movimiento lineal del dipolo es  $I$ . Si el dipolo se suelta en esa posición, demuestre que éste tendrá un movimiento armónico simple con frecuencia dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{pE}{I}}$$

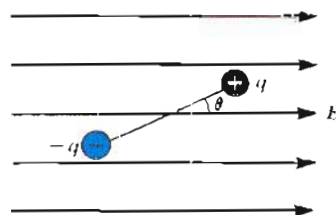


Figura 23.46 (Problema 74)



75. Una partícula cargada *negativamente*  $-q$  se coloca en el centro de un anillo cargado uniformemente, donde el anillo tiene una carga total positiva  $Q$  como en el ejemplo 23.9. La partícula, confinada a moverse en el eje  $x$ , se desplaza una pequeña distancia  $x$  a lo largo del eje (donde  $x \ll a$ ) y se suelta. Demuestre que la partícula oscilará con un movimiento armónico simple a lo largo de  $x$  con una frecuencia dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{kqQ}{ma^3} \right)^{1/2}$$

76. El *osciloscopio de rayos catódicos* opera con el siguiente principio. Un electrón con carga  $-e$  y masa  $m$  se lanza con una rapidez  $v_0$  en ángulo recto con el campo eléctrico (Fig. 23.47) y es deflectado como se muestra. Una pantalla se coloca a una distancia  $L$  de las placas cargadas. Ignorando los efectos de la gravedad, a) demuestre que la ecuación de la trayectoria seguida por la carga dentro del campo está dada por  $y = (eE/2mv_0^2)x^2$ . b) Si  $L \gg d$ , demuestre que la razón carga-masa está dada por  $e/m = hv_0^2/ELd$ . (Este problema sugiere cómo se miden  $e/m$  para otras cargas.)

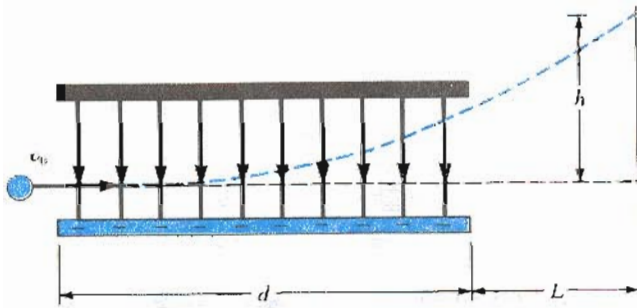


Figura 23.47 (Problema 76).

77. Considere una lámina infinita con densidad uniforme de carga  $\sigma$  situada en el plano  $yz$ . Encuentre el campo eléctrico en un punto  $P$  a lo largo del eje  $x$  a una distancia  $x$  del origen. (*Sugerencia*: utilice un anillo de carga como

elemento diferencial. Cambie todas las variables a términos de  $\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo indicado en la figura 23.15. Sume las contribuciones de todos los anillos, evaluando la integral de  $E$  desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi/2$ .)

78. Una distribución de carga con densidad de carga lineal  $\lambda$  y radio  $r$ , es un semicírculo orientado en el plano  $xz$  con su bisectriz coincidiendo con el eje negativo de las  $x$  y con su centro en el origen. Demuestre que el campo eléctrico a una distancia  $y$  del origen a lo largo del eje  $y$  es

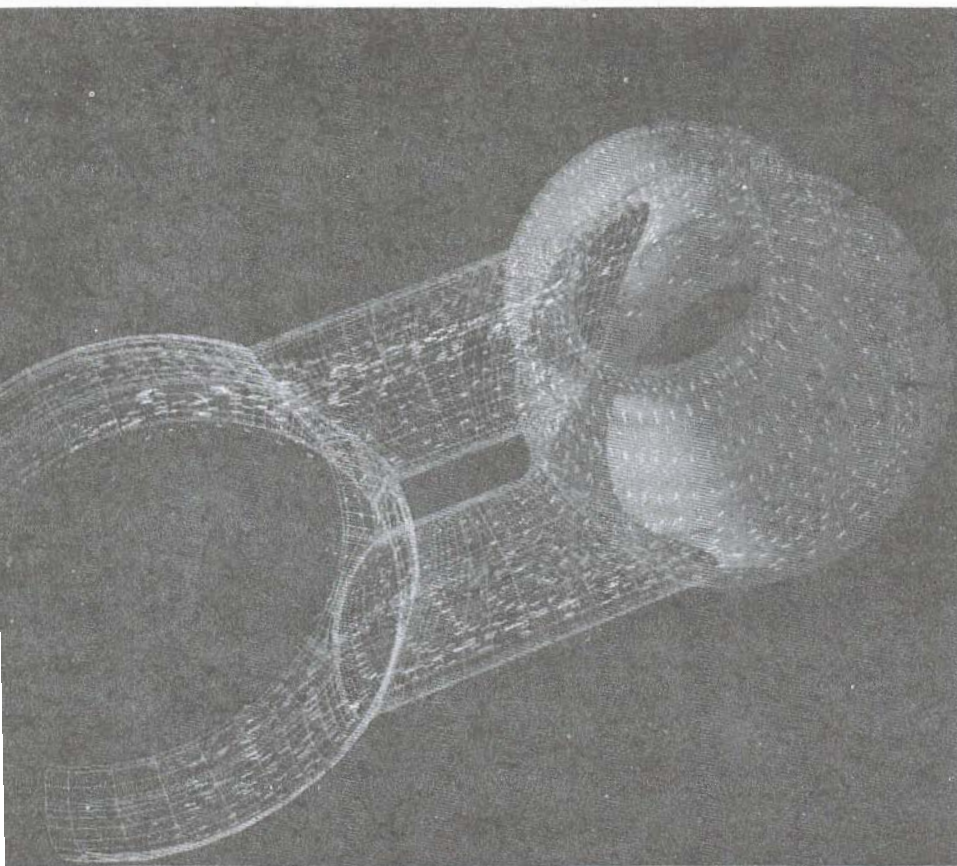
$$E = \frac{k\lambda}{(r^2 + y^2)^{3/2}} \left( 2i + \pi \frac{y}{r} j \right)$$

### PROBLEMAS DE CALCULADORA/COMPUTADORA

79. Una carga continua se distribuye a lo largo de una barra colocada a lo largo del eje  $x$  como en la figura 23.14. La carga total sobre la barra es  $Q = +1.6 \times 10^{-10}$  C,  $d = 1.0$  m y  $\ell = 2.0$  m. Estime el campo eléctrico en  $x = 0$  aproximando la barra a ser: a) una carga puntual en 2.0 m, b) dos cargas puntuales (cada una de  $8 \times 10^{-10}$  C) en  $x = 1.5$  m y  $x = 2.5$  m y c) cuatro cargas puntuales (cada una de  $4 \times 10^{-10}$  C) en  $x = 1.25$  m,  $x = 1.75$  m,  $x = 2.25$  m y  $x = 2.75$  m. d) Escriba un programa para que pueda extender los cálculos hasta 256 cargas puntuales igualmente espaciadas, y compare el resultado con el obtenido por la ecuación exacta, ecuación 23.15.
80. Considere un anillo de carga uniforme colocado en el plano  $yz$  como en la figura 23.15a, donde  $Q = +16 \times 10^{-10}$ , y un radio  $a = 1$  m. Estime el campo eléctrico a lo largo del eje  $x$  en  $x = 3$  m aproximando el anillo a ser: a) una carga puntual en  $x = 0$ , b) dos cargas puntuales (cada una de  $8 \times 10^{-10}$  C) diametralmente opuestas una de la otra sobre el anillo y c) cuatro cargas puntuales (cada una de  $4 \times 10^{-10}$  C) simétricamente espaciadas en el anillo. d) Escriba un programa que le permita extender los cálculos hasta 64 cargas puntuales igualmente espaciadas en el anillo y compare el resultado con el obtenido con la expresión exacta, ecuación 23.16.

# 24

## Ley de Gauss



*Figura generada por computadora que muestra las superficies de un múltiple en el espacio de un espólin principal de una máquina —precisamente uno de los tipos de superficies que aparecen en problemas científicos y matemáticos. Las superficies gaussianas descritas en este capítulo son superficies cerradas hipotéticas, utilizadas para resolver muchos problemas en electrostática. (© Dale E. Boyer, Science Source/Photo Researchers)*

**E**n el capítulo anterior se mostró cómo calcular el campo eléctrico de una distribución dada de carga mediante la ley de Coulomb. En este capítulo se describe un procedimiento alternativo para calcular campos eléctricos conocido como *ley de Gauss*. Su formulación se basa en el hecho de que la fuerza electrostática fundamental entre dos cargas puntuales es una ley inversa del cuadrado. Aun cuando la ley de Gauss es consecuencia de la ley de Coulomb, es mucho más conveniente para cálculos de campos eléctricos de distribuciones de carga altamente simétricos. Además, la ley de Gauss sirve como guía para comprender problemas más complicados.

### 24.1 FLUJO ELÉCTRICO

El concepto de líneas de campo fue descrito cualitativamente en el capítulo anterior. Se usará el concepto de flujo eléctrico para dar a esta idea una base cuantitativa. *Flujo eléctrico es la medida del número de líneas de campo que atraviesan cierta superficie.* Cuando la superficie que está siendo atravesada

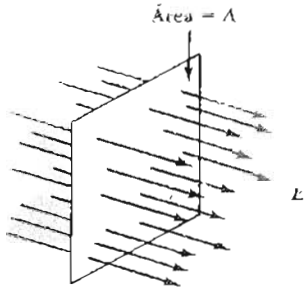


Figura 24.1 Líneas de campo eléctrico uniforme que penetra un plano de área  $A$  perpendicular al campo. El flujo eléctrico  $\Phi$ , a través de esta área es igual a  $EA$ .

encierra alguna carga neta, el número total de líneas que pasan a través de tal superficie es proporcional a la carga neta que está en el interior de ella. El número de líneas que se cuentan es independiente de la forma de la superficie que encierre a la carga. Esencialmente, éste es un enunciado de la ley de Gauss que se describe en la siguiente sección.

Primero consideremos un campo eléctrico uniforme tanto en magnitud como en dirección, como se muestra en la figura 24.1. Las líneas de campo eléctrico penetran una superficie rectangular de área  $A$ , la cual es perpendicular al campo. Recuérdese que el número de líneas por unidad de área es proporcional a la magnitud del campo eléctrico. Por lo tanto, el número de líneas que penetran la superficie de área  $A$  es proporcional al producto  $EA$ . El producto de la intensidad del campo eléctrico  $E$  y el área superficial  $A$  perpendicular al campo se conoce como **flujo eléctrico**,  $\Phi$ :

$$\Phi = EA \tag{24.1}$$

De las unidades para  $E$  y  $A$  en el SI, se ve que el flujo eléctrico tiene unidades de  $N \cdot m^2/C$ .

Si la superficie en consideración no es perpendicular al campo, el número de líneas (o el flujo) que pasan a través de ella debe ser menor que el que produce la ecuación 24.1. Esto puede entenderse con facilidad considerando la figura 24.2, donde la normal a la superficie  $A$  forma un ángulo  $\theta$  con el campo eléctrico uniforme. Nótese que el número de líneas que cruza esta área es igual al número que cruza el área proyectada  $A'$ , la cual es perpendicular al campo. A partir de la figura 24.2 se ve que las dos áreas están relacionadas por  $A' = A \cos \theta$ . Como el flujo a través del área  $A$  es igual al flujo a través de  $A'$ , se concluye que el flujo deseado está dado por

$$\Phi = EA \cos \theta \tag{24.2}$$

Con base en este resultado, se ve que el flujo que pasa a través de una superficie de área fija tiene un valor máximo  $EA$ , cuando la superficie es perpendicular al campo (o cuando la normal a la superficie es paralela al campo, es decir,  $\theta = 0^\circ$ ); el flujo es cero cuando la superficie es paralela al campo (o cuando la normal a la superficie es perpendicular al campo, es decir,  $\theta = 90^\circ$ ).

En situaciones más generales, el campo eléctrico puede variar sobre la superficie en cuestión. Por lo tanto, la definición de flujo dada por la ecuación 24.2 tiene significado sobre un pequeño elemento de área. Considérese una superficie general dividida en un gran número de pequeños elementos, cada uno de área  $\Delta A$ . Puede despreciarse la variación del campo eléctrico sobre el elemento, si éste es lo suficientemente pequeño. Es conveniente definir el vector  $\Delta A$ , cuya magnitud representa el área del  $i$ -ésimo elemento y cuya dirección quede *definida como siendo perpendicular* a la superficie, según se ve en la figura 24.3. El flujo eléctrico  $\Delta\Phi_i$  a través de este pequeño elemento está dado por

$$\Delta\Phi_i = E_i \Delta A_i \cos \theta = E_i \cdot \Delta A_i$$

donde se ha utilizado la definición del producto escalar de dos vectores ( $A \cdot B = AB \cos \theta$ ). Sumando la contribución de todos los elementos, se obtiene el flujo total a través de la superficie.<sup>1</sup> Si el área de cada uno de los elementos se hace que

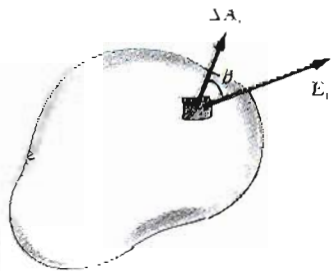


Figura 24.3 Pequeño elemento de superficie de área  $\Delta A_i$ . El campo eléctrico hace un ángulo  $\theta$  con la normal a la superficie (la dirección de  $\Delta A_i$ ) y el flujo a través del elemento es igual a  $E_i \Delta A_i \cos \theta$ .

<sup>1</sup> Es importante notar que al trazar las líneas de campo se tienen imprecisiones, ya que una pequeña área (dependiendo de su localización) puede suceder que tenga muchas o pocas líneas penetrando. Por esta razón, es necesario recordar siempre que la definición básica del flujo eléctrico es  $\int E \cdot dA$ . El uso de las líneas es sólo para visualizar mejor el concepto.

tienda a cero, entonces el número de elementos tiende al infinito y la suma se sustituye por una integral. En consecuencia, la *definición general de flujo eléctrico* es

$$\Phi \equiv \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum E_i \cdot \Delta A_i = \int_{\text{superficie}} E \cdot dA \quad (24.3)$$

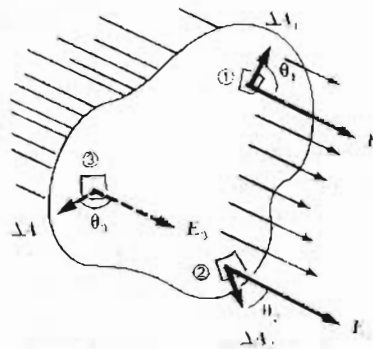
### Definición de flujo eléctrico

La ecuación 24.3 es una integral de superficie, la cual debe evaluarse sobre la superficie hipotética en cuestión. En general, el valor de  $\Phi$  depende tanto del patrón del campo como de la superficie especificada.

Generalmente habrá interés en evaluar el flujo que pasa por una *superficie cerrada*. (Una superficie cerrada se define como una superficie que divide el espacio en una región interna y otra externa, así que uno no puede moverse de una región a la otra sin atravesar la superficie. La superficie de una esfera, por ejemplo, es una superficie cerrada.) Considérese la superficie cerrada de la figura 24.4. Nótese que los vectores  $\Delta A_i$  apuntan en direcciones diferentes para los diversos elementos de la superficie. En cada punto, estos vectores son *normales* a la superficie y por convención siempre apuntan hacia *afuera*. En los elementos indicados como ① y ②,  $E$  está dirigido hacia afuera y  $\theta < 90^\circ$ ; por consiguiente, el flujo  $\Delta\Phi = E \cdot \Delta A$  que pasa a través de estos elementos es positivo. Por otra parte, para los elementos como ③ donde las líneas de campo están dirigidas hacia la superficie,  $\theta > 90^\circ$ , por lo que el flujo se vuelve negativo con el  $\cos \theta$ . El flujo total o neto que pasa a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas que pasan a través de ella (donde por número neto se entiende *el número de líneas que salen de la superficie menos el número de líneas que entran a ella*). Si se tienen más líneas salientes que entrantes, el flujo neto es positivo. Si entran más líneas que las que salen de la superficie, el flujo neto es negativo. Si se utiliza el símbolo  $\oint$  para representar una integral sobre una superficie cerrada, se puede escribir el flujo neto  $\Phi_c$ , a través de una superficie cerrada

$$\Phi_c = \oint E \cdot dA = \oint E_n dA \quad (24.4)$$

donde  $E_n$  representa la componente del campo eléctrico perpendicular, o normal, a la superficie, y el subíndice  $c$  denota una superficie cerrada. Evaluar el flujo neto que pasa a través de una superficie cerrada podría ser muy incómodo; sin embargo, si el campo es normal a la superficie en cada punto, y constante en magnitud, el cálculo es directo. El siguiente ejemplo muestra este hecho.



**Figura 24.4** Superficie cerrada en un campo eléctrico. Los vectores de área  $\Delta A_i$  son, por convención, normales a la superficie y apuntan hacia afuera. El flujo a través de un elemento de área puede ser positivo (elemento ① y ②) o negativo (elemento ③).

**EJEMPLO 24.1 Flujo a través de un cubo**

Considérese un campo eléctrico uniforme  $E$  orientado en la dirección  $x$ . Determinése el flujo eléctrico neto a través de la superficie de un cubo de arista  $\ell$  orientado como se muestra en la figura 24.5.

**Solución** El flujo neto puede evaluarse sumando los flujos a través de cada una de las caras del cubo. Primero, observe que el flujo a través de cuatro de las caras es cero, ya que  $E$  es perpendicular a  $dA$  en esas caras. En particular, la orientación de  $dA$  es perpendicular a  $E$  para las dos caras marcadas con ③ y ④ en la figura 24.5. Por lo tanto,  $\theta = 90^\circ$ , así que  $E \cdot dA = E dA \cos 90^\circ = 0$ . Los flujos que pasan a través de los planos paralelos al plano  $yz$  también son cero por la misma razón.

Ahora considérense las caras marcadas como ① y ②. El flujo neto a través de estas caras está dado por

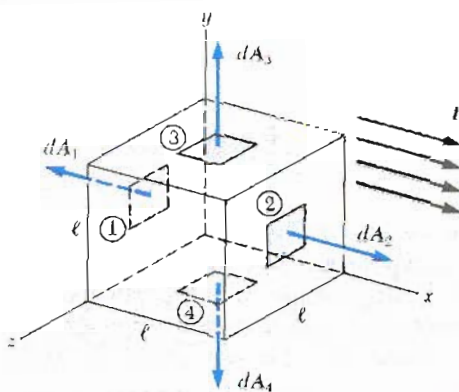
$$\Phi_c = \int_1 E \cdot dA + \int_2 E \cdot dA$$

Para la cara marcada con ①,  $E$  es constante y hacia adentro, en tanto que  $dA$  es hacia afuera ( $\theta = 180^\circ$ ), de modo que el flujo a través de esta cara es

$$\int_1 E \cdot dA = \int_1 E dA \cos 180^\circ = -E \int_1 dA$$

$$= -EA = -E\ell^2$$

ya que el área de cada cara es  $A = \ell^2$ .



**Figura 24.5** (Ejemplo 24.1) Una superficie hipotética en forma de cubo en un campo eléctrico uniforme paralelo al eje  $x$ . El flujo neto a través de la superficie es cero.

Del mismo modo, para la cara marcada con ②,  $E$  es constante y hacia afuera, y está en la misma dirección de  $dA$  ( $\theta = 0^\circ$ ), así que el flujo a través de esta cara es

$$\int_2 E \cdot dA = \int_2 E dA \cos 0^\circ = E \int_2 dA = +EA = E\ell^2$$

Por lo tanto, el flujo neto sobre todas las caras es cero, ya que

$$\Phi_c = -E\ell^2 + E\ell^2 = 0$$

**24.2 LEY DE GAUSS**

En esta sección se describe una relación general entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada (conocida también como *superficie gaussiana*) y la carga neta *encerrada* por esa superficie. Esta relación, conocida como ley de Gauss, es de fundamental importancia en el estudio de los campos eléctricos.

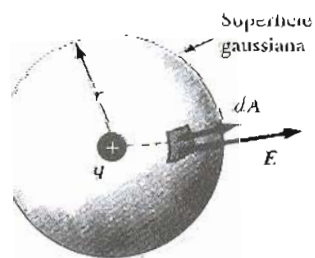
Primero, consideremos un carga puntual  $q$  localizada en el centro de una esfera de radio  $r$  como en la figura 24.6. De la ley de Coulomb se sabe que la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie de la esfera es  $E = kq/r^2$ . Además, las líneas de campo son radiales hacia afuera, y son perpendiculares (o normales) a la superficie en cada punto. Esto es, en cada punto,  $E$  es paralelo al vector  $\Delta A_i$  que representa elemento local de área  $\Delta A_i$ . Por lo tanto,

$$E \cdot \Delta A_i = E_n \Delta A_i = E \Delta A_i$$

y de la ecuación 24.4 se encuentra que el flujo neto a través de la superficie gaussiana está dada por

$$\Phi_c = \oint E_n dA = \oint E dA = E \oint dA$$

donde  $E$  es constante sobre la superficie y dado por  $E = kq/r^2$ . Como para la superficie esférica gaussiana,  $\oint dA = A = 4\pi r^2$  (área de la superficie de la esfera).



**Figura 24.6** Superficie esférica de radio  $r$  circundando una carga puntual  $q$ . Cuando la carga está en el centro de la esfera, el campo eléctrico es normal a la superficie y constante en magnitud en cualquier punto sobre la superficie.

Así pues, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_c = \frac{kq}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi kq$$

Recordando que  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , se puede escribir en la forma:

$$\Phi_c = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (24.5)$$

Nótese que este resultado, el cual es independiente de  $r$ , afirma que el flujo neto a través de una superficie gaussiana esférica es proporcional a la carga  $q$  que está encerrada dentro de la superficie. El hecho de que el flujo es independiente del radio, es consecuencia de la dependencia en términos del recíproco del cuadrado para el campo eléctrico dada por la ley de Coulomb. Es decir,  $E$  varía proporcionalmente con  $1/r^2$ , pero el área de la esfera varía proporcionalmente con  $r^2$ . El efecto de la combinación produce que el flujo sea independiente de  $r$ .

Considérense ahora varias superficies cerradas que rodeen una carga  $q$ , como se muestra en la figura 24.7. La superficie  $S_1$  es esférica, en tanto que las superficies  $S_2$  y  $S_3$  no son esféricas. El flujo que pasa a través de la superficie  $S_1$  tiene el valor  $q/\epsilon_0$ . Según se analizó en la sección anterior, el flujo es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que pasa a través de esa superficie. La construcción de la figura 24.7 indica que el número de líneas a través de la superficie  $S_1$  es igual al número de líneas de campo eléctrico a través de las superficies no esféricas  $S_2$  y  $S_3$ . Por lo tanto, es razonable concluir que el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es independiente de la forma de esa superficie. De hecho, *el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodee a una carga puntual  $q$  está dada por  $q/\epsilon_0$ .*

Considérese ahora una carga puntual ubicada fuera de una superficie cerrada de forma arbitraria, como se ve en la figura 24.8. Como puede verse en esta construcción, algunas líneas del campo eléctrico entran a la superficie y otras salen de ella. Sin embargo, *el número de líneas de campo eléctrico que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen de ella.* Por lo tanto, se concluye que *el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada que no rodee carga alguna es cero.* Si se aplica este resultado al ejemplo 24.1, puede verse con facilidad que el flujo a través del cubo es cero, ya que se asume que no hay carga alguna en su interior.

Ahora se extenderán estos argumentos al caso generalizado de muchas cargas puntuales, o bien a una distribución continua de carga. Se hará uso del **principio de superposición**, el cual afirma que *el campo eléctrico debido a muchas cargas es la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por las cargas.* Es decir, es posible expresar el flujo a través de cualquier superficie cerrada como

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) \cdot d\mathbf{A}$$

donde  $E$  es el campo eléctrico total en cualquier punto de la superficie y  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  son los campos producidos por cada carga en ese punto. Considérese el sistema de cargas que se observa en la figura 24.9. La superficie  $S$  sólo rodea la carga  $q_1$ ; de donde el flujo neto a través de  $S$  es de  $q_1/\epsilon_0$ . El flujo neto debido a las cargas que están en su exterior es cero, ya que cada línea que entra en ella en un punto dado sale en otro. La superficie  $S'$  rodea a las cargas  $q_2$  y  $q_3$ , por lo que el flujo neto a través de  $S'$  es  $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$ . Finalmente, el flujo neto a través de la  $S''$  es cero, ya que no existe carga alguna dentro de ella. Es decir, *todas las líneas que entran en  $S''$  en un punto salen de  $S''$  en otro.*

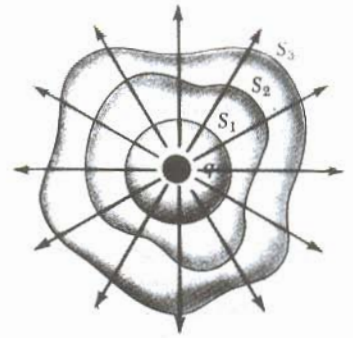


Figura 24.7 Superficies cerradas de varias formas circundando una carga  $q$ . Obsérvese que el flujo neto a través de cada superficie es el mismo.

El flujo neto a través de una superficie cerrada es cero si no existe carga en su interior

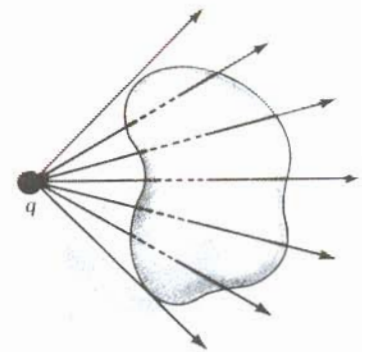
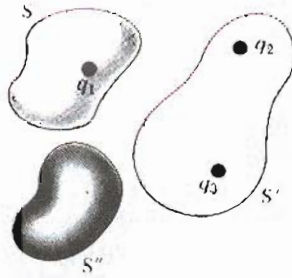


Figura 24.8 Carga puntual localizada afuera de una superficie cerrada. En estos casos, obsérvese que el número de líneas que entran en la superficie es igual al número que salen de ella.



**Figura 24.9** El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada depende sólo de la carga que se encuentra *dentro* de la superficie. El flujo neto a través de la superficie S es  $q_1/\epsilon_0$ , el flujo neto a través de la superficie S' es  $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$  y el flujo neto a través de la superficie S'' es cero.

La **ley de Gauss**, la cual es la generalización de la discusión anterior, establece que el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada está dada por

$$\Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \tag{24.6}$$

donde  $q_{int}$  representa la carga neta encerrada en el interior de la superficie gaussiana y  $\mathbf{E}$  representa el campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie gaussiana. En palabras

La **ley de Gauss** establece que el flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie gaussiana cerrada es igual a la carga neta que se encuentra dentro de ella, dividida por  $\epsilon_0$ .

**Ley de Gauss**

Una prueba formal de la ley de Gauss se presenta en la sección 24.6. Cuando utilice la ecuación 24.6, debe observarse que aun cuando la carga  $q_{int}$  es la carga neta dentro de la superficie gaussiana, el  $\mathbf{E}$  que aparece en la ley de Gauss representa el *campo eléctrico total*, el cual incluye la contribución de las cargas tanto internas como externas a la superficie gaussiana. Con frecuencia se desprecia o se pasa por alto este hecho.

En principio la ley de Gauss se puede utilizar para el cálculo del campo eléctrico de un sistema de partículas o de una distribución continua de carga. Sin embargo, en la práctica, *la técnica sólo se utiliza en un número limitado de situaciones donde existe un alto grado de simetría*. Como se verá en la siguiente sección, *la ley de Gauss puede aplicarse para evaluar el campo eléctrico en distribuciones de carga que tengan simetría esférica, cilíndrica o plana*. Si uno elige con cuidado la superficie gaussiana que rodee a la distribución de carga, la integral en la ecuación 24.6 se evaluará con facilidad. También podrá notar que una superficie gaussiana es una superficie matemática y no necesariamente coincide con una superficie física real.

**24.3 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS A AISLADORES CARGADOS**

En esta sección se presentan algunos ejemplos de cómo utilizar la ley de Gauss para calcular  $\mathbf{E}$  en una distribución de carga dada. Es importante reconocer que *la ley de Gauss sólo se aplica cuando existe un alto grado de simetría en la distribución de carga, como en el caso de una esfera, cilindros largos y láminas planas uniformemente cargadas*. En tales casos, es posible determinar una superficie gaussiana simple sobre la cual se evalúa con facilidad la integral de superficie dada por la ecuación 24.6.

La ley de Gauss se utiliza para calcular  $\mathbf{E}$  cuando la distribución de carga tiene simetría

Siempre debe elegirse la superficie de modo que tenga la misma simetría que la correspondiente a la distribución de carga.

Los siguientes ejemplos podrán aclarar este procedimiento.

**EJEMPLO 24.2** El campo eléctrico debido a una carga puntual

A partir de la ley de Gauss, calcúlese el campo eléctrico debido a una carga puntual aislada  $q$  y demuéstrase que la ley de Coulomb se deduce a partir de este resultado.

**Solución** En este caso se elige una superficie esférica de radio  $r$  y con centro en la carga puntual, como en la figura 24.10. El campo eléctrico de una carga puntual positiva es radial, hacia afuera y simétrico, por lo tanto, es normal a la superficie en todo punto. Es decir,  $E$  es paralelo a  $dA$  en cada punto, y en consecuencia  $E \cdot dA = E dA$  y por la ley de Gauss se obtiene

$$\Phi_c = \oint E \cdot dA = \oint E dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Por simetría,  $E$  es constante en todo punto sobre la superficie, y por consiguiente se puede extraer de la integral. Entonces,

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

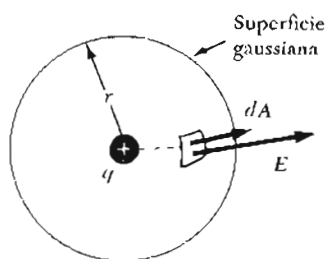
donde se ha aplicado el hecho de que el área de una esfera es  $4\pi r^2$ . Por lo tanto la magnitud del campo a una distancia  $r$  de la carga  $q$  es

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k \frac{q}{r^2}$$

Si se coloca una segunda carga puntual  $q_0$ , en un punto donde el campo es  $E$ , la fuerza electrostática sobre esta carga tiene una magnitud dada por

$$F = q_0 E = k \frac{qq_0}{r^2}$$

Naturalmente, ésta es la ley de Coulomb. Observe que este ejemplo es lógicamente circular. Esto, sin embargo, demuestra la equivalencia de la ley de Coulomb y la ley de Gauss.



**Figura 24.10** (Ejemplo 24.2) La carga  $q$  está en el centro de una superficie esférica gaussiana, y  $E$  es paralelo a  $dA$  en cualquier punto sobre la superficie.

**EJEMPLO 24.3** Distribución de carga esféricamente simétrica □

Una esfera aislante de radio  $a$  tiene una densidad uniforme de carga  $\rho$  y una carga total positiva  $Q$  (Fig. 24.11). a) Calcúlese la intensidad del campo eléctrico en un punto fuera de la esfera, es decir, para  $r > a$ .

**Solución** Como la distribución de carga es esféricamente simétrica, una vez más se selecciona una superficie gaussiana esférica de radio  $r$ , concéntrica con la esfera dada, como en la figura 24.11a. Siguiendo la misma línea de razonamiento que en el ejemplo 24.2, se encuentra que

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } r > a) \quad (24.7)$$

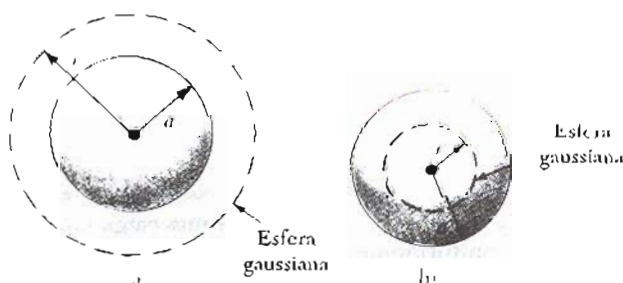
observe que este resultado es idéntico al obtenido para una carga puntual. Por lo tanto, se concluye que, para una esfera uniformemente cargada, el campo eléctrico en una región externa a ella es equivalente a la de una carga puntual localizada en el centro de la esfera.

b) Determinése la intensidad del campo eléctrico en un punto dentro de la esfera, es decir, para  $r < a$ .

**Solución** En este caso seleccionaremos una superficie gaussiana esférica con radio  $r < a$ , concéntrica con la distribución de carga (Fig. 24.11b). Al aplicar la ley de Gauss a esta situación, es importante reconocer que la carga  $q_{\text{int}}$  que se encuentra dentro del volumen  $V'$  es una cantidad menor que la carga total  $Q$ . Para calcular la carga  $q_{\text{int}}$  se aplica el hecho de  $q_{\text{int}} = \rho V'$  donde  $\rho$  es la carga por unidad de volumen y  $V'$  es el volumen encerrado por la superficie gaussiana, dado por  $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$  para una esfera. Por lo tanto,

$$q_{\text{int}} = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Así como en el ejemplo 24.2, el campo eléctrico es constante en magnitud en cualquier punto sobre la superficie gaus-



**Figura 24.11** (Ejemplo 24.3) Una esfera aislante uniformemente cargada de radio  $a$  y carga total  $Q$ . a) El campo en un punto exterior a la esfera es  $kQ/r^2$ . b) El campo dentro de la esfera es debido sólo a la carga que se encuentra dentro de la superficie gaussiana y está dado por  $(kQ/a^3)r$ .



siana y es normal a la superficie en cada punto. Entonces, por la ley de Gauss en la región  $r < a$  se obtiene

$$\oint E \, dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Al despejar  $E$  se obtiene

$$E = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Ya que por definición  $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi a^3$  se puede escribir

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{kQ}{a^3} r \quad (\text{para } r < a) \quad (24.8)$$

Obsérvese que este resultado para  $E$  difiere del obtenido en el inciso a). Además, muestra que  $E \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ , como podría haberse intuido con base en la simetría esférica de la distribución de carga. Por lo tanto, este resultado afortunadamente elimina la singularidad que existiría para  $r = 0$ , si  $E$  variara como  $1/r^2$  dentro de la esfera. Esto es, si  $E \propto 1/r^2$ , el campo debería ser infinito en  $r = 0$ , lo cual es obvio que es una situación físicamente imposible. La gráfica de  $E$  contra  $r$  se muestra en la figura 24.12.

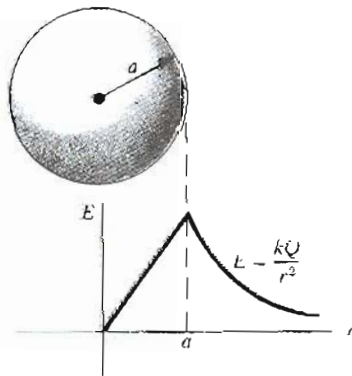


Figura 24.12 (Ejemplo 24.3) Gráfica de  $E$  contra  $r$  para una esfera aislante uniformemente cargada. El campo dentro de la esfera ( $r < a$ ) varía linealmente con  $r$ . El campo fuera de la esfera ( $r > a$ ) es igual al de una carga puntual  $Q$  localizada en el origen.

**EJEMPLO 24.4 El campo  $E$  de un cascarón esférico**

Un cascarón esférico de radio  $a$  tiene una carga total  $Q$  distribuida uniformemente sobre su superficie (Fig. 24.13). Determinése el campo eléctrico en los puntos tanto interiores como exteriores al cascarón.

El cálculo del campo exterior al cascarón es idéntico al que se realizó en el caso de la esfera sólida del ejemplo 24.3a. Si se construye una superficie gaussiana esférica de radio  $r > a$ , concéntrica con el cascarón, enton-

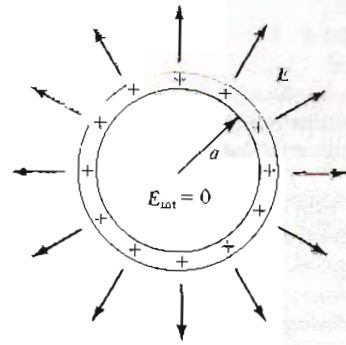


Figura 24.13 (Ejemplo 24.4) El campo eléctrico dentro de un cascarón esférico uniformemente cargado es cero. El campo afuera es el mismo que el de una carga puntual que tuviera una carga total  $Q$  localizada en el centro del cascarón.

ces la carga dentro de esta superficie es  $Q$ . En consecuencia, el campo en un punto exterior al cascarón equivale al de una carga puntual  $Q$  en el centro

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } r > a)$$

El campo eléctrico dentro del cascarón es cero. Esto se sigue de la ley de Gauss aplicada a una superficie de radio  $r < a$ . Ya que la carga neta dentro de la superficie es cero y debido a la simetría esférica de la distribución de carga, al aplicar la ley de Gauss se demuestra que  $E = 0$  en la región  $r < a$ .

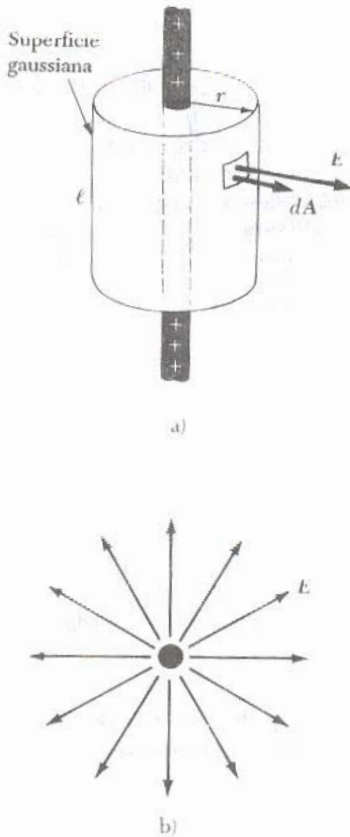
El mismo resultado puede obtenerse aplicando la ley de Coulomb e integrando sobre la distribución de carga. Este cálculo es un tanto complicado y se omitirá.

**EJEMPLO 24.5 Distribución de carga cilíndricamente simétrica.**

Encuéntrese el campo eléctrico a una distancia  $r$  de una carga lineal positiva uniforme cuya carga por unidad de longitud es  $\lambda = \text{constante}$  (Fig. 24.14).

**Solución** La simetría de la distribución de carga muestra que el campo eléctrico  $E$  debe ser perpendicular a la línea de carga y dirigido hacia afuera como en la figura 24.14a. La vista desde uno de los extremos de la línea de carga que se aprecia en la figura 24.14b ayuda a visualizar las direcciones de las líneas del campo eléctrico. En este caso, se selecciona una superficie gaussiana cilíndrica de radio  $r$  y de longitud  $\ell$  coaxial con la línea de carga. En la parte curva de esta superficie,  $E$  es constante en magnitud y perpendicular a la superficie en cada punto. Por otro lado, el flujo a través de los extremos del cilindro gaussiano es cero, ya que  $E$  es paralelo a estas superficies.

La carga total encerrada por la superficie gaussiana es  $\lambda\ell$ , donde  $\lambda$  es la carga por unidad de longitud y  $\ell$  es la longitud del cilindro. Aplicando la ley de Gauss y observan-



**Figura 24.14** (Ejemplo 24.5) a) Una línea infinita de carga está rodeada por una superficie gaussiana cilíndrica concéntrica con la línea de carga. b) El campo en la superficie cilíndrica es constante en magnitud y perpendicular a la superficie.

do que  $E$  es paralelo a  $dA$  en cualquier punto sobre la superficie cilíndrica, se encuentra que

$$\Phi_c = \oint E \cdot dA = E \oint dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

pero el área de la superficie curva es  $A = 2\pi r\ell$ ; por lo que

$$E(2\pi r\ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k \frac{\lambda}{r} \quad (24.9)$$

Entonces, se ve que el campo de una distribución de carga cilíndricamente simétrica varía como  $1/r$ , en tanto que el campo externo de una distribución de carga esféricamente simétrica varía como  $1/r^2$ . La ecuación 24.9 puede obtenerse utilizando la ley de Coulomb e integrando; sin embargo, las técnicas matemáticas para este cálculo son más complicadas.

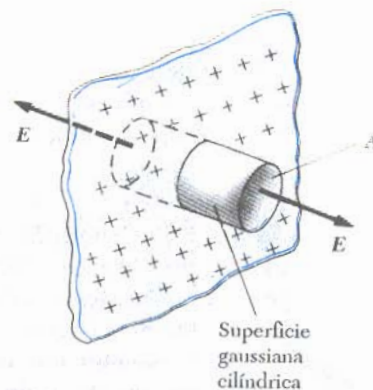
Si la línea de carga tiene una longitud finita el resultado de  $E$  no es el mismo que el que da la ecuación 24.9. Para puntos cercanos a la línea de carga y lejos de los extremos, la ecuación 24.9 da una buena aproximación del valor real del campo. Pero resulta que la ley de Gauss *no es útil* para calcular el  $E$  debido a una línea de carga finita. Esto se debe a que el campo  $E$  no es constante en magnitud sobre la superficie del cilindro gaussiano. Además,  $E$  no es perpendicular a la superficie del cilindro en todos los puntos. Cuando existe poca simetría en la distribución de carga, es necesario calcular  $E$  utilizando la ley de Coulomb.

Se deja demostrar (Probl. 35) que el campo eléctrico dentro de una barra uniformemente cargada de espesor finito es proporcional a  $r$ .

### EJEMPLO 24.6 Lámina plana cargada no conductora

Determinese el campo eléctrico debido a una lámina infinita no conductora con carga por unidad de área uniforme  $\sigma$ .

**Solución** La simetría del caso demuestra que  $E$  debe ser perpendicular al plano y la dirección de  $E$  sobre uno de los lados debe ser opuesta a su dirección sobre el otro lado, como en la figura 24.15. Nos conviene escoger como superficie gaussiana un pequeño cilindro cuyo eje sea perpendicular al plano y cuyos extremos tengan un área  $A$  y sean equidistantes del plano. Aquí se observa que el flujo sobre la superficie cilíndrica es cero, ya que  $E$  es paralelo a esta superficie. El flujo hacia afuera en *cada* cara del cilindro es  $EA$  (ya que  $E$  es perpendicular en los extremos), siendo el flujo *total* a través de la superficie gaussiana  $2EA$ . Obsér-



**Figura 24.15** (Ejemplo 24.6) Superficie gaussiana cilíndrica que penetra una lámina infinita de carga. El flujo a través de los extremos de la superficie es  $EA$ . No existe flujo a través de la superficie cilíndrica.

vese que la carga total dentro de la superficie es  $\sigma A$ , así que utilizando la ley de Gauss se obtiene:

$$\Phi_e = 2EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (24.10)$$

En virtud de que la distancia de la superficie al plano no aparece en la ecuación 24.10, se concluye que  $E = \sigma/2\epsilon_0$  a cualquier distancia del plano. Es decir, el campo es uniforme en todo punto.

Una importante configuración relacionada con este ejemplo es el caso de dos láminas (o placas) paralelas cargadas, con densidades de carga  $+\sigma$  y  $-\sigma$ , respectivamente (Probl. 58). En esta situación, el campo eléctrico es  $\sigma/\epsilon_0$  entre las placas y aproximadamente cero fuera de ellas.

### 24.4 CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

#### Propiedades de un conductor en equilibrio electrostático

Un buen conductor eléctrico, como el cobre, contiene cargas (electrones) que no están ligadas a átomo alguno y pueden moverse con libertad dentro del material. Cuando no se tiene movimiento neto de la carga dentro del conductor, éste se encuentra en **equilibrio electrostático**. Como se verá, *un conductor en equilibrio electrostático* tiene las siguientes propiedades:

1. El campo eléctrico es cero en cualquier punto del interior del conductor.
2. Cualquier exceso de carga en un conductor aislado debe residir enteramente sobre su superficie.
3. El campo eléctrico precisamente afuera del conductor es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud de  $\sigma/\epsilon_0$ , donde  $\sigma$  es la carga por unidad de área en ese punto.
4. En un conductor de forma irregular la carga tiende a acumularse en regiones donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño, es decir, en las puntas.

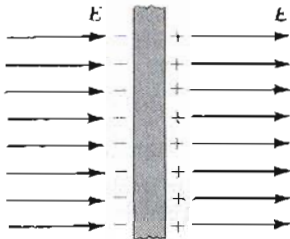


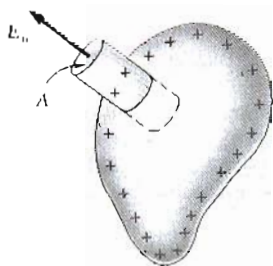
Figura 24.16 Placa conductora en un campo eléctrico externo  $E$ . Las cargas inducidas por el campo sobre las caras de la placa producen un campo eléctrico el cual se opone al campo externo, dando un campo resultante cero en el conductor.



Figura 24.17 Conductor aislado de forma arbitraria. La línea quebrada representa una superficie gaussiana justo en el interior del conductor.

La primera propiedad puede entenderse si se considera una placa conductora cargada dentro de un campo externo  $E$  (Fig. 24.16). En equilibrio electrostático, el campo eléctrico dentro de un conductor debe ser cero. Si esto no fuera el caso, las cargas libres se podrían acelerar con la acción del campo eléctrico. Antes de aplicar el campo eléctrico externo, los electrones están uniformemente distribuidos a través del conductor. Cuando el campo eléctrico se aplica, los electrones libres aceleran hacia la izquierda, produciendo una carga negativa sobre la superficie de la izquierda (exceso de electrones) y una carga positiva sobre la derecha (de la cual se han eliminado electrones). Estas cargas crean su propio campo eléctrico, el cual se opone al campo eléctrico externo. La densidad de carga superficial aumenta hasta que la magnitud del campo eléctrico debido a estas cargas iguale a la del campo eléctrico externo, dando por resultado un campo neto igual a cero dentro del conductor. En un buen conductor, el tiempo que toma éste en alcanzar el equilibrio es del orden de  $10^{-6}$  s, lo cual para la mayor parte de los fines prácticos puede ser considerado como instantáneo.

Se puede utilizar la ley de Gauss para verificar la segunda y tercera propiedad de los conductores en equilibrio electrostático. La figura 24.17 muestra un conductor aislado en forma arbitraria. Una superficie gaussiana se traza en el interior del conductor, tan próxima a la superficie como se desee. Como acaba de mostrarse, el campo eléctrico en cualquier punto dentro del conductor es cero cuando está en equilibrio electrostático. Ya que el campo eléctrico también es cero en cualquier punto sobre la superficie gaussiana, se puede ver que el flujo a través de esta superficie es cero. De este resultado y de la ley de Gauss, se concluye que la carga neta dentro de la superficie gaussiana es cero. Debido a que no debe



**Figura 24.18** Una superficie gaussiana en forma de un pequeño cilindro se utiliza para calcular el campo eléctrico precisamente afuera de un conductor cargado. El flujo a través de la superficie gaussiana es  $E_n A$ . Obsérvese que  $E$  es cero en el interior del conductor.

haber carga neta en el interior de la superficie gaussiana (la cual se eligió arbitrariamente cerca de la superficie del conductor), cualquier carga neta en el conductor debe encontrarse en su superficie. La ley de Gauss no dice cómo debe estar distribuido este exceso de carga sobre la superficie. En la sección 25.6 se demostrará la cuarta propiedad de un conductor en equilibrio electrostático.

Es posible aplicar la ley de Gauss para referirse al campo eléctrico precisamente en el exterior de la superficie del conductor cargado en equilibrio con la carga distribuida sobre el conductor. Para esto es conveniente trazar una superficie gaussiana con la forma de un cilindro pequeño con las caras extremas paralelas a la superficie (Fig. 24.18). Parte del cilindro está justamente fuera del conductor y parte está en el interior. No hay flujo a través de la cara en el interior del cilindro ya que  $E = 0$  en el interior del conductor. Además, el campo eléctrico es normal a la superficie. Si  $E$  tiene una componente tangencial, las cargas libres podrían moverse sobre la superficie creando corrientes superficiales, y el conductor no estaría en equilibrio electrostático. No hay flujo a través de la cara cilíndrica de la superficie gaussiana debido a que  $E$  es tangente a esta superficie. Por lo tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es  $E_n A$ , donde  $E_n$  es el campo eléctrico precisamente afuera del conductor. Aplicando la ley de Gauss a esta superficie obtenemos

$$\Phi_c = \oint E_n dA = E_n A = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Se ha aplicado el hecho de que la carga dentro de la superficie gaussiana  $q_{\text{int}} = \sigma A$ , donde  $A$  es el área de la cara del cilindro y  $\sigma$  es la carga por unidad de área (local). Si se despeja  $E_n$  se obtiene

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (24.11)$$

### EJEMPLO 24.7 Una esfera dentro de un cascarón esférico

Una esfera conductora sólida de radio  $a$  tiene una carga neta positiva  $2Q$  (Fig. 24.19). Un cascarón conductor esférico de radio interno  $b$  y radio externo  $c$  es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta  $-Q$ . Utilizando la ley de Gauss, determínese el campo eléctrico en las regiones etiquetadas ①, ②, ③ y ④ y la distribución de carga sobre el cascarón esférico.

**Solución** Primero observe que la distribución de carga en ambas esferas tiene simetría esférica, ya que éstas son concéntricas. Para determinar el campo eléctrico a varias

distancias  $r$  del centro, se construyen superficies gaussianas esféricas de radio  $r$ .

Para determinar  $E$  dentro de la esfera sólida de radio  $a$  (región ①), se construye una superficie gaussiana de radio  $r < a$ . Como no puede haber carga en el interior de un conductor en equilibrio electrostático, se ve que de la ley de Gauss para  $q_{\text{int}} = 0$ , entonces  $E = 0$  para  $r < a$ . Así se concluye que la carga neta  $2Q$  en la esfera sólida está distribuida en su superficie externa.

En la región ② entre las dos esferas, donde  $a < r < b$ , nuevamente se construye una superficie gaussiana esférica de radio  $r$  y se observa que la carga en el interior de esta superficie es  $+2Q$  (la carga sobre la esfera interna). Debido a la simetría esférica, las líneas del campo eléctrico deben



Patrón de campo eléctrico de una placa conductora cargada cerca de un conductor cilíndrico con carga opuesta. Pequeñas piezas de fibra suspendidas en aceite se alinean con las líneas del campo eléctrico. Obsérvese que: 1) las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a los conductores y 2) no existen líneas dentro del cilindro ( $E = 0$ ). (Cortesía de Harold M. Waage, Princeton University)

### Campo eléctrico precisamente afuera de un conductor cargado

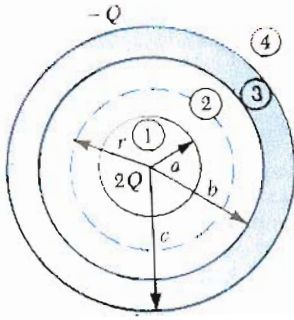


Figura 24.19 (Ejemplo 24.7) Esfera sólida conductora de radio  $a$  y carga  $2Q$  rodeada por un cascarón conductor esférico con carga  $-Q$ .

$$E_2 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{2kQ}{r^2} \quad (\text{para } a < r < b)$$

En la región ④, afuera de ambas esferas, donde  $r > c$ , la superficie esférica gaussiana encierra una carga total de  $q_{int} = 2Q + (-Q) = Q$ . Por lo tanto, aplicando la ley de Gauss para esta superficie se obtiene

$$E_4 = \frac{kQ}{r^2} \quad (\text{para } r > c)$$

ser radiales hacia afuera y la magnitud del campo constante en la superficie gaussiana. Siguiendo el ejemplo 24.2 y utilizando la ley de Gauss, se determina que

$$E_2 A = E_2 (4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{2Q}{\epsilon_0}$$

Finalmente, considérese la región ③, donde  $b < r < c$ . El campo eléctrico debe ser cero en esta región ya que el cascarón esférico es también un conductor en equilibrio. Si se construye una superficie gaussiana de este radio, se ve que  $q_{int}$  debe ser cero ya que  $E_3 = 0$ . A partir de este argumento se concluye que la carga sobre la superficie interna del cascarón esférico debe ser  $-2Q$  para cancelar la carga de  $+2Q$  en la esfera sólida. (La carga de  $-2Q$  es inducida por la carga de  $+2Q$  en la esfera sólida.) Además, como la carga neta sobre el cascarón es de  $-Q$ , se concluye que la superficie externa del cascarón debe tener una carga igual a  $+Q$ .

### •24.5 DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS LEYES DE GAUSS Y COULOMB

Cuando se coloca una carga neta en un conductor, la carga se distribuye sobre la superficie de manera que el campo eléctrico en el interior es cero. Ya que  $E = 0$  dentro de un conductor en equilibrio electrostático, la ley de Gauss muestra que no puede haber carga neta dentro del conductor. Se ha visto que la ley de Gauss es una consecuencia de la ley de Coulomb (Ej. 24.2). Por lo tanto sería posible probar la validez del recíproco del cuadrado para la fuerzas intentando detectar una carga neta dentro de un conductor. Si se llegara a detectar una carga neta dentro del conductor en cualquier punto, excepto en su superficie, la ley de Coulomb y por consiguiente la ley de Gauss no serían válidas. Se han hecho muchos experimentos para demostrar que la carga neta reside en la superficie del conductor, incluyendo los trabajos realizados por Faraday, Cavendish y Maxwell. En todos los casos publicados no pudo detectarse campo eléctrico en un conductor cerrado. Los experimentos más recientes y precisos realizados por Williams, Faller y Hill en 1971 mostraron que el exponente de  $r$  en la ley de Coulomb es  $(2 + \delta)$ , ¡donde  $\delta = (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$ !

Puede realizarse el siguiente experimento para verificar que la carga neta en un conductor se encuentra en su superficie. Introduzca una pequeña bola metálica cargada positivamente, la cual cuelga de un hilo de seda dentro de un conductor hueco sin carga a través de un pequeño orificio<sup>2</sup> (Fig. 24.20a). El conductor hueco está aislado de la tierra. La bola cargada induce una carga negativa en la pared interna del conductor, dejando una carga igual positiva en la pared exterior (Fig. 24.20b). La presencia de las cargas positivas en la pared exterior se indican por la

<sup>2</sup> Frecuentemente se menciona este experimento como el *experimento del cubo de hielo de Faraday*, ya que fue llevado a cabo por primera vez por este investigador utilizando uno de esos cubos como conductor hueco.

deflexión del electrómetro (dispositivo para medir cargas). La deflexión del electrómetro no cambia cuando la bola toca la superficie interior del conductor hueco (Fig. 24.20c). Cuando la bola se extrae, la lectura del electrómetro no cambia y la bola se encuentra descargada (Fig. 24.20d). Esto muestra que *la carga transferida al conductor hueco se encuentra sobre su superficie exterior*. Si ahora se introduce una pequeña bola metálica cargada en el *centro* del conductor hueco cargado, la bola metálica no será atraída por el conductor hueco. Esto demuestra que  $E = 0$  en el centro del conductor hueco. Por otro lado, si la pequeña bola cargada se coloca cerca de la superficie exterior del conductor hueco, la bola será repelida por el conductor, lo que demuestra que  $E \neq 0$  afuera del conductor.

•24.6 DEDUCCIÓN DE LA LEY DE GAUSS

Un método que puede aplicarse para deducir la ley de Gauss comprende el concepto de *ángulo sólido*. Considérese una superficie esférica de radio  $r$  que contiene un elemento de área  $\Delta A$ . El ángulo sólido  $\Delta\Omega$  sustentado por este elemento respecto del centro de la esfera está definido por

$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A}{r^2}$$

De esta expresión, se ve que  $\Delta\Omega$  no tiene dimensiones, ya que tanto  $\Delta A$  como  $r^2$  tienen la dimensión de  $L^2$ . La unidad de ángulo sólido se llama **estereorradián**. Dado que el área superficial de una esfera es de  $4\pi r^2$ , el ángulo sólido suspendido por la esfera desde su centro está dado por

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ estereorradianes}$$

Ahora considérese una carga puntual  $q$  rodeada por una superficie cerrada de forma arbitraria (Fig. 24.21). El flujo total a través de esta superficie puede ser obtenido mediante la evaluación de  $E \cdot \Delta A$  para cada elemento de área y sumando sobre todos los elementos de la superficie. El flujo a través del elemento de área  $\Delta A$  es

$$\Delta\Phi = E \cdot \Delta A = E \cos \theta \Delta A = kq \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2}$$

en donde se ha aplicado el hecho de que  $E = kQ/r^2$  para una carga puntual. Pero la cantidad  $\Delta A \cos \theta/r^2$  es igual al ángulo sólido  $\Delta\Omega$  sustentado desde la carga  $q$  por el elemento de superficie  $\Delta A$ . De la figura 24.22 se ve que  $\Delta\Omega$  es igual al ángulo sólido sustentado por el elemento de la superficie esférica de radio  $r$ . Como

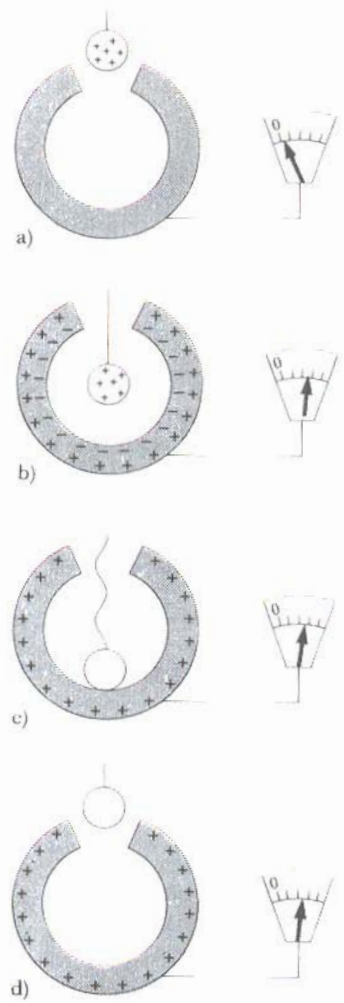


Figura 24.20 Una demostración experimental que muestra que cualquier carga transferida a un conductor reside en su superficie en equilibrio electrostático. El conductor hueco está aislado de tierra, y la pequeña bola está suspendida por un hilo aislante.

Figura 24.21 Una superficie cerrada de forma arbitraria rodea a una carga puntual  $q$ . El flujo neto a través de la superficie es independiente de la forma de la superficie.

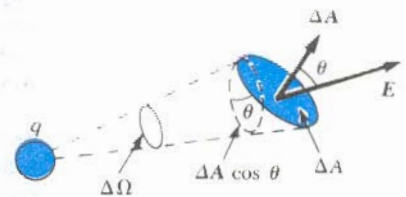
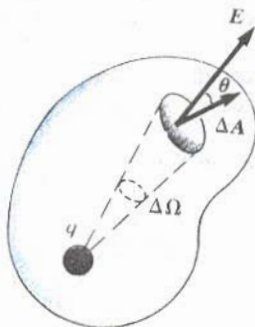


Figura 24.22 El elemento de área  $\Delta A$  sustenta un ángulo sólido  $\Delta\Omega = (\Delta A \cos \theta)/r^2$  desde la carga  $q$ .

el ángulo sólido total desde un punto es  $4\pi$  estereorradianes, se ve que el flujo total a través de la superficie cerrada es

$$\Phi_c = kq \oint \frac{dA \cos \theta}{r^2} = kq \oint d\Omega = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Entonces se tiene deducida la ley de Gauss, ecuación 24.6. Obsérvese que este resultado es independiente de la forma de la superficie cerrada e independiente de la posición de la carga dentro de la superficie.

**RESUMEN**

**Flujo eléctrico** es la medida del número de líneas de campo eléctrico que penetran una superficie. Si el campo eléctrico es uniforme y hace un ángulo  $\theta$  con la normal a la superficie, el flujo eléctrico a través de la superficie es

$$\Phi = EA \cos \theta \tag{24.2}$$

En general, el flujo eléctrico a través de una superficie se define por la expresión

$$\Phi = \int_{\text{superficie}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \tag{24.3}$$

La **ley de Gauss** dice que el flujo eléctrico neto  $\Phi_c$ , a través de cualquier superficie gaussiana es igual a la carga *neto encerrada* en la superficie dividida por  $\epsilon_0$ :

$$\Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{24.6}$$

Utilizando la ley de Gauss, uno puede calcular el campo eléctrico debido a varias distribuciones de carga simétricas. La tabla 24.1 muestra algunos resultados típicos.

Flujo a través de una superficie en un campo eléctrico uniforme

Definición de flujo eléctrico

Ley de Gauss

**TABLA 24.1 Campos eléctricos típicos calculados utilizando la ley de Gauss**

Distribución de carga	Campo eléctrico	Región
Esfera aislante de radio $R$ , densidad de carga uniforme y carga total $Q$	$k \frac{Q}{r^2}$	$r > R$
	$k \frac{Q}{R^3} r$	$r < R$
Cascarón esférico delgado de radio $R$ y carga total $Q$	$k \frac{Q}{r^2}$	$r > R$
	0	$r < R$
Línea de carga de longitud infinita y carga por unidad de longitud $\lambda$	$2k \frac{\lambda}{r}$	Afuera de la línea de carga
Plano infinito no conductor cargado con carga por unidad de área $\sigma$	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	En todo punto fuera del plano
Superficie conductora cargada con carga por unidad de área $\sigma$	$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$	Precisamente fuera del conductor
	0	Adentro del conductor

Un **conductor en equilibrio electrostático** tiene las siguientes propiedades:

1. El campo eléctrico es cero en cualquier punto del interior del conductor.
2. Cualquier exceso de carga sobre un conductor aislado se localiza enteramente sobre su superficie.
3. El campo eléctrico precisamente afuera del conductor es perpendicular a su superficie y tiene una magnitud de  $\sigma/\epsilon_0$ , donde  $\sigma$  es la carga por unidad de área en el punto.
4. En un conductor de forma irregular, la carga tiende a acumularse donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño, es decir, donde termina en punta.

Propiedades de un conductor en equilibrio electrostático

## ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La ley de Gauss puede parecerle misteriosa y es usual que se dificulte el entendimiento de ella en los cursos introductorios de física. Sin embargo, se tiene que observar que la ley de Gauss es muy eficaz en la solución de problemas que tienen un alto grado de simetría. En este capítulo sólo encontramos problemas con tres tipos de simetría: plana, cilíndrica y esférica. Es importante repasar los ejemplos del 2 al 7 y utilizar el siguiente procedimiento:

1. Primero, seleccione una superficie gaussiana la cual *tenga la misma simetría que la distribución de carga*. Para cargas puntuales o distribuciones de carga con simetría esférica, la superficie gaussiana deberá ser una esfera centrada en la carga como en los ejemplos 2, 3, 4 y 7. Para líneas de carga o cilindros uniformemente cargados se escoge una superficie gaussiana que debe ser una superficie cilíndrica que sea coaxial con la línea de carga o con el cilindro como en el ejemplo 5. Para láminas (o placas) cargadas que tienen simetría plana, la superficie gaussiana debe ser un cilindro pequeño simétrico a la placa como en el ejemplo 6. Observe que en todos los casos, la superficie gaussiana se selecciona de tal forma que el campo eléctrico tenga la misma magnitud en cualquier punto de la superficie y que su dirección sea perpendicular a la superficie. Esto permite una evaluación sencilla de la integral de superficie que aparece en el lado izquierdo de la ley de Gauss, lo cual representa el flujo total a través de la superficie.
2. Ahora evalúe el lado derecho de la ley de Gauss, lo cual permite calcular la carga eléctrica total,  $q_{\text{int}}$ , encerrada en la superficie gaussiana. Si la densidad de carga es uniforme como comúnmente es el caso (es decir, si  $\lambda$ ,  $\sigma$ , o  $\rho$  es constante), simplemente multiplica la densidad de carga por la longitud, el área o el volumen encerrado por la superficie gaussiana. Sin embargo, si la distribución de carga no es uniforme, deberá integrarse la densidad de carga sobre la región encerrada por la superficie gaussiana. Por ejemplo, si la carga está distribuida a lo largo de una línea, deberá integrarse la expresión  $dq = \lambda dx$ , donde  $dq$  es carga en el elemento infinitesimal  $dx$  y  $\lambda$  es carga por unidad de longitud. Para un plano cargado, deberá integrar  $dq = \sigma dA$ , donde  $\sigma$  es la carga por unidad de área y  $dA$  es un elemento de área infinitesimal. Finalmente, para un volumen de carga, deberá integrar  $dq = \rho dV$ , donde  $\rho$  es la carga por unidad de volumen y  $dV$  es un elemento de volumen infinitesimal.
3. Una vez evaluados el lado izquierdo y el lado derecho de la ley de Gauss, se procede al cálculo del campo eléctrico sobre la superficie gaussiana suponiendo que la distribución de carga está dada en el problema. Recíprocamente, si el campo eléctrico es conocido, se puede calcular la distribución de carga que produce el campo.



## PREGUNTAS

- Si el flujo neto a través de una superficie gaussiana es cero, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? a) No existe carga en el interior de la superficie. b) La carga neta en el interior de la superficie es cero. c) El campo eléctrico es cero en cualquier punto sobre la superficie. d) El número de líneas de campo eléctrico que entran en la superficie es igual al número de líneas que salen de la superficie.
- Si el campo eléctrico en una región del espacio es cero, ¿podría concluir que no existen cargas eléctricas en esa región? Dé una explicación.
- Una superficie gaussiana esférica encierra una carga puntual  $q$ . Describa qué sucede con el flujo a través de la superficie, si: a) la carga es triplicada, b) el volumen de la esfera se duplica, c) la forma de la superficie se cambia por un cubo y d) la carga es movida a otra posición dentro de la superficie.
- Si existen más líneas de campo eléctrico saliendo de una superficie gaussiana que las que entran en la superficie, ¿qué puede concluirse sobre la carga neta encerrada por la superficie?
- Un campo eléctrico uniforme existe en una región del espacio donde no hay cargas. ¿Qué puede concluirse sobre el flujo *neto* a través de una superficie gaussiana colocada en esa región del espacio?
- Explique por qué la ley de Gauss no puede ser utilizada para calcular el campo eléctrico de: a) un dipolo eléctrico, b) un disco cargado, c) un anillo cargado y d) tres cargas puntuales en las esquinas de un triángulo.
- Si la carga total dentro de una superficie cerrada se conoce pero la distribución de la carga no está especificada, ¿podría utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico? Dé una explicación.
- Explique por qué el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con una carga encerrada dada es independiente del tamaño o forma de la superficie.
- Considere el campo eléctrico debido a un plano no conductor infinito con una densidad de carga uniforme. Explique por qué el campo eléctrico no depende de la distancia al plano en términos del espaciamiento de las líneas de campo eléctrico.
- Utilice la ley de Gauss para explicar por qué las líneas de campo eléctrico deben comenzar y terminar en cargas eléctricas. (*Sugerencia:* cambie el tamaño de la superficie gaussiana.)
- Una carga puntual se coloca en el centro de un cascarón esférico metálico no cargado y aislado de tierra. Al mover la carga puntual fuera del centro, describa qué pasa con: a) la carga total inducida sobre el cascarón y b) la distribución de carga en las superficies interior y exterior del cascarón.
- Explique por qué el exceso de carga en un conductor aislado debe residir en su superficie, utilizando la repulsión natural de la fuerza entre cargas iguales y la libertad de movimiento de las cargas en un conductor.
- Una persona se coloca en una gran esfera metálica hueca que está aislada de tierra. Si una enorme carga se coloca en la esfera, ¿será dañada la persona si toca la parte interna de la esfera? Explique qué sucedería si la persona también tiene una carga inicial cuyo signo es opuesto al de la carga en la esfera.
- ¿Cuáles serían las diferencias en las observaciones descritas en la figura 24.20, si el conductor hueco estuviera aterrizado? ¿Cuáles serían sus diferencias si la pequeña bola cargada fuera aislante en lugar de conductor.
- ¿Qué otro experimento se podría realizar con la bola en la figura 24.20 para demostrar que su carga fue transferida al conductor hueco?
- ¿Qué pasaría con la lectura del electrómetro en la figura 24.20 si la bola cargada toca la pared interna del conductor? ¿Y si toca la pared externa?
- Dos esferas sólidas, ambas de radio  $R$ , tienen una carga total idéntica  $Q$ . Una esfera es un buen conductor y la otra es un aislante. Si la carga sobre la esfera aislante se distribuye uniformemente a través de su volumen interior, ¿cómo es el campo eléctrico fuera de las dos esferas? ¿Son los campos idénticos en el interior de las esferas?

## PROBLEMAS

## Sección 24.1 Flujo eléctrico

- Una superficie plana que tiene un área de  $3.2 \text{ m}^2$  se rota en un campo eléctrico uniforme de intensidad  $E = 6.2 \times 10^2 \text{ N/C}$ . Calcule el flujo eléctrico a través del área cuando el campo eléctrico está: a) perpendicular a la superficie, b) paralelo a la superficie y c) haciendo un ángulo de  $75^\circ$  con el plano de la superficie.
- Un campo eléctrico de intensidad  $3.5 \times 10^3 \text{ N/C}$  se aplica a lo largo del eje  $x$ . Calcule el flujo eléctrico a través de un plano rectangular de  $0.35 \text{ m}$  de ancho y  $0.70 \text{ m}$  de longitud, si: a) el plano es paralelo al plano  $yz$ , b) el plano es paralelo al plano  $xy$  y c) el plano contiene al eje  $y$  y su normal hace un ángulo de  $40^\circ$  con el eje  $x$ .
- Un campo eléctrico uniforme  $a_i + b_j$  intersecta una superficie de área  $A$ . ¿Cuál es el flujo a través del área si la superficie se encuentra: a) en el plano  $yz$ , b) en el plano  $xz$  y c) en el plano  $xy$ ?
- Considere una caja triangular en un campo eléctrico  $E = 7.8 \times 10^4 \text{ N/C}$  como se muestra en la figura 24.23. Calcule el flujo eléctrico a través de: a) la superficie vertical de la izquierda ( $A'$ ), b) la superficie inclinada ( $A$ ) y c) la superficie entera de la caja.

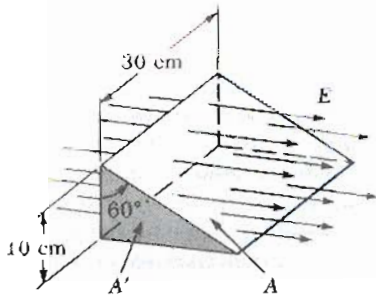


Figura 24.23 (Problema 4)

5. Una espira de 40 cm de diámetro se rota en un campo eléctrico hasta encontrar la posición de máximo flujo eléctrico. El flujo eléctrico en esa posición es de  $5.2 \times 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$ . ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico?
6. Un campo eléctrico no uniforme se da por la expresión  $E = ayi + bxj + cxk$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes. Determine el flujo eléctrico a través de una superficie rectangular en el plano  $xy$ , que se extiende de  $x = 0$  a  $x = w$  y de  $y = 0$  a  $y = h$ .
7. Un campo eléctrico está dado por  $E = azi + bzk$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes. Determine el flujo eléctrico a través de la superficie triangular que se aprecia en la figura 24.24.

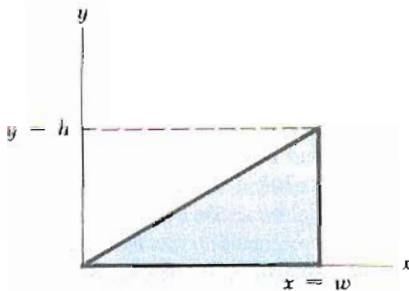


Figura 24.24 (Problema 7)

8. Un cono con base circular de radio  $R$  está colocado de tal forma que su eje es vertical. Un campo eléctrico uniforme  $E$  se aplica en la dirección vertical. Demuestre que el flujo a través de la superficie cónica (sin contar su base) está dado por la expresión  $\pi R^2 E$ .
9. Una pirámide cuadrada cuya base tiene de lado 6 m y de altura 4 m se coloca en un campo eléctrico vertical de 52 N/C. Calcule el flujo eléctrico total a través de las cuatro superficies inclinadas de la pirámide.

**Sección 24.2 Ley de Gauss**

10. Cuatro superficies cerradas,  $S_1$  a  $S_4$ , junto con las cargas  $-2Q$ ,  $+Q$  y  $-Q$  se dibujan en la figura 24.25. Encuentre el flujo a través de cada superficie.
11. Una carga puntual de  $5 \mu\text{C}$  se coloca en el centro de una esfera con un radio de 12 cm. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie de esta esfera?

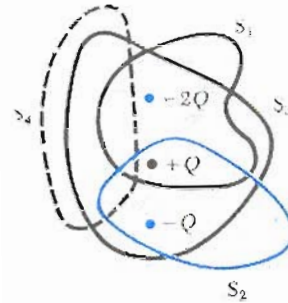


Figura 24.25 (Problema 10)

12. En un día claro, el campo eléctrico cerca de la superficie de la Tierra es de 100 N/C apuntando radialmente hacia adentro. Si el mismo campo eléctrico existe en cualquier punto de la superficie de la Tierra, determine la carga total que debería estar almacenada en la Tierra.
13. Una carga puntual de  $12 \mu\text{C}$  se coloca en el centro de un cascarón esférico de radio 22 cm. ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de: a) la superficie completa del cascarón, b) cualquier hemisferio del cascarón? c) ¿El resultado depende del radio? Dé una explicación.
14. a) Dos cargas de  $8 \mu\text{C}$  y  $-5 \mu\text{C}$  están dentro de un cubo cuyo lado es de 0.45 m. ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través del cubo? Repita a) si las mismas cargas están dentro de un cascarón esférico de radio 0.45 m.
15. Las siguientes cargas están localizadas dentro de un submarino:  $+5 \mu\text{C}$ ,  $-9 \mu\text{C}$ ,  $+27 \mu\text{C}$  y  $-84 \mu\text{C}$ . Calcule el flujo eléctrico neto a través del submarino. Compare el número de líneas de campo que salen del submarino con el número que entran a él.
16. El campo eléctrico sobre la superficie de una esfera hueca conductora no cargada, está dirigido hacia afuera pero varía su magnitud sobre la superficie de la esfera. Una carga puntual dentro de la esfera tiene una magnitud  $Q$ . a) ¿Cuál es el signo de la carga? b) ¿Qué se puede decir acerca de la posición de la carga? c) ¿Qué puede decirse acerca de los alrededores? d) ¿Cuál es el flujo neto a través de la esfera?
17. Cinco cargas están colocadas en una caja cerrada. Cada carga (excepto la primera) tiene una magnitud la cual es el doble de la que se colocó previamente en la caja. Si todas las cargas tienen el mismo signo y si (después de haber colocado todas las cargas en la caja) el flujo neto a través de la caja es  $4.8 \times 10^7 \text{ Nm}^2/\text{C}$ , ¿cuál es la magnitud de la carga más pequeña en la caja? ¿La respuesta depende del tamaño de la caja?
18. El campo eléctrico en cualquier punto de la superficie de una esfera hueca de radio 0.75 cm se mide y es igual a  $8.90 \times 10^2 \text{ N/C}$  apuntando radialmente hacia afuera desde el centro de la esfera. a) ¿Cuál es la carga neta en el interior de la superficie esférica? b) ¿Qué puede concluirse acerca de la naturaleza y distribución de la carga en el interior de la esfera?
19. El campo eléctrico sobre cualquier punto en la superficie de una esfera hueca de radio 11 cm se mide y es igual a  $3.8 \times 10^4 \text{ N/C}$  apuntando radialmente hacia afuera desde el centro de la esfera. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de esa superficie? b) ¿Cuánta carga es encerrada por esa superficie?

20. Una carga de  $170 \mu\text{C}$  está en el centro de un cubo de lado  $80 \text{ cm}$ . a) Encuentre el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo. b) Encuentre el flujo a través de toda la superficie del cubo. c) ¿Cambiarían sus respuestas para a) y b) si la carga no estuviera en el centro? Dé una explicación.
21. El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada de forma cilíndrica es de  $8.60 \times 10^4 \text{ Nm}^2/\text{C}$ . a) ¿Cuál es la carga neta dentro del cilindro? b) ¿De la información dada, qué puede decirse de la carga encerrada dentro del cilindro? c) ¿Qué cambios habría en sus respuestas para a) y b) si el flujo neto fuera  $-8.60 \times 10^4 \text{ Nm}^2/\text{C}$ ?
22. Un cubo de lado  $10 \text{ cm}$  está centrado en el origen. Una carga puntual de  $2 \mu\text{C}$  se coloca sobre el eje  $y$  en  $y = 20 \text{ cm}$ . a) Trace líneas de campo eléctrico para la carga puntual. b) ¿Cuál es el flujo neto a través de la superficie del cubo. c) Repita a) y b) si una segunda carga puntual de  $4 \mu\text{C}$  se coloca en el centro del cubo. (Desprecie las líneas que van a través de las aristas y las esquinas.)
23. Una carga puntual  $Q$  se coloca justamente sobre el centro de la cara plana de un hemisferio de radio  $R$  como se muestra en la figura 24.26. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie curva del hemisferio? b) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la cara plana del hemisferio?

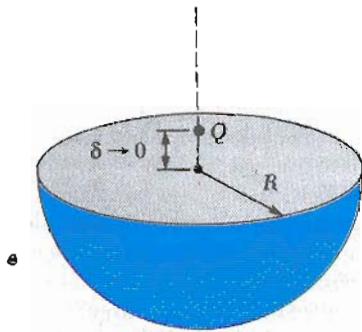


Figura 24.26 (Problema 23).

### Sección 24.3 Aplicaciones de la ley de Gauss a aisladores cargados

24. Demuestre que la intensidad del campo eléctrico en un punto justo afuera de un cascarón esférico uniformemente cargado es  $\sigma/\epsilon_0$ , donde  $\sigma$  es la carga por unidad de área sobre el cascarón.
25. Considere un cascarón esférico delgado de radio  $14 \text{ cm}$  con una carga total de  $32 \mu\text{C}$  distribuida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico para las siguientes distancias desde el centro de la distribución de carga: a)  $r = 10 \text{ cm}$  y b)  $r = 20 \text{ cm}$ .
26. Un globo inflado en la forma de una esfera de radio  $12 \text{ cm}$  tiene una carga total de  $7 \mu\text{C}$  uniformemente distribuida en su superficie. Calcule la intensidad del campo eléctrico a las siguientes distancias desde el centro del globo: a)  $10 \text{ cm}$ , b)  $12.5 \text{ cm}$  y c)  $30 \text{ cm}$ .
27. Una esfera aislante de  $8 \text{ cm}$  de diámetro tiene una carga de  $+5.7 \mu\text{C}$  uniformemente distribuida a través de su volumen. Calcule la carga encerrada por una super-

- ficie esférica con los siguientes radios. a)  $r = 2 \text{ cm}$  y b)  $r = 6 \text{ cm}$ .
28. Una esfera aislante de radio  $10 \text{ mm}$  tiene una densidad de carga de  $6 \times 10^{-3} \text{ C/m}^3$ . Calcule el flujo eléctrico a través de una superficie esférica concéntrica de radio: a)  $r = 5 \text{ mm}$ , b)  $r = 10 \text{ mm}$  y c)  $r = 25 \text{ mm}$ .
29. Una esfera sólida de radio  $40 \text{ cm}$  tiene una carga total positiva de  $26 \mu\text{C}$  uniformemente distribuida a través de su volumen. Calcule la intensidad del campo eléctrico a las siguientes distancias desde el centro de la esfera. a)  $0 \text{ cm}$ , b)  $10 \text{ cm}$ , c)  $40 \text{ cm}$ , d)  $60 \text{ cm}$ .
30. Una esfera aislante de  $10 \text{ cm}$  de radio tiene una densidad de carga uniforme a través de su volumen. Si la magnitud del campo eléctrico a una distancia de  $5 \text{ cm}$  desde el centro es  $8.6 \times 10^4 \text{ N/C}$ , ¿cuál es la magnitud del campo a  $15 \text{ cm}$  del centro?
31. Una distribución de carga esféricamente simétrica tiene una densidad de carga dada por  $\rho = a/r$ , donde  $a$  es constante. Encuentre el campo eléctrico como función de  $r$ . (Véase la nota en el problema 54.)
32. La carga por unidad de longitud en un filamento recto y largo es  $-90 \mu\text{C/m}$ . Determine el campo eléctrico a las siguientes distancias del filamento: a)  $10 \text{ cm}$ , b)  $20 \text{ cm}$ , c)  $100 \text{ cm}$ .
33. Un filamento recto de  $7 \text{ m}$  de longitud cargado uniformemente tiene una carga total positiva de  $2 \mu\text{C}$ . Una cartulina cilíndrica no cargada de  $2 \text{ cm}$  de longitud y  $10 \text{ cm}$  de radio envuelve al filamento en su centro, con el filamento como eje del cilindro. Utilizando cualquier razonable aproximación, determine a) el campo eléctrico en la superficie del cilindro y b) el flujo total a través del cilindro.
34. Un cascarón cilíndrico de radio  $7 \text{ cm}$  y longitud  $240 \text{ cm}$  tiene su carga uniformemente distribuida en su superficie. La intensidad del campo eléctrico en un punto a  $19 \text{ cm}$  radialmente hacia afuera de su eje (medido desde el punto medio del cascarón) es de  $3.6 \times 10^4 \text{ N/C}$ . Use relaciones de aproximación para determinar: a) la carga neta sobre el cascarón y b) el campo eléctrico en un punto a  $4 \text{ cm}$  del eje, medido desde el punto medio.
35. Considere una distribución de carga cilíndrica larga de radio  $R$  con una densidad de carga uniforme  $\rho$ . Encuentre el campo eléctrico a una distancia  $r$  del eje donde  $r < R$ .
36. Una pared no conductora tiene una densidad de carga uniforme de  $8.6 \mu\text{C/cm}^2$ . ¿Cuál es el campo eléctrico a una distancia de  $7 \text{ cm}$  de la pared? ¿El resultado variaría si se cambia la distancia a la pared?
37. Una lámina plana y larga tiene una carga por unidad de área de  $9.0 \mu\text{C/m}^2$ . Determine la intensidad de campo eléctrico *precisamente sobre la superficie* de la lámina, medido desde el punto medio de la lámina.

### Sección 24.4 Conductores en equilibrio electrostático

38. Un cascarón esférico conductor de radio  $15 \text{ cm}$  tiene una carga neta de  $-6.4 \mu\text{C}$  uniformemente distribuida en su superficie. Determine el campo eléctrico en los

puntos. a) precisamente afuera del cascarón y b) dentro del cascarón.

39. Una barra de metal recta y larga tiene un radio de 5 cm y una carga por unidad de longitud de 30 nC/m. Encuentre el campo eléctrico a las siguientes distancias del eje de la barra: a) 3 cm, b) 10 cm y c) 100 cm.
40. Una placa cuadrada de cobre de 50 cm de lado se coloca en un extenso campo eléctrico de  $8 \times 10^4$  N/C dirigido perpendicularmente a la placa. Determine a) la densidad de carga en cada cara de la placa y b) la carga total en cada cara.
41. Una placa delgada conductora de 50 cm de lado se encuentra extendida en el plano  $xy$ . Si una carga total de  $4 \times 10^{-2}$  C se deposita sobre la placa, determine: a) la densidad de carga en la placa, b) el campo eléctrico precisamente sobre la placa y c) el campo eléctrico precisamente bajo la placa.
42. Una placa plana delgada y muy grande de aluminio de área  $A$  tiene una carga total  $Q$  uniformemente distribuida sobre sus superficies. Si la misma carga se esparce de manera uniforme sobre la superficie superior de otra placa idéntica de vidrio, compare los campos eléctricos precisamente sobre el centro de la superficie superior de cada placa.
43. Una esfera sólida de cobre de 15 cm de radio tiene una carga total de 40 nC. Determine el campo eléctrico a las siguientes distancias medidas desde el centro de la esfera: a) 12 cm, b) 17 cm, c) 75 cm. d) ¿Cómo cambiarían las respuestas si la esfera fuera hueca?
44. Una esfera conductora hueca (pero no necesariamente vacía) tiene una carga uniforme por unidad de área de  $+\sigma$  en la superficie externa y de  $-\sigma$  en su superficie interna. Con esta información, a) ¿qué se puede concluir acerca de la carga en la región interna de la esfera hueca? b) ¿Qué se puede decir acerca del campo eléctrico precisamente afuera de la esfera?
45. Una esfera conductora sólida de 2 cm de radio tiene una carga positiva de  $8 \mu\text{C}$ . Un cascarón esférico conductor de radio interno de 4 cm y radio externo de 5 cm concéntrico con la esfera sólida, tiene una carga neta de  $-4 \mu\text{C}$ . Encuentre el campo eléctrico a las siguientes distancias desde el centro de esta configuración de carga: a)  $r = 1$  cm, b)  $r = 3$  cm, c)  $r = 4.5$  cm y d) 7 cm.
46. Considere los datos proporcionados en el problema 45. Calcule la carga neta encerrada por una superficie gaussiana concéntrica con los siguientes radios: a)  $r = 1$  cm, b)  $r = 3$  cm, c)  $r = 4.5$  cm y d)  $r = 7$  cm.
47. Un alambre recto y largo es rodeado por un cilindro hueco cuyo eje coincide con el alambre. El alambre sólido tiene una carga por unidad de longitud de  $+\lambda$  y el cilindro hueco tiene una carga neta por unidad de longitud de  $+2\lambda$ . Con esta información, utilice la ley de Gauss para determinar: a) la carga por unidad de longitud en las superficies interna y externa del cilindro hueco y b) el campo eléctrico fuera del cilindro hueco a una distancia  $r$  del eje.
48. El campo eléctrico en la superficie de un conductor de forma irregular varía de  $5.6 \times 10^4$  N/C a  $2.8 \times 10^4$  N/C. Calcule la densidad de carga superficial local en un punto sobre la superficie donde el radio de curvatura de la superficie es a) el mayor y b) el menor.

Sección 24.6 Deducción de la ley de Gauss

49. Una esfera de radio  $R$  rodea a una carga puntual  $Q$  localizada en su centro. a) Demuestre que el flujo eléctrico a través de una tapa circular de medio ángulo  $\theta$  (véase figura 24.27) está dado por

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta)$$

- b) ¿Cuál es el flujo para  $\theta = 90^\circ$ ? c) ¿Cuál es el flujo para  $\theta = 180^\circ$ ?

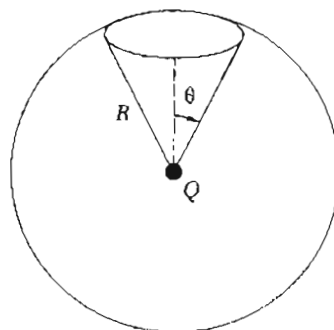


Figura 24.27 (Problema 49)

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

50. Para la configuración que se ve en la figura 24.28, suponga que  $a = 5$  cm,  $b = 20$  cm y  $c = 25$  cm. Además, suponga que el campo eléctrico en un punto a 10 cm del centro al ser medido es de  $3.6 \times 10^3$  N/C radialmente hacia adentro, mientras que el campo en un punto a 50 cm del centro es de  $2.0 \times 10^2$  N/C radialmente hacia afuera. Con esta información, encuentre a) la carga sobre la esfera aislante, b) la carga neta sobre la esfera conductora hueca y c) la carga total en las superficies interna y externa, respectivamente, de la esfera conductora hueca.

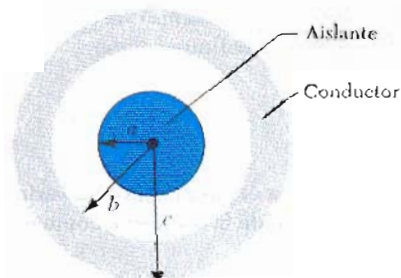


Figura 24.28 (Problemas 50 y 51).

51. Una esfera aislante sólida de radio  $a$  tiene una densidad de carga  $\rho$  y una carga total  $Q$ . Concéntrica con esta esfera hay una esfera conductora hueca, no cargada, de radio interno  $b$  y radio externo  $c$ , como en la figura 24.28. a) Determine la intensidad del campo eléctrico en las regiones:  $r < a$ ,  $a < r < b$ ,  $b < r < c$  y  $r > c$ . b) Determine

la carga inducida por unidad de área en las superficies interna y externa de la esfera hueca.

52. Considere una esfera aislante de radio  $R$  que tiene una densidad de carga uniforme por unidad de volumen  $\rho$ . Grafique la magnitud del campo eléctrico  $E$  como función de la distancia al centro de la esfera  $r$ . Sea el rango de  $r$  sobre el intervalo  $0 < r < 3R$  y grafique  $E$  en unidades de  $\rho R/\epsilon_0$ .
53. Una esfera hueca aislante tiene una densidad de carga uniforme  $\rho$ . Sus radios interior y exterior son  $a$  y  $b$ , respectivamente. Utilice la ley de Gauss para determinar la expresión del campo eléctrico en las regiones: a)  $r < a$ , b)  $a < r < b$ , c)  $r > b$ .
54. Considere una esfera sólida aislante de radio  $b$  con una densidad de carga no uniforme  $\rho = Cr$ . Determine la carga contenida dentro de un radio cuando a)  $r < b$ , y b)  $r > b$ . Nota: el elemento de volumen  $dV$  para un cascarón esférico de radio  $r$  y espesor  $dr$  es igual a  $4\pi r^2 dr$ .
55. Una esfera sólida aislante de radio  $R$  tiene una densidad de carga no uniforme que varía con  $r$  de acuerdo con la expresión  $\rho = Ar^2$  donde  $A$  es constante y  $r < R$  está medido desde el centro de la esfera. a) Demuestre que el campo eléctrico afuera ( $r > R$ ) de la esfera está dado por la expresión  $E = AR^3/5\epsilon_0 r^2$ . b) Demuestre que el campo eléctrico en el interior ( $r < R$ ) de la esfera está dado por  $E = Ar^3/5\epsilon_0$ . (Sugerencia: observe que la carga total  $Q$  en la esfera es igual a la integral  $\rho dV$  donde  $r$  se extiende de 0 a  $R$ ; también note que la carga  $q$  dentro del radio  $r < R$  es menor que  $Q$ . Para evaluar la integral, se debe recordar que el elemento de volumen  $dV$  para un cascarón esférico de radio  $r$  y espesor  $dr$  es igual a  $4\pi r^2 dr$ .)
56. Un cilindro aislante de longitud infinita y de radio  $R$  tiene una densidad de carga que varía con el radio como

$$\rho = \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right),$$

donde  $\rho_0$ ,  $a$  y  $b$  son constantes positivas y  $r$  es la distancia medida desde el eje del cilindro. Utilizando la ley de Gauss determine el campo eléctrico a las distancias radiales: a)  $r < R$  y b)  $r > R$ .

57. El flujo de cualquier campo vectorial  $V$  a través de una superficie puede definirse como

$$\Phi_V = \int_S V \cdot dA$$

Campos radiales cuyas magnitudes varían inversamente con el cuadrado de la distancia, como el campo gravitacional

$$g = \frac{F_g}{m}$$

también obedecen la ley de Gauss. Utilizando la ley de Gauss (gravitacional), determine el campo gravitacional  $g$  en un punto a una distancia  $r$  del centro de la Tierra donde  $r < R_e$ . Suponga que la densidad de la Tierra es uniforme.

58. Dos láminas infinitas no conductoras con carga están paralelas una de la otra como se muestra en la figura

24.29. La lámina de la izquierda tiene una densidad de carga superficial uniforme  $\sigma$  y la del lado derecho tiene una densidad de carga uniforme de  $-\sigma$ . Calcule el valor del campo eléctrico en los puntos: a) afuera a la izquierda, b) entre las láminas y c) a la derecha de las dos láminas. (Sugerencia: véase ejemplo 24.6.)

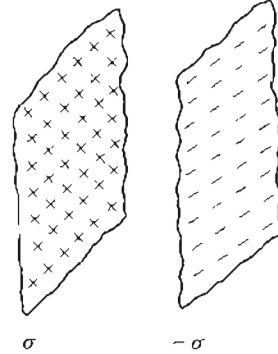


Figura 24.29 (Problemas 58 y 59).

59. Repita los cálculos del problema 58 cuando ambas láminas tienen densidades de cargas positivas de valor  $\sigma$ .
60. Una superficie cerrada con dimensiones  $a = b = 0.4$  m y  $c = 0.6$  m está localizada como se muestra en la figura 24.30. El campo eléctrico a través de la región no es uniforme y está dado por la expresión:

$$E = (3 + 2x^2)\mathbf{i} \text{ N/C}$$

donde  $x$  está en metros. Calcule el flujo eléctrico neto que sale de la superficie cerrada. ¿Qué carga neta está encerrada por la superficie?

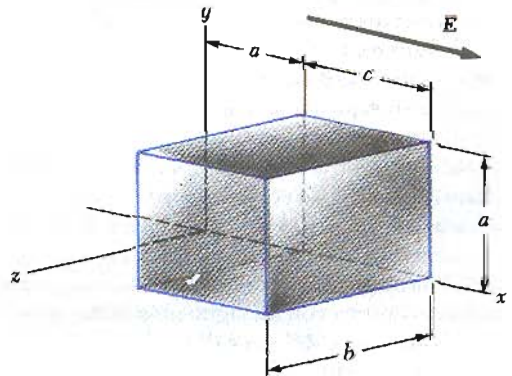


Figura 24.30 (Problema 60).

61. Una placa de material aislante (infinita en dos de sus tres dimensiones) tiene una densidad de carga uniforme positiva  $\rho$  como se ve en figura 24.31. a) Demuestre que el campo eléctrico a una distancia  $x$  de su centro y dentro de la placa es  $E = \rho x/\epsilon_0$ . b) Suponga que un electrón de carga  $-e$  y masa  $m$  se coloca dentro de la placa. Si se abandona en reposo a una distancia  $x$  del centro, demuestre que el electrón tendrá un movimiento armónico simple con una frecuencia dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho e}{m\epsilon_0}}$$

62. Una placa de material aislante tiene una densidad de carga positiva *no uniforme* dada por  $\rho = Cx^2$ , donde  $x$  se mide desde el centro de la placa como en la figura 24.31 y  $C$  es constante. La placa es infinita en las direcciones  $y$  y  $z$ . Deduzca la expresión del campo eléctrico en a) la región exterior de la placa y b) en la región interior de la placa ( $-d/2 < x < d/2$ ).

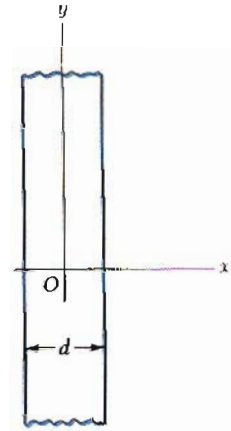


Figura 24.31 (Problemas 61 y 62).

# 25

## Potencial eléctrico



*Jennifer está tocando una esfera cargada que recibe un potencial aproximadamente de 100 000 volts. El aparato que genera este alto voltaje se llama generador Van de Graaff. ¿Por qué supone usted que el pelo de Jennifer está parado y sus extremos parecen las púas de un puercoespín? ¿Por qué es importante que ella esté parada sobre un pedestal aislado de tierra? (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)*

**E**l concepto de energía se introdujo por primera vez en el capítulo 8, en relación con las fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y la fuerza elástica de un resorte. Aplicando la ley de la conservación de la energía, a menudo puede evitarse tener que trabajar directamente con las fuerzas para resolver diversos problemas mecánicos. En este capítulo se verá que el concepto también es muy valioso en el estudio de la electricidad. Como la fuerza electrostática dada por la ley de Coulomb es conservativa, es posible describir de manera conveniente los fenómenos electrostáticos en términos de una energía potencial eléctrica. Esta idea permite definir una cantidad escalar llamada *potencial eléctrico*. Debido a que el potencial es una función escalar de la posición, ofrece una manera más sencilla de describir los fenómenos electrostáticos que la que presenta el campo eléctrico. En capítulos posteriores se verá que el concepto de potencial eléctrico tiene un gran valor práctico. De hecho, el voltaje medido entre dos puntos cualesquiera de un circuito eléctrico es simplemente la diferencia de potencial eléctrico entre los puntos.

### 25.1 DIFERENCIA DE POTENCIAL Y POTENCIAL ELÉCTRICO

En el capítulo 14 se demostró que la fuerza gravitacional es conservativa. Como la fuerza electrostática, dada por la ley de Coulomb, tiene la misma forma que la ley de gravitación universal, se deduce que la fuerza electrostática también es conservativa. Por consiguiente es posible definir una función de energía potencial asociada con tal fuerza.

Cuando se coloca una carga de prueba  $q_0$  en un campo electrostático  $\mathbf{E}$ , la fuerza eléctrica sobre la carga de prueba es  $q_0\mathbf{E}$ . La fuerza  $q_0\mathbf{E}$  es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas sobre  $q_0$  por las diversas cargas que producen el campo  $\mathbf{E}$ . Se deduce así que la fuerza  $q_0\mathbf{E}$  es conservativa, ya que cada una de las fuerzas gobernadas por la ley de Coulomb es conservativa. El trabajo realizado por la fuerza eléctrica  $q_0\mathbf{E}$  sobre la carga de prueba, en un desplazamiento infinitesimal  $d\mathbf{s}$ , está dado por

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (25.1)$$

Por definición, el trabajo efectuado por una fuerza conservativa es igual al valor negativo del cambio en la energía potencial  $dU$ ; por consiguiente, se ve que

$$dU = -q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (25.2)$$

Para un desplazamiento finito de la carga de prueba entre los puntos A y B, el cambio en la energía potencial está dado por

$$\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (25.3)$$

Cambio en la energía potencial

La integral en la ecuación 25.3 se considera a lo largo de la trayectoria por la cual se mueve  $q_0$  desde A a B y se llama *integral de línea* o *integral de trayectoria*. Como la fuerza  $q_0\mathbf{E}$  es conservativa, esta integral no depende de la trayectoria tomada entre A y B.

La diferencia de potencial  $V_B - V_A$ , entre los puntos A y B se define como el cambio de energía potencial dividido entre la carga de prueba  $q_0$ :

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (25.4)$$

Diferencia de potencial

No debe confundirse la diferencia de potencial con la energía potencial. La diferencia de potencial es proporcional a la energía potencial, y por la ecuación 25.4 se ve que se relaciona por medio de  $\Delta U = q_0 \Delta V$ . Como la energía potencial es escalar, también el potencial eléctrico es escalar. Observe que el cambio de energía potencial de la carga es el valor negativo del trabajo realizado por la fuerza eléctrica. De donde se ve que:

la diferencia de potencial  $V_B - V_A$  es igual al trabajo por unidad de carga que debe realizar un agente externo para mover la carga de prueba de A hasta B, sin que cambie la energía cinética.

La ecuación 25.4 define únicamente diferencias de potencial. Es decir, sólo tienen significado las *diferencias* de  $V$ . Con frecuencia se toma la función potencial como igual a cero en algún punto conveniente. Por lo general se tomará el potencial cero en el punto infinito (es decir, un punto infinitamente lejos de las cargas que producen el campo eléctrico). Con esta selección, se puede decir que



el potencial de un punto arbitrario es igual al trabajo requerido por unidad de carga para llevar desde el infinito hasta ese punto una carga de prueba positiva. Así, si en la ecuación 25.4 se toma  $V_A = 0$  en el infinito, entonces el potencial en cualquier punto  $P$  está dado por

$$V_P = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{25.5}$$

En realidad,  $V_P$  representa la diferencia de potencial entre el punto  $P$  y un punto en el infinito. (La ecuación 25.5 es un caso especial de la ecuación 25.4.)

Como la diferencia de potencial es una medida de la energía por unidad de carga, las unidades del potencial en el SI son joules por coulomb, la cual se define como una unidad llama **volt** (V):

$$1 \text{ V} \equiv 1 \text{ J/C}$$

**Definición de volt**

Es decir, se debe realizar 1 J de trabajo para llevar una carga de 1 C a través de una diferencia de potencial de 1 V. La ecuación 25.4 muestra que la diferencia de potencial también tiene unidades de campo eléctrico multiplicadas por unidades de distancia. Desde este punto de vista, se deduce que las unidades de campo eléctrico en el SI también pueden expresarse como volt por metro:

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

Una unidad de energía utilizada a menudo en la física atómica y nuclear es el **electrón-volt**, la cual se define como la energía que un electrón (o protón) gana al moverse a través de una diferencia de potencial igual a 1 V. Ya que  $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$  y como la carga fundamental es igual  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , se ve que un electrón volt (eV) está relacionado con el joule a través de

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \tag{25.6}$$

**Electrón-volt**

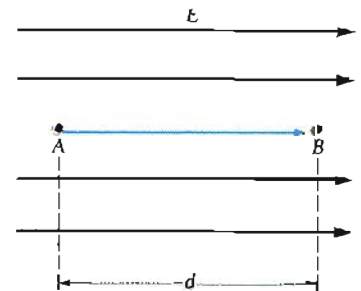
Por ejemplo, un electrón en el rayo de un cinescopio de TV (tubo de rayos catódicos) tiene una rapidez de  $5 \times 10^7 \text{ m/s}$ . Esto corresponde a una energía cinética de  $1.1 \times 10^{-15} \text{ J}$ , lo cual equivale a  $7.1 \times 10^3 \text{ eV}$ . Un electrón así tiene que ser acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 7.1 kV para alcanzar esa velocidad.

**25.2 DIFERENCIAS DE POTENCIAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME**

En esta sección, se describirá la diferencia de potencial entre dos puntos en un campo eléctrico *uniforme*. La diferencia de potencial es independiente de la trayectoria entre los puntos; es decir, el trabajo realizado en llevar una carga de prueba desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$  es el mismo a lo largo de todas las trayectorias. Esto confirma que un campo eléctrico uniforme y estático es conservativo. Por definición, una fuerza es conservativa si tiene esta propiedad (véase Sección 8.1).

Primero, consideremos un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje  $x$ , como en la figura 25.1. Se puede calcular la diferencia de potencial entre dos puntos  $A$  y  $B$ , separados por una distancia  $d$ , donde  $d$  es medida paralela a las líneas de campo. Si se aplica la ecuación 25.4 a esta situación, se obtiene

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^B E \cos 0^\circ ds = - \int_A^B E ds$$



**Figura 25.1** El desplazamiento de una partícula cargada desde  $A$  hasta  $B$  en presencia de un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}$ .

**Diferencia de potencial en un campo  $E$  uniforme**

Como  $E$  es constante, se puede sacar del símbolo de la integral, dando

$$\Delta V = -E \int_A^B ds = -Ed \tag{25.7}$$

El signo menos resulta del hecho de que el punto  $B$  está a un potencial más bajo que el punto  $A$ , es decir,  $V_B < V_A$ .

Ahora supóngase que la carga de prueba  $q_0$  se mueve de  $A$  a  $B$ . El cambio en su energía potencial se puede determinar a partir de las ecuaciones 25.4 y 25.7:

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 Ed \tag{25.8}$$

De este resultado, se ve que si  $q_0$  es positiva,  $\Delta U$  es negativa. Esto significa que una carga positiva perderá energía potencial eléctrica cuando se mueva en la dirección del campo eléctrico. Es análogo a cuando una masa pierde energía potencial gravitacional al perder altura debido a la gravedad. Si la carga de prueba se abandona desde el reposo en este campo eléctrico, experimentará una fuerza eléctrica  $q_0 E$  en la dirección de  $E$  (hacia la derecha en la figura 25.1). Por lo tanto, es acelerada hacia la derecha, ganando energía cinética. Así, la energía cinética ganada es igual a la energía potencial perdida.

Por otro lado, si la carga de prueba  $q_0$  es negativa, entonces  $\Delta U$  es positiva y la situación se invierte. Una carga negativa gana energía eléctrica cuando se mueve en la dirección del campo eléctrico. Si una carga negativa se abandona en reposo en un campo  $E$ , la dirección de la aceleración es opuesta al campo eléctrico.<sup>1</sup>

Ahora considérese el caso más general de una partícula que se mueve entre dos puntos cualesquiera en un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje  $x$ , como en la figura 25.2. Si  $d$  representa el vector desplazamiento entre el punto  $A$  y  $B$ , la ecuación 25.4 da

$$\Delta V = - \int_A^B E \cdot ds = -E \cdot \int_A^B ds = -E \cdot d \tag{25.9}$$

donde nuevamente se está sacando  $E$  de la integral ya que es una constante. Sin embargo, el cambio en la energía potencial de la carga es:

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E \cdot d \tag{25.10}$$

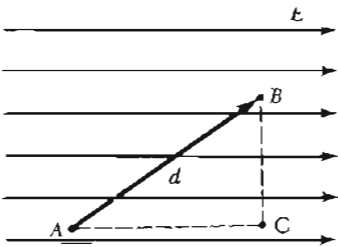


Figura 25.2 Campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje  $x$ . El punto  $B$  está a un potencial más bajo que el punto  $A$ . Los puntos  $B$  y  $C$  están al mismo potencial

Finalmente, nuestros resultados muestran que todos los puntos en un plano perpendicular al campo eléctrico uniforme están al mismo potencial. Esto puede verse en la figura 25.2, donde la diferencia de potencial  $V_B - V_A$  es igual a la  $V_C - V_A$ . Por lo tanto,  $V_B = V_C$ .

**Superficie equipotencial**

El nombre de **superficie equipotencial** se da a cualquier superficie que contiene una distribución continua de puntos que tienen el mismo potencial.

Ya que  $\Delta U = q_0 \Delta V$ , nótese que *no* se realiza trabajo al mover una carga de prueba entre dos puntos de una superficie equipotencial. Las superficies equipotenciales de un campo eléctrico uniforme constan de una familia de planos *perpendiculares* al campo (Fig. 25.2). Superficies equipotenciales para campos con otras simetrías serán descritos en secciones posteriores.

<sup>1</sup> Se sabe que cuando una partícula cargada se acelera, ésta pierde energía al radiar ondas electromagnéticas.

**EJEMPLO 25.1 El campo entre dos placas paralelas de cargas opuestas.**

Una batería de 12 V se conecta entre dos placas paralelas como se muestra en la figura 25.3. La separación entre las placas es de 0.3 cm, y el campo eléctrico se supone uniforme. (Esta suposición es razonable si la separación de las placas es pequeña comparada con el tamaño de las placas y si además no se consideran puntos cercanos a los bordes de las placas). Determine el campo eléctrico entre las placas.

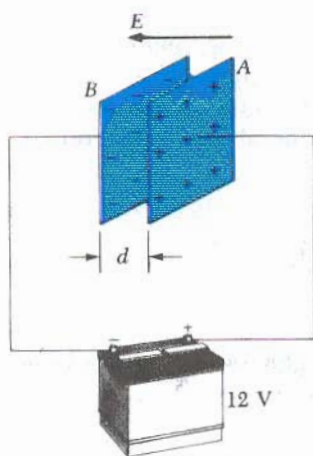


Figura 25.3 (Ejemplo 25.1) Una batería de 12 V se conecta a dos placas paralelas. El campo eléctrico entre las placas tiene una magnitud dada por la diferencia de potencial dividida por la separación  $d$  de las placas

**Solución** El campo eléctrico está dirigido desde la placa positiva hacia la placa negativa. Se ve que la placa positiva (la de la derecha) está a un potencial *mayor* que la placa negativa. Note que la diferencia de potencial entre la placa B y A es igual a la diferencia de potencial entre las terminales de la batería. Esto puede entenderse ya que todos los puntos sobre un conductor en equilibrio están al mismo potencial,<sup>2</sup> y por consiguiente no existe ninguna diferencia de potencial entre la terminal de la batería y cualquier porción de la placa a la que esté conectada. Por lo tanto, la magnitud del campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12 \text{ V}}{0.3 \times 10^{-2} \text{ m}} = 4.0 \times 10^3 \text{ V/m}$$

En el capítulo siguiente se examinará con más detalle esta configuración, conocida como *capacitor de placas paralelas*.

<sup>2</sup> El campo eléctrico desaparece dentro de un conductor en equilibrio electrostático, por lo que la integral de línea  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  entre cualquiera dos puntos dentro de un conductor debe ser cero. Una discusión más profunda de este punto se tendrá en la sección 25.6.

**EJEMPLO 25.2 Movimiento de un protón en un campo eléctrico uniforme** □

Se libera un protón desde el reposo en un campo eléctrico uniforme de  $8 \times 10^4 \text{ V/m}$  dirigido a lo largo del eje  $x$  positivo (Fig. 25.4). El protón se desplaza 0.5 m en la dirección de  $\mathbf{E}$ . a) Determine el cambio en el potencial eléctrico entre los puntos A y B.

Utilizando la ecuación 25.4 y observando que el desplazamiento está en la dirección del campo, se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_B - V_A = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^d E \, dx = -E \int_0^d dx \\ &= -Ed = - \left( 8 \times 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) (0.5 \text{ m}) \end{aligned}$$

$$-4 \times 10^4 \text{ V}$$

Entonces, el potencial eléctrico de un protón decrece cuando se mueve de A a B.

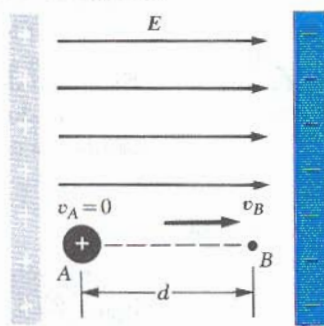


Figura 25.4 (Ejemplo 25.2) Un protón se acelera desde A hasta B en la dirección del campo eléctrico.

b) Determine el cambio en la energía potencial del protón para este desplazamiento.

$$\begin{aligned} \Delta U &= q_0 \Delta V = e \Delta V \\ &= (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-4 \times 10^4 \text{ V}) \\ &= -6.4 \times 10^{-15} \text{ J} \end{aligned}$$

El signo negativo significa que la energía potencial de un protón decrece cuando se mueve en la dirección de  $\mathbf{E}$ . Esto es correcto ya que conforme el protón *acelera* en la dirección de  $\mathbf{E}$ , gana energía cinética y al mismo tiempo pierde energía potencial (la energía total se conserva).

c) Determine la velocidad del protón después de haber tenido un desplazamiento de 0.5 m.

Si no existen fuerzas que actúen sobre el protón, aparte de la fuerza eléctrica conservativa, se puede aplicar el principio de conservación de la energía mecánica en la forma  $\Delta K + \Delta U = 0$ ; es decir, *el decrecimiento en la energía potencial debe ser acompañado por un incremento igual en la energía cinética*. Ya que la masa del protón tiene un valor de  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , se obtiene

$$\Delta K + \Delta U = (\frac{1}{2}m_e v^2 - 0) - 6.4 \times 10^{-15} \text{ J} = 0$$

$$v^2 = \frac{2(6.4 \times 10^{-15}) \text{ J}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 7.66 \times 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 2.77 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Si un electrón fuera acelerado bajo las mismas circunstancias, su velocidad tendería a la velocidad de la luz y el problema tendría que ser tratado por la mecánica relativista (Cap. 39).

### 25.3 POTENCIAL ELÉCTRICO Y ENERGÍA POTENCIAL DEBIDA A CARGAS PUNTALES

Considérese una carga puntual positiva aislada  $q$  como en la figura 25.5. Se recordará que una carga puntual produce un campo eléctrico que es radial hacia afuera de la carga. Para calcular el potencial eléctrico a una distancia  $r$  de la carga, primero se comenzará con la expresión general para la diferencia de potencial dada por

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

En virtud de que el campo eléctrico debido a una carga puntual está dado por  $\mathbf{E} = kq\hat{r}/r^2$  donde  $\hat{r}$  es un vector unitario dirigido desde la carga hacia el punto del campo, la cantidad  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  puede expresarse como

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{s}$$

El producto punto  $\hat{r} \cdot d\mathbf{s} = ds \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\hat{r}$  y  $d\mathbf{s}$  como en la figura 25.5. Sin embargo, nótese que  $ds \cos \theta$  es la proyección de  $d\mathbf{s}$  sobre  $\hat{r}$ , así que  $ds \cos \theta = dr$ . Es decir, cualquier desplazamiento  $d\mathbf{s}$  produce un cambio  $dr$  en la magnitud de  $r$ . Con estas sustituciones, se encuentra que  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (kq/r^2) dr$ , así la expresión para la diferencia de potencial viene a estar dada por

$$V_B - V_A = - \int E_r dr = -kq \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[ \frac{kq}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = kq \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (25.11)$$

La integral  $-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  es independiente de la trayectoria entre A y B, como debe ser. (Se tenía la conclusión que el campo eléctrico debido a una carga puntual es un campo conservativo, por analogía con el campo gravitacional de una masa puntual.) Además, la ecuación 25.11 expresa el importante resultado de que la diferencia de potencial entre dos puntos A y B depende solamente de las coordenadas radiales  $r_A$  y  $r_B$ . Es costumbre elegir el potencial de referencia para cero en  $r_A = \infty$ . (Lo que es natural ya que  $V \propto 1/r_A$  y como  $r_A \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow 0$ .) Con esta elección, el potencial eléctrico debido a una carga puntual a cualquier distancia  $r$  de la carga está dado por

$$V = k \frac{q}{r} \quad (25.12)$$

De aquí se puede observar que  $V$  es constante sobre una superficie esférica de radio  $r$ . Por lo que podemos concluir que las superficies equipotenciales (superfi-

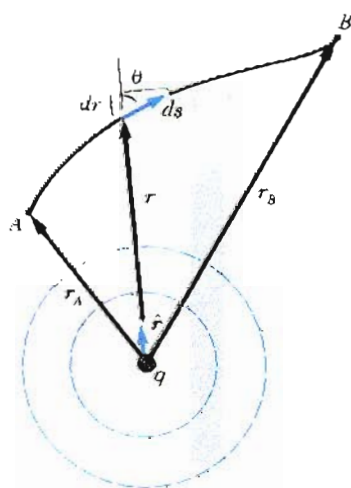


Figura 25.5 La diferencia de potencial entre los puntos A y B debida a la carga puntual  $q$  depende sólo de las coordenadas radiales inicial y final  $r_A$  y  $r_B$ , respectivamente

cies en las cuales  $V$  permanece constante) para una carga puntual aislada, constan en una familia de esferas concéntricas con la carga, como se muestra en la figura 25.5. Obsérvese que las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de fuerza eléctrica, como fue el caso para un campo eléctrico uniforme.

El potencial eléctrico de dos a más cargas puntuales se obtiene aplicando el principio de superposición. Es decir, el potencial total en un punto dado  $P$  debido a varias cargas puntuales es la suma de los potenciales debidos a cada carga individual. Para un grupo de cargas, se puede escribir el potencial total en  $P$  en la forma

$$V = k \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (25.13)$$

donde nuevamente se toma el potencial cero en el infinito y  $r_i$  es la distancia del punto  $P$  a la carga  $q_i$ . Nótese que la suma de la ecuación 25.13 es una *suma algebraica* de escalares y no una suma vectorial (la cual se utilizó para calcular el campo eléctrico de un grupo de cargas). Por lo tanto, es mucho más fácil evaluar  $V$  que evaluar  $\mathbf{E}$ .

Ahora consideremos la energía potencial de interacción de un sistema de partículas cargadas. Si  $V_1$  es el potencial eléctrico debido a la carga  $q_1$  en el punto  $P$ , entonces el trabajo requerido para traer una segunda carga,  $q_2$ , desde el infinito hasta el punto  $P$  sin aceleración está dado por  $q_2 V_1$ . Por definición, el trabajo es igual a la energía potencial  $U$  del sistema de dos partículas cuando las partículas están separadas por una distancia  $r_{12}$  (Fig. 25.6).

Por lo tanto se puede expresar la energía potencial como

$$U = q_2 V_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (25.14)$$

Nótese que si las cargas son del mismo signo,  $U$  es positiva.<sup>3</sup> Esto es congruente con el hecho de que cargas iguales se repelen, por lo que el trabajo deberá realizarse *sobre* el sistema para traer a las cargas más cerca una de la otra. Recíprocamente, si las cargas son de signos opuestos, la fuerza es de atracción y  $U$  es negativa. Esto significa que debe hacerse trabajo negativo para acercar cargas de signos opuestos una a la otra.

Si existen más de dos partículas cargadas en un sistema, la energía potencial total puede obtenerse por el cálculo de  $U$  para todos los *pares* de cargas y sumar los términos algebraicamente. Como ejemplo, la energía potencial total de las tres cargas que se muestran en la figura 25.7 está dada por

$$U = k \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \quad (25.15)$$

Físicamente, se puede interpretar esto como sigue: Imagínese que  $q_1$  se coloca en la posición que aparece en la figura 25.7, pero  $q_2$  y  $q_3$  están en el infinito. El trabajo requerido para traer a  $q_2$  desde el infinito a la posición cercana a  $q_1$  es  $kq_1 q_2 / r_{12}$ , la cual es el primer término en la ecuación 25.15. Los otros dos términos en la ecuación 25.15 representan el trabajo requerido para traer desde el infinito a  $q_3$  hasta la posición cercana a  $q_1$  y  $q_2$ . (Podría demostrarse que el resultado es independiente del orden en el cual las cargas fueron transportadas).

<sup>3</sup> La expresión para la energía potencial eléctrica para dos cargas, ecuación 25.14, es de la *misma* forma que la energía potencial gravitacional de dos masas dada por  $Gm_1 m_2 / r$  (Cap. 14). La similitud no debe de sorprender ya que ambas son derivadas de una ley de la fuerza del inverso del cuadrado de la distancia.

### Potencial de varias cargas puntuales

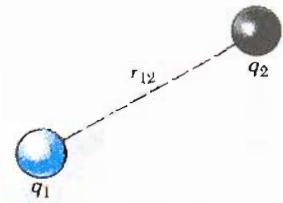


Figura 25.6 Si dos cargas puntuales están separadas por una distancia  $r_{12}$  la energía potencial del par de cargas está dada por  $kq_1 q_2 / r_{12}$ .

### Energía potencial eléctrica de dos cargas

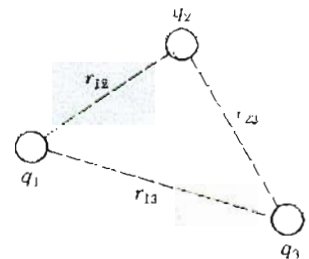


Figura 25.7 Tres cargas puntuales se colocan en las posiciones que se muestran. La energía potencial del sistema de cargas está dada por la ecuación 25.15

**EJEMPLO 25.3 Potencial debido a dos cargas puntuales**

Una carga puntual de  $5 \mu\text{C}$  se coloca en el origen y una segunda carga puntual de  $-2 \mu\text{C}$  se localiza sobre el eje  $x$  en la posición  $(3, 0) \text{ m}$ , como en la figura 25.8a. a) Si se toma como potencial cero en el infinito, determine el potencial eléctrico total debido a estas cargas en el punto  $P$ , cuyas coordenadas son  $(0, 4) \text{ m}$ .

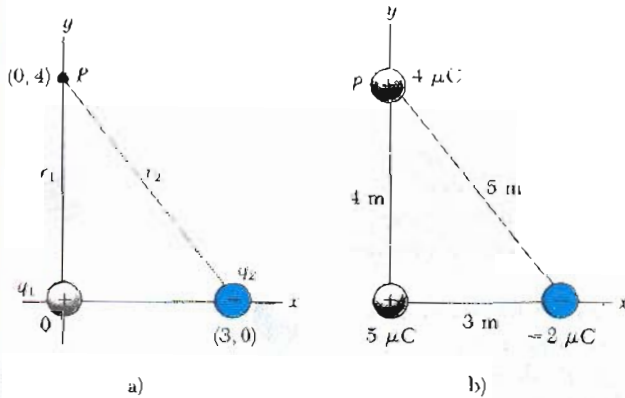


Figura 25.8 (Ejemplo 25.3) El potencial eléctrico en el punto  $P$  debido a las dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga individual.

El potencial total en  $P$  debido a las dos cargas está dado por

$$V_P = k \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

Como  $r_1 = 4 \text{ m}$  y  $r_2 = 5 \text{ m}$ , se obtiene

$$V_P = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left( \frac{5 \times 10^{-6} \text{ C}}{4 \text{ m}} - \frac{2 \times 10^{-6} \text{ C}}{5 \text{ m}} \right) = 7.65 \times 10^3 \text{ V}$$

b) ¿Cuánto trabajo se requiere para traer una tercera carga puntual de  $4 \mu\text{C}$  desde el infinito al punto  $P$ ?

$$W = q_3 V_P = (4 \times 10^{-6} \text{ C})(7.65 \times 10^3 \text{ V})$$

Ya que  $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ ,  $W$  se reduce a

$$W = 3.06 \times 10^{-2} \text{ J}$$

**Ejercicio 1** Encuentre la energía potencial total del sistema de tres cargas con la configuración que se ve en la figura 25.8b.

**Solución**  $6.0 \times 10^{-4} \text{ J}$ .

**25.4 POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA CONTINUA**

El potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua puede calcularse en dos formas. Si la distribución de carga es conocida, se puede comenzar con la ecuación 25.12 para el potencial para una carga puntual. Entonces se considera el potencial debido a un pequeño elemento de carga  $dq$ , considerando este elemento como una carga puntual (Fig. 25.9). El potencial  $dV$  en un punto  $P$  debido al elemento de carga  $dq$  está dado por

$$dV = k \frac{dq}{r} \tag{25.16}$$

donde  $r$  es la distancia desde el elemento de carga hasta el punto  $P$ . Para obtener el potencial total en  $P$ , se integra la ecuación 25.16 para incluir las contribuciones de todos los elementos de la distribución de carga. Ya que cada elemento está, en general, a una distancia diferente de  $P$  y siendo  $k$  una constante, se puede expresar  $V$  como

$$V = k \int \frac{dq}{r} \tag{25.17}$$

En efecto, se ha reemplazado la sumatoria de la ecuación 25.13 por una integral. Nótese que esta expresión para  $V$  utiliza una elección particular de referencia: el potencial se considera cero para el punto  $P$  localizado infinitamente lejos de la distribución de carga.

El segundo método para calcular el potencial de una distribución de carga continua se hace utilizando la ecuación 25.4. Este procedimiento se utiliza cuando

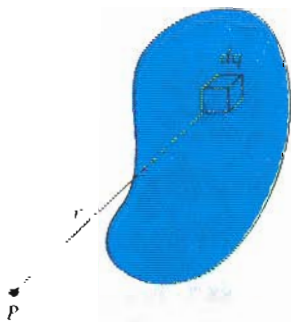


Figura 25.9 El potencial eléctrico en el punto  $P$  debido a la distribución de carga puede ser calculado dividiendo el cuerpo cargado en segmentos de carga  $dq$  y sumando las contribuciones al potencial de todos los segmentos.

el campo eléctrico es conocido por medio de otras consideraciones, tal como la ley de Gauss. Si la distribución de carga es altamente simétrica, primero se evalúa  $E$  en el punto  $P$  utilizando la ley de Gauss y entonces se sustituye el valor obtenido dentro de la ecuación 25.4 para determinar la diferencia de potencial entre dos puntos *cualesquiera*. Entonces se elige  $V$  igual a cero en un punto conveniente. Se muestran ambos métodos con varios ejemplos.

**EJEMPLO 25.4 Potencial debido a un anillo uniformemente cargado**

Encuentre el potencial eléctrico en un punto  $P$  localizado sobre el eje de un anillo uniformemente cargado de radio  $a$  y carga total  $Q$ . El plano del anillo se elige perpendicular al eje  $x$  (Fig. 25.10).

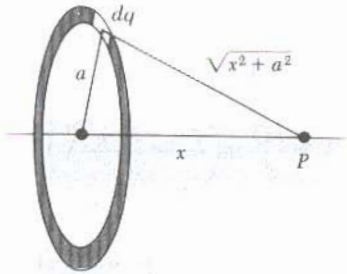


Figura 25.10 (Ejemplo 25.4) Un anillo uniformemente cargado de radio  $a$ , cuyo plano es perpendicular al eje  $x$ . Todos los segmentos del anillo están a la misma distancia del punto axial  $P$ .

Considere que el punto  $P$  está a una distancia  $x$  del centro del anillo, como en la figura 25.10. El elemento de carga  $dq$  está a una distancia igual a  $\sqrt{x^2 + a^2}$  del punto  $P$ . Por lo tanto, se puede expresar  $V$  como

$$V = k \int \frac{dq}{r} = k \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

En este caso, *cada* elemento  $dq$  está a la *misma* distancia del punto  $P$ . Por lo que el término  $\sqrt{x^2 + a^2}$  puede sacarse de la integral y  $V$  se reduce a

$$V = \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (25.18)$$

En esta expresión  $V$  sólo varía con  $x$ . Esto no es de extrañarse, ya que nuestro cálculo sólo es válido para puntos sobre el eje  $x$ , donde  $y$  y  $z$  son cero. De la simetría de la situación, se ve que a lo largo del eje  $x$ ,  $E$  sólo puede tener componente en  $x$ . Por lo tanto, podemos utilizar la expresión  $E_x = -dV/dx$ , la cual será deducida en la sección 25.5, para calcular el campo eléctrico en el punto  $P$ :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{dV}{dx} = -kQ \frac{d}{dx}(x^2 + a^2)^{-1/2} \\ &= -kQ(-\frac{1}{2})(x^2 + a^2)^{-3/2}(2x) \\ &= \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (25.19)$$

Este resultado es igual al obtenido por integración directa (véase ejemplo 23.9). Nóte que  $E_x = 0$  para  $x = 0$  (el centro del anillo). ¿Pudo haberse deducido esto a partir de la ley de Coulomb?

**Ejercicio 2** ¿Cuál es el potencial eléctrico en el centro de un anillo cargado uniformemente? ¿Qué implicaciones se obtienen sobre el campo en el centro a partir de este resultado?

**Respuesta**  $V = kQ/a$  en  $x = 0$ . Porque  $E = 0$ .  $V$  debe tener un valor máximo o mínimo; en este caso es un máximo.

**EJEMPLO 25.5 Potencial de un disco uniformemente cargado**

Encuentre el potencial eléctrico a lo largo del eje de un disco uniformemente cargado de radio  $a$  y carga por unidad de área  $\sigma$  (Fig. 25.11)

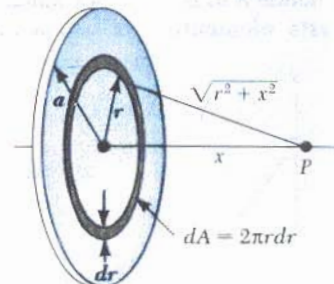


Figura 25.11 (Ejemplo 25.5) Un disco cargado uniformemente de radio  $a$ , cuyo plano es perpendicular al eje  $x$ . El cálculo del potencial en un punto axial  $P$  se simplifica al dividir el disco en anillos de área  $2\pi r dr$ .

**Solución** Nuevamente se elige el punto  $P$  a una distancia  $x$  del centro del disco y se toma el plano del disco perpendicular al eje  $x$ . El problema se simplifica dividiendo el disco en una serie de anillos cargados. El potencial de cada anillo está dado por la ecuación 25.18 en el ejemplo 25.4.

Consideremos un anillo de radio  $r$  y ancho  $dr$ , como se indica en la figura 25.11. El área del anillo es  $dA = 2\pi r dr$  (la circunferencia multiplicada por el ancho), y la carga sobre el anillo es  $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$ . Por lo que el potencial en el punto  $P$  debido a este anillo está dado por

$$dV = \frac{k dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Para determinar el potencial total en  $P$ , se suma sobre todos los anillos que hacen el disco. Es decir, se integra  $dV$  desde  $r = 0$  hasta  $r = a$ :

$$V = \pi k \sigma \int_0^a \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k \sigma \int_0^a (r^2 + x^2)^{-1/2} 2r dr$$

Esta integral es de la forma  $u^n du$  y tiene el valor de  $u^{n+1}/(n+1)$  donde  $n = -\frac{1}{2}$  y  $u = r^2 + x^2$ . Esto da por resultado

$$V = 2\pi k \sigma [(x^2 + a^2)^{1/2} - x] \quad (25.20)$$

Como en el ejemplo 25.4, podemos calcular el campo eléctrico en cualquier punto axial tomando la derivada negativa de  $V$  con respecto a  $x$ . Esto da

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \quad (25.21)$$

El cálculo de  $V$  y  $E$  para cualquier punto arbitrario fuera del eje es más difícil de realizar.

### EJEMPLO 25.6 Potencial de una línea finita de carga

Una barra de longitud  $\ell$  localizada a lo largo del eje  $x$  tiene una carga uniforme por unidad de longitud y una carga total  $Q$ . Encuentre el potencial eléctrico en un punto  $P$  a lo largo del eje  $y$  a una distancia  $d$  del origen (Fig. 25.12).

**Solución** El elemento de longitud  $dx$  tiene una carga  $dq$  dada por  $\lambda dx$  donde  $\lambda$  es la carga por unidad de longitud  $Q/\ell$ . Ya que este elemento está a una distancia  $r =$

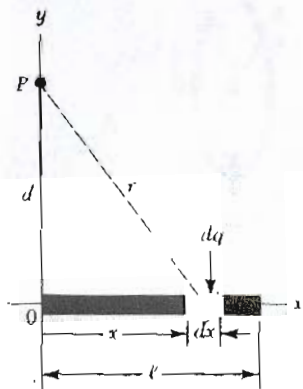


Figura 25.12 (Ejemplo 25.6) Una línea de carga uniforme de longitud  $\ell$  colocada a lo largo del eje  $x$ . Para calcular el potencial en  $P$  la línea de carga se divide en segmentos, cada uno de longitud  $dx$  conteniendo una carga  $dq = \lambda dx$ .

$\sqrt{x^2 + d^2}$  del punto  $P$ , se puede expresar el potencial en  $P$  debido a este elemento como

$$dV = k \frac{dq}{r} = k \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

Para obtener el potencial total en  $P$ , integramos esta expresión entre los límites  $x = 0$  y  $x = \ell$ . Como sabemos que  $k$ ,  $\lambda$  y  $d$  son constantes, se tiene que

$$V = k\lambda \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = k \frac{Q}{\ell} \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

Esta integral se encuentra en la mayoría de las tablas de integrales y tiene un valor de

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$$

Al evaluar  $V$  se tiene que

$$V = \frac{kQ}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + d^2}}{d}\right) \quad (25.22)$$

### EJEMPLO 25.7 Potencial de una esfera uniformemente cargada

Una esfera sólida aislante de radio  $R$  tiene una densidad de carga uniforme positiva con carga total  $Q$ . (Fig. 25.13). a) Determine el potencial eléctrico en un punto fuera de la esfera, es decir, para  $r > R$ . Considere que el potencial es cero para  $r = \infty$ .

**Solución** En el ejemplo 24.3 se encontró mediante la ley de Gauss que la magnitud del campo eléctrico fuera de una esfera uniformemente cargada está dada por

$$E_r = k \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } r > R)$$

donde el campo está dirigido radialmente hacia afuera cuando  $Q$  es positiva. Para obtener el potencial en un punto exterior, como  $B$  en la figura 25.13, se sustituye esta expresión para  $E$  en la ecuación 25.5. En virtud de que  $E \cdot ds = E_r dr$  en este caso, se obtiene

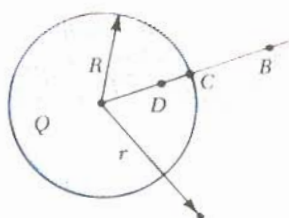
$$V_B = - \int_\infty^r E_r dr = -kQ \int_\infty^r \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B = k \frac{Q}{r} \quad (\text{para } r > R)$$

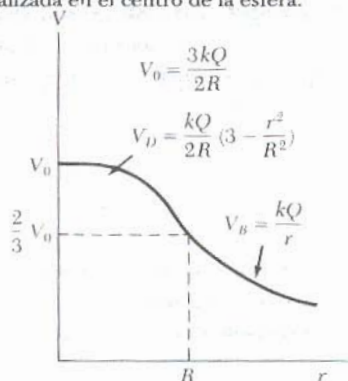
Note que este resultado es idéntico al potencial eléctrico debido a una carga puntual. Ya que el potencial debe ser continuo para  $r = R$ , se puede utilizar esta expresión para obtener el potencial sobre la superficie de la esfera. Es decir, el potencial en el punto como  $C$  en la figura 25.13 está dado por

$$V_C = k \frac{Q}{R} \quad (\text{para } r = R)$$





**Figura 25.13** (Ejemplo 25.7) Una esfera aislante uniformemente cargada de radio  $R$  y carga total  $Q$ . El potencial eléctrico en los puntos  $B$  y  $C$  es equivalente al que produciría una carga puntual  $Q$  localizada en el centro de la esfera.



**Figura 25.14** (Ejemplo 25.7) Gráfica del potencial eléctrico  $V$  contra la distancia  $r$  medida desde el centro de una esfera aislante uniformemente cargada de radio  $R$ . La curva para  $V_D$  dentro de la esfera es una parábola que se une con la curva para  $V_B$  afuera de la esfera, la cual es una hipérbola. El potencial tiene su valor máximo  $V_0$  en el centro de la esfera.

b) Determine el potencial en un punto dentro de la esfera cargada, es decir, para  $r < R$ .

**Solución** En el ejemplo 24.3 se encontró que el campo eléctrico dentro de una esfera uniformemente cargada está dado por

$$E_r = \frac{kQ}{R^3} r \quad (\text{para } r < R)$$

Podemos utilizar este resultado y la ecuación 25.4 para evaluar la diferencia de potencial  $V_D - V_C$ , donde  $D$  es un punto interior:

$$V_D - V_C = - \int_R^r E_r dr = - \frac{kQ}{R^3} \int_R^r r dr = \frac{kQ}{2R^3} (R^2 - r^2)$$

Sustituyendo  $V_C = kQ/R$  en la expresión para  $V_D$ , se obtiene

$$V_D = \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{para } r < R) \quad (25.23)$$

Para  $r = R$ , esta expresión da el mismo resultado que la del potencial en la superficie, es decir,  $V_C$ . La gráfica del valor de  $V$  contra  $r$  para esta distribución de carga está en la figura 25.14.

**Ejercicio 3** ¿Cuál es el campo eléctrico en el centro de una esfera uniformemente cargada? ¿Cuál es el potencial eléctrico en ese punto?

**Respuesta** Para  $r = 0$ ,  $E = 0$  y  $V_0 = 3kQ/2R$ .

## 25.5 OBTENCIÓN DE $E$ A PARTIR DEL POTENCIAL ELÉCTRICO

El campo eléctrico  $E$  y el potencial  $V$  están relacionados por la ecuación 25.4. Ambas cantidades se determinan para una distribución de carga específica. Ahora se mostrará cómo se calcula el campo eléctrico si el potencial eléctrico es conocido en cierta región. Como se verá, el campo eléctrico es simplemente la derivada negativa del potencial eléctrico.

De la ecuación 25.4 puede expresarse la diferencia de potencial  $dV$  entre dos puntos apartados una distancia  $ds$  como

$$dV = -E \cdot ds \quad (25.24)$$

Si el campo eléctrico tiene sólo una componente,  $E_x$ , entonces  $E \cdot ds = E_x dx$ . Por lo tanto la ecuación 25.24 se transforma en  $dV = -E_x dx$  o bien

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \quad (25.25)$$

Es decir,

el campo eléctrico es igual a la derivada negativa del potencial con respecto a alguna coordenada.

¡Otése que el cambio de potencial es cero para cualquier desplazamiento perpendicular al campo eléctrico. Esto es consecuente con la noción de superficie equipotencial que debe ser perpendicular al campo, como en la figura 25.15a.

Las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo eléctrico

Si la distribución de carga tiene *simetría esférica*, donde la densidad de carga depende sólo de la distancia radial  $r$ , entonces el campo eléctrico es radial. En este caso,  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_r dr$ , y entonces se puede expresar  $dV$  en la forma  $dV = -E_r dr$ . Por lo tanto,

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad (25.26)$$

Nótese que el cambio de potencial sólo se realiza en la dirección radial, no en la dirección perpendicular a  $r$ . Así  $V$  (lo mismo  $E_r$ ) es una función sólo de  $r$ . Nuevamente, esto es consecuente con la idea de que *las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo*. En este caso, las superficies equipotenciales son una familia de esferas concéntricas con la distribución de carga simétricamente esférica (Fig. 25.15b). Las superficies equipotenciales para un dipolo eléctrico se representan en la figura 25.15c.

Cuando una carga testigo se desplaza un vector  $d\mathbf{s}$  tal que lo realiza *dentro* de cualquier superficie equipotencial, por definición  $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . Esto demuestra que la superficie equipotencial debe ser *siempre perpendicular* a las líneas de campo eléctrico.

En general, el potencial es una función de las tres coordenadas espaciales. Si  $V(r)$  está dada en términos de coordenadas rectangulares, las componentes del campo eléctrico  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_z$  pueden determinarse a partir de  $V(x, y, z)$ . Las componentes del campo están dadas por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En estas expresiones, la derivadas son llamadas *derivadas parciales*. El significado de la operación  $\partial V/\partial x$  es: *tomar la derivada con respecto a  $x$  mientras  $y$  y  $z$  permanecen constantes*. Por ejemplo si  $V = 3x^2y + y^2 + yz$ , entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y + y^2 + yz) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y) = 3y \frac{d}{dx} (x^2) = 6xy$$

En notación vectorial,  $\mathbf{E}$  a veces se escribe como  $\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) V$ , donde  $\nabla$  es llamado el *operador gradiente*.

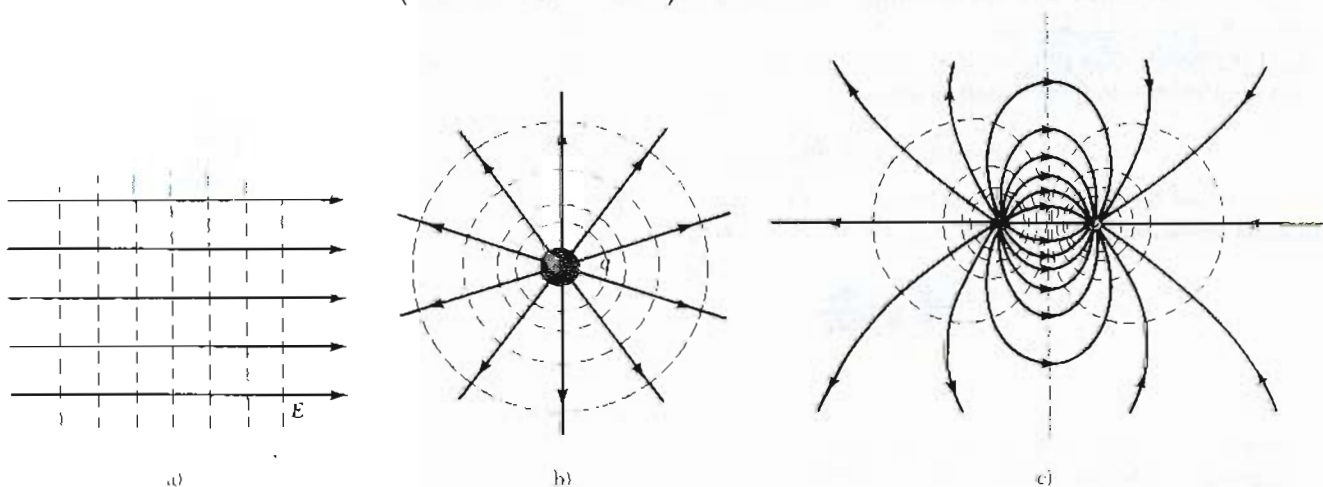


Figura 25.15 Superficies equipotenciales (trazadas con líneas azules) y líneas de campo eléctrico (líneas rojas) para: a) un campo eléctrico uniforme producido por una lámina infinita cargada, b) una carga puntual y c) un dipolo eléctrico. En todos los casos, las superficies equipotenciales son *perpendiculares* a las líneas de campo eléctrico en cualquier punto.

**EJEMPLO 25.8 Revisión de la carga puntual**

Utilizaremos la función potencial de una carga puntual para deducir el campo eléctrico a una distancia  $r$  de la carga.

**Solución** El potencial de una carga puntual está dado por la ecuación 25.12:

$$V = k \frac{q}{r}$$

Ya que el potencial es función sólo de  $r$ , tiene una simetría esférica y podemos aplicar la ecuación 25.26 directamente para obtener el campo eléctrico:

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( k \frac{q}{r} \right) = -kq \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$E_r = \frac{kq}{r^2}$$

Así, el campo eléctrico es radial y el resultado coincide con el que se obtiene utilizando la ley de Gauss.

**EJEMPLO 25.9 Potencial eléctrico de un dipolo**

Un dipolo eléctrico consta de dos cargas iguales y opuestas separadas una distancia  $2a$ , como en la figura 25.16. Calcule el potencial eléctrico y el campo eléctrico en un punto  $P$  sobre el eje  $x$  y localizado a una distancia  $x$  del centro del dipolo.

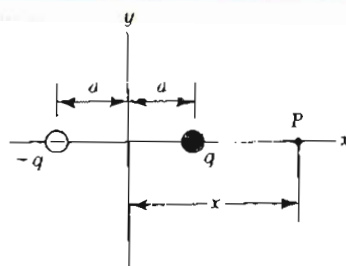


Figura 25.16 (Ejemplo 25.16) Un dipolo eléctrico colocado sobre el eje  $x$ .

**Solución**

$$V = k \sum \frac{q_i}{r_i} = k \left( \frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2kqa}{x^2 - a^2}$$

Si el punto  $P$  se encuentra muy lejos del dipolo, esto es, si  $x \gg a$  entonces  $a^2$  puede despreciarse en los términos  $x^2 - a^2$  y  $V$  vendría a ser

$$V \approx \frac{2kqa}{x^2} \quad (x \gg a)$$

Utilizando la ecuación 25.25 y este resultado, el campo eléctrico en  $P$  está dado por

$$E = -\frac{dV}{dx} = \frac{4kqa}{x^3} \quad \text{para } x \gg a$$

**25.6 POTENCIAL DE UN CONDUCTOR CARGADO**

En el capítulo anterior se encontró que cuando un conductor sólido en equilibrio tiene una carga neta, ésta se halla en la superficie exterior del conductor. Además, se demostró que el campo eléctrico precisamente afuera de la superficie del conductor en equilibrio es perpendicular a esa superficie, en tanto que el campo dentro del conductor es cero. Si el campo eléctrico tiene una componente paralela a la superficie, esto ocasionaría que las cargas se movieran, creando una corriente y una situación de no equilibrio.

Ahora se demostrará que *todo punto del conductor cargado en equilibrio está al mismo potencial*. Consideremos dos puntos  $A$  y  $B$  sobre la superficie de un conductor cargado, como se muestra en la figura 25.17. A lo largo de la superficie en cualquier trayectoria que una estos puntos,  $\mathbf{E}$  siempre será perpendicular al desplazamiento  $d\mathbf{s}$ ; por lo tanto,  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . Utilizando este resultado y la ecuación 25.4, se puede concluir que la diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$  es necesariamente cero. Es decir,

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Este resultado se aplica a cualesquiera dos puntos sobre la superficie. Por lo tanto,  $V$  es constante en toda la superficie de un conductor cargado en equilibrio. Es decir,

la superficie de cualquier conductor cargado en equilibrio es una superficie equipotencial. Además, siendo el campo eléctrico cero en el interior del

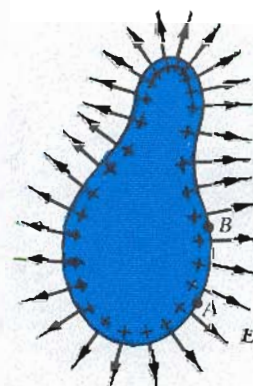


Figura 25.17 Conductor de forma arbitraria con un exceso de cargas positivas. Cuando un conductor está en equilibrio electrostático, toda la carga reside en su superficie  $E = 0$  en el interior del conductor y el campo precisamente afuera del conductor es perpendicular a la superficie. El potencial es constante dentro del conductor y es igual al potencial en la superficie. La densidad de carga superficial no es uniforme

conductor, se concluye que el potencial es constante en cualquier parte del interior del conductor e igual al valor que tiene en la superficie.

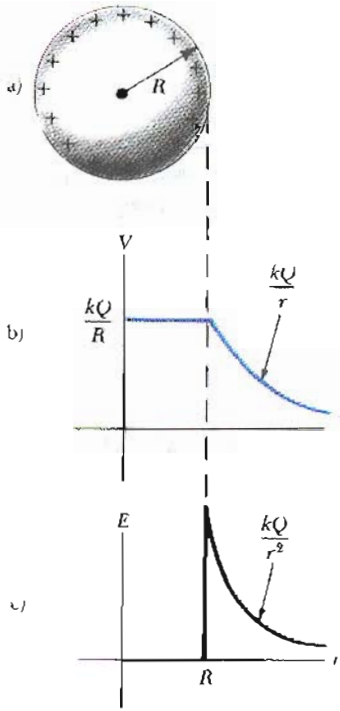


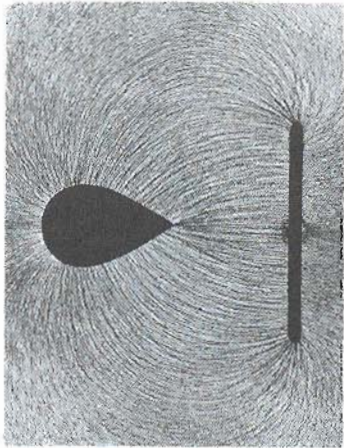
Figura 25.18 a) El exceso de carga sobre la esfera conductora de radio  $R$  se distribuye uniformemente en su superficie. b) El potencial eléctrico contra la distancia  $r$  desde el centro de la esfera conductora. c) La intensidad del campo eléctrico contra la distancia  $r$  desde el centro de la esfera conductora.

Así, no se realiza trabajo para mover una carga de prueba desde el interior de un conductor cargado hasta su superficie. (Nótese que el potencial no es cero en el interior del conductor, aun cuando el campo eléctrico es cero.)

Por ejemplo, considere una esfera metálica sólida de radio  $R$  y carga total positiva  $Q$ , como se muestra en la figura 25.18a. El campo eléctrico fuera de la esfera cargada está dada por  $kQ/r^2$  y apunta radialmente hacia afuera. Siguiendo el ejemplo 25.7, se ve que el potencial en el interior y en la superficie de la esfera deben estar dados por  $kQ/R$  relativos al infinito. El potencial afuera de la esfera está dado por  $kQ/r$ . La figura 25.18b es la gráfica del potencial como función de  $r$ , y la figura 25.18c muestra la variación del campo eléctrico con  $r$ .

Cuando una carga neta se coloca sobre un conductor esférico, la densidad de carga superficial es uniforme, como se indica en la figura 25.18a. Sin embargo, si el conductor no es esférico, como en la figura 25.17, la densidad de carga superficial es mayor donde el radio de curvatura es pequeño y convexo, y menor donde el radio de curvatura es grande y cóncavo. Ya que el campo eléctrico precisamente afuera del conductor es proporcional a la densidad de carga superficial  $\sigma$ , se ve que el campo eléctrico es grande cerca de los puntos que tienen un radio de curvatura convexo pequeño y alcanza valores muy altos en las partes puntiagudas.

La figura 25.19 muestra las líneas del campo eléctrico alrededor de dos conductores esféricos, uno con carga neta  $Q$  y otro con carga neta cero. En este caso, la densidad de carga superficial no está uniformemente distribuida en los conductores. La esfera más grande (a la derecha) con carga neta igual a cero, tiene cargas negativas inducidas en el lado que está frente a la esfera cargada, y tiene cargas positivas en el lado opuesto a aquélla. Las líneas azules en la figura 25.19



Patrón del campo eléctrico de una placa conductora cargada cerca de un conductor puntual con carga opuesta. Pequeñas piezas de fibra suspendidas en aceite se alinean con las líneas del campo eléctrico. Observe que el campo eléctrico es más intenso cerca de la parte puntiaguda del conductor y en otros puntos donde el radio de curvatura es pequeño. (Cortesía de Harold M. Waage, Princeton University).

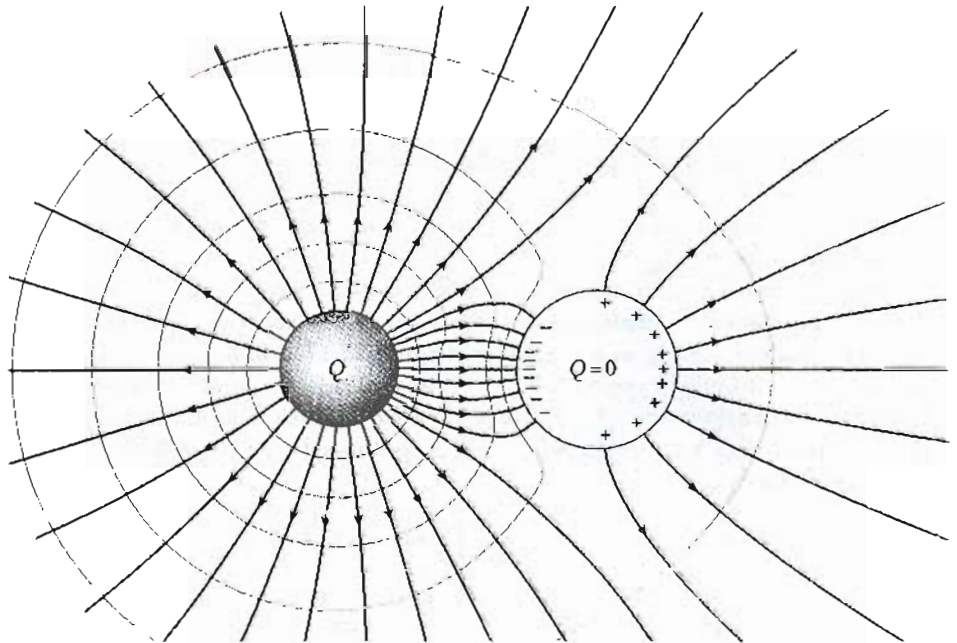


Figura 25.19 Las líneas de campo eléctrico (en rojo) rodean dos esferas conductoras. La esfera pequeña a la izquierda tiene una carga neta  $Q$ , y la esfera de la derecha tiene una carga neta igual a cero. Las líneas azules representan un corte de las superficies equipotenciales. (De E. Purcell, *Electricidad y magnetismo*, New York, McGraw-Hill, 1965, con permiso del Education Development Center, Inc.)

representan los bordes de una superficie equipotencial para esta configuración de carga. Nuevamente se podrá notar que las líneas de campo son perpendiculares a las superficies conductoras. Además, las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo en las cercanías del conductor y en cualquier punto del espacio.

### Una cavidad dentro de un conductor

Ahora consideremos un conductor de forma arbitraria con una cavidad como en la figura 25.20. Supongamos que no existen cargas dentro de la cavidad. A continuación se demostrará que el *campo eléctrico dentro de la cavidad debe ser cero*, sin importar la distribución de carga sobre la superficie exterior del conductor. Además, el campo en el interior de la cavidad es cero aun cuando exista un campo eléctrico afuera del conductor.

Para probar esto, se utilizará el hecho de que en cualquier punto sobre el conductor se tiene el mismo potencial, y por lo tanto cualesquiera dos puntos  $A$  y  $B$  sobre la superficie de la cavidad deberán estar al mismo potencial. Ahora imaginemos que un campo  $E$  existe en la cavidad, y evaluamos la diferencia de potencial  $V_B - V_A$  definida por la expresión

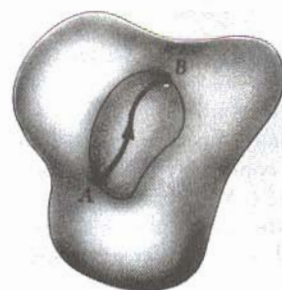
$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Si  $E$  no es cero, siempre es posible hallar una trayectoria entre  $A$  y  $B$  para la cual  $E \cdot d\mathbf{s}$  es siempre un número positivo y así la integral deberá ser positiva. Sin embargo, ya que  $V_B - V_A = 0$ , la integral debe ser también cero. Esta contradicción se puede reconciliar sólo si  $E = 0$  dentro de la cavidad. Entonces, se concluye que una cavidad rodeada de paredes conductoras es una región libre de campo en tanto no existan cargas dentro de la cavidad.

Este resultado tiene algunas aplicaciones interesantes. Por ejemplo, es posible proteger un circuito electrónico, o incluso todo un laboratorio de campos eléctricos externos rodeándolos con paredes conductoras. Con mucha frecuencia es necesaria esta protección cuando se deben realizar medidas eléctricas muy precisas y sensibles.

### Corona de descarga

A menudo un fenómeno conocido como **corona de descarga** se observa cerca de lugares puntiagudos de un conductor llevado hasta un potencial alto. Aparece una descarga que se ve a simple vista como un brillo verdoso. En este proceso, el aire se vuelve conductor como resultado de la ionización de las moléculas de aire en las regiones de altos campos eléctricos. A temperatura y presión estándar, esta descarga ocurre cuando el campo eléctrico es igual o mayor a  $3 \times 10^6$  V/m. Ya que el aire contiene un pequeño número de iones (producidos, por ejemplo, por los rayos cósmicos), un conductor cargado puede atraer iones del aire de signo opuesto. Cerca de las partes puntiagudas, donde el campo eléctrico es muy intenso, los iones pueden ser acelerados hasta altas velocidades. Estos energéticos iones, a su vez, chocan con otras moléculas del aire, produciendo más iones e incrementando la conductividad del aire. La descarga de un conductor a veces se acompaña con un resplandor visible que rodea a las partes puntiagudas.



**Figura 25.20** Un conductor en equilibrio electrostático con una cavidad vacía. El campo eléctrico en la cavidad es *cero*, independiente de la carga sobre el conductor.

**EJEMPLO 25.10 Dos esferas cargadas conectadas**

Dos conductores esféricos de radios  $r_1$  y  $r_2$  separados por una distancia mucho mayor que los radios de cada esfera, se conectan con un alambre conductor como en la figura 25.21. Si las cargas en las esferas en equilibrio son  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente, determine la razón de las intensidades del campo en las superficies de las esferas.

**Solución** Ya que las esferas están conectadas con un alambre conductor, ambas tienen el mismo potencial  $V$ , dado por

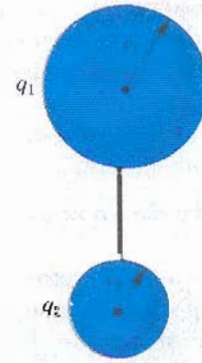
$$V = k \frac{q_1}{r_1} = k \frac{q_2}{r_2}$$

Por lo tanto, la razón de las cargas es

$$(1) \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Ya que las esferas están muy separadas, sus superficies están uniformemente cargadas y podemos expresar los campos eléctricos en sus superficies como

$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} \quad \text{y} \quad E_2 = k \frac{q_2}{r_2^2}$$



**Figura 25.21** (Ejemplo 25.10) Dos conductores esféricos cargados conectados por un alambre conductor. Las esferas están al mismo potencial  $V$ .

Tomando la razón de estos dos campos y haciendo uso de (1), se encuentra que

$$(2) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Entonces, el campo es más intenso en la vecindad de la esfera pequeña.

**\*25.7 EXPERIMENTO DE LA GOTA DE ACEITE DE MILLIKAN**

Durante el periodo de 1909 a 1913, Robert Andrews Millikan (1868-1953) realizó un conjunto de experimentos en la Universidad de Chicago en los cuales midió la carga elemental del electrón  $e$ , y demostró la naturaleza cuántica de la carga electrónica. El aparato utilizado por Millikan, diagramado en la figura 25.22, contiene dos placas metálicas paralelas. Gotas de aceite cargadas por fricción en un atomizador pasan a través de un pequeño agujero en la placa superior. Un haz de luz dirigido horizontalmente se utiliza para iluminar las gotas de aceite, las cuales se observan por medio de un telescopio cuyo eje hace un ángulo recto con el haz. Cuando las gotas se observan de esta manera, parecen un cielo estrellado con fondo oscuro, y la rapidez de caída de las gotas puede ser determinada.<sup>4</sup>

Consideremos que una sola gota de masa  $m$  con una carga  $q$  está siendo observada, y que su carga es negativa. Si no hay campo eléctrico presente entre las placas, las dos fuerzas que actúan sobre la carga son su peso  $mg$ , hacia abajo, y hacia arriba la fuerza viscosa de arrastre  $D$ , como se indica en la figura 25.23a. La fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad de la gota. Cuando la gota alcanza su velocidad terminal  $v$  las dos fuerzas se balancean una a la otra ( $mg = D$ ).

Ahora supongamos que un campo eléctrico se coloca entre las placas al conectar una batería tal que la placa superior esté a un potencial mayor. En este caso, una tercera fuerza  $qE$  actúa sobre la gota de aceite. Dado que  $q$  es negativa y  $E$  está hacia abajo, la fuerza eléctrica está hacia arriba como se indica en la figura

<sup>4</sup> En un tiempo, las gotas de aceite fueron denominadas "estrellas resplandecientes de Millikan." Sin embargo, esta descripción ha perdido popularidad debido a que algunas generaciones de estudiantes de física quienes, al repetir el experimento, han experimentado alucinaciones, mareos, dolores de cabeza (migraña), etc.

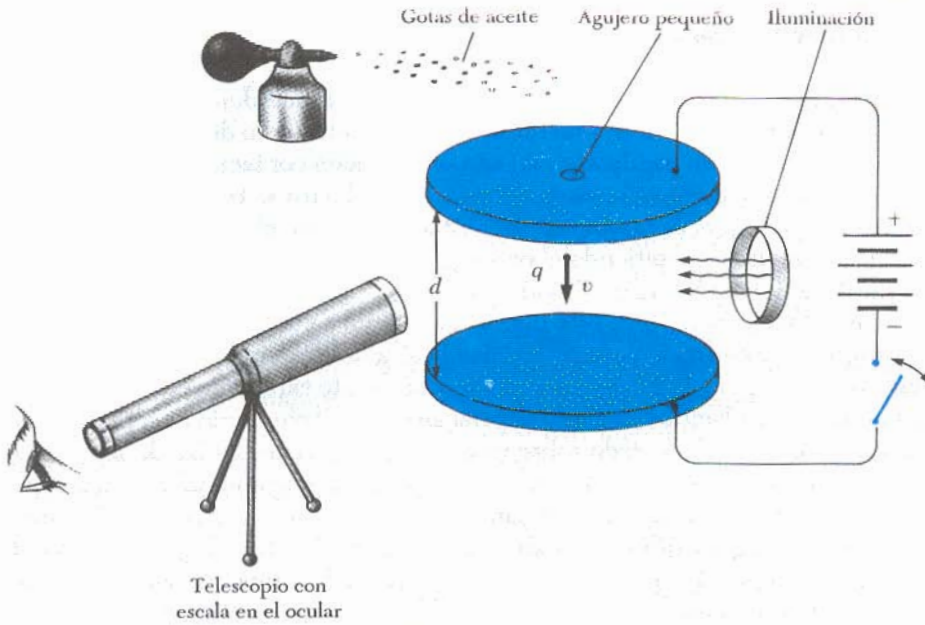


Figura 25.22 Vista esquemática del aparato de la gota de aceite de Millikan.

25.23b. Si esta fuerza es grande, la gota tenderá a subir y la fuerza de arrastre  $D'$  actuará hacia abajo. Cuando la fuerza eléctrica dirigida hacia arriba  $qE$  es balanceada por la suma del peso y la fuerza de arrastre, ambas actuando hacia abajo, la gota alcanza una nueva velocidad terminal  $v'$ .

Con el campo encendido, la gota se mueve lentamente hacia arriba, por lo regular a razón de algunos centésimos de centímetros por segundo. La razón de caída en ausencia del campo es comparable. Entonces, una sola gota con masa y radio constante puede ser seguida durante horas, alternado subidas y caídas, por medio de un simple interruptor de encendido y apagado del campo eléctrico.

Después de realizar mediciones sobre miles de gotas, Millikan y sus colaboradores encontraron que todas las gotas, con 1% de precisión, tenían una carga igual a un múltiplo entero de la carga elemental  $e$ . Es decir,

$$q = ne \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (25.27)$$

Donde  $e = 1.60 \times 10^{-19}$  C. El experimento de Millikan es evidencia concluyente de que la carga está cuantizada. Él obtuvo el Premio Nobel de Física en 1923 por este trabajo.

### •25.8 APLICACIONES ELECTROSTÁTICAS

Los principios electrostáticos se han utilizado en diversas aplicaciones, algunas de las cuales se analizan brevemente en esta sección. Algunas de las aplicaciones prácticas incluyen precipitadores electrostáticos, utilizados para reducir el nivel la contaminación atmosférica al quemar carbón en las plantas de potencia, y en el proceso de la xerografía, el cual ha revolucionado el proceso de producción de imágenes. Aplicaciones científicas de los principios electrostáticos incluyen los generadores electrostáticos para acelerar partículas elementales cargadas y el microscopio electrónico, el cual se utiliza para obtener imágenes de átomos sobre superficies metálicas.

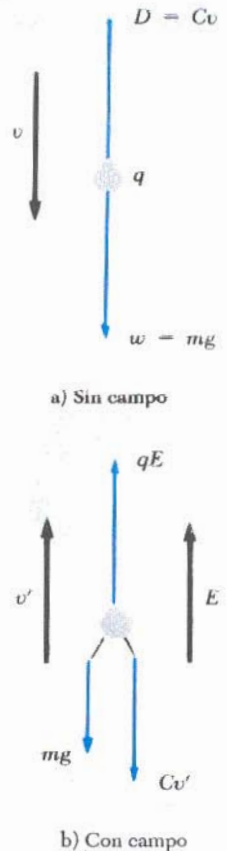


Figura 25.23 Fuerzas sobre una gota de aceite cargada en el experimento de Millikan

### Generador Van de Graaff

En el capítulo anterior se describió un experimento que demuestra un método para transferir carga de un conductor hueco (el experimento del cubo de hielo de Faraday). Cuando un conductor cargado se coloca en contacto con el interior de un conductor hueco, toda la carga del primer conductor se transfiere al conductor hueco. En principio, es posible incrementar la carga en el conductor hueco y su potencial, sin límite, repitiendo el proceso.

En 1929 Robert J. Van de Graaff aplicó este principio para diseñar y construir un generador electrostático; este tipo de generador se utiliza ampliamente en las investigaciones de física nuclear. La idea básica del generador Van de Graaff se describe en la figura 25.24. Se entrega continuamente carga a un electrodo de alto voltaje sobre una banda móvil de material aislante. El electrodo de alto voltaje es un conductor hueco montado sobre una columna aislante. La banda se carga en A por medio de una descarga corona entre el peine de agujas metálicas y una rejilla conectada a tierra. Las agujas normalmente se mantienen a un potencial positivo de  $10^4$  V. La carga positiva se transfiere al electrodo de alto voltaje por medio de un segundo peine de agujas que se encuentra en B. Como el campo eléctrico dentro del conductor hueco es despreciable, la carga positiva de la banda se transfiere con facilidad hacia el electrodo de alto voltaje, sin importar su potencial. En la práctica, es posible incrementar el potencial del electrodo de alto voltaje hasta que se presenta una descarga eléctrica a través del aire. Dado que la tensión de ruptura del aire es aproximadamente de  $3 \times 10^6$  V/m, una esfera de un metro de radio se puede llevar hasta un potencial máximo de  $3 \times 10^6$  V. Puede aumentarse aún más el potencial si se incrementa el radio del conductor hueco y se coloca el sistema en un recipiente con gas a alta presión.

Los generadores Van de Graaff pueden producir diferencias de potencial tan altas como 20 millones de volts. Los protones acelerados a través de diferencias de potencial de este orden reciben energía suficiente como para iniciar reacciones nucleares entre ellos y diversos núcleos que sirven de blanco.

### Precipitador electrostático

Una aplicación importante de la descarga eléctrica en los gases es un aparato llamado precipitador electrostático. Este aparato se emplea para eliminar partículas de los gases de combustión, reduciendo en consecuencia la contaminación del aire. Resultan especialmente útiles en las plantas generadoras que queman carbón y en las operaciones industriales que generan grandes cantidades de humo. Los sistemas actuales pueden eliminar más del 99% de la ceniza y el polvo del humo. En la figura 25.25 se muestra la idea básica del precipitador electrostático. Un alto voltaje (usualmente de 40 kV a 100 kV) se mantiene entre un alambre que baja por el centro de un ducto y la pared externa del ducto es conectada a tierra. El alambre se mantiene a un potencial negativo respecto de las paredes, y así el campo eléctrico está dirigido hacia el alambre. El campo eléctrico cerca del alambre alcanza valores suficientemente altos como para provocar una corona de descarga en torno a él, y la formación de iones positivos, electrones e iones negativos como el  $O_2^-$ . A medida que los electrones y los iones negativos son acelerados hacia la pared exterior por el campo eléctrico no uniforme, las partículas contaminantes que están en la corriente del gas se cargan por las colisiones y la captura de iones. Ya que la mayoría de las partículas cargadas son negativas, éstas también son arrastradas hacia la pared exterior del ducto por el campo eléctrico. Al sacudir periódicamente el ducto, las partículas caen y se recogen en el fondo.

Además de reducir el nivel de gases peligrosos y partículas de materia en la

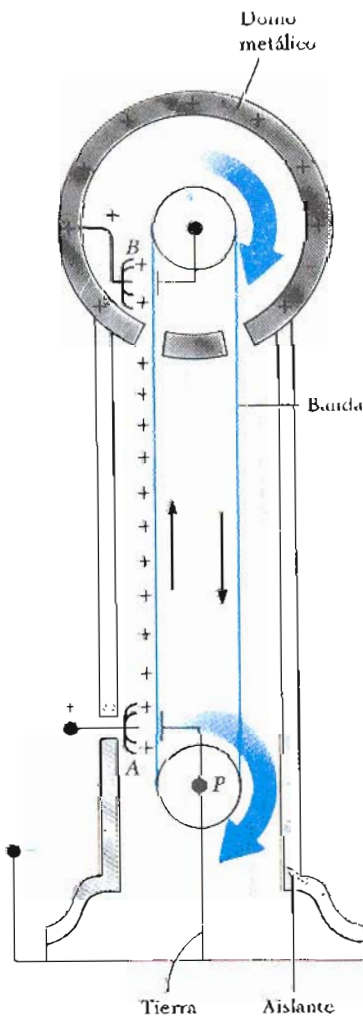


Figura 25.24 Diagrama esquemático de un generador Van de Graaff. La carga es transferida al conductor hueco en la parte superior por medio del movimiento de una banda. La carga se deposita en la banda en el punto A y es transferida al conductor hueco en el punto B.



atmósfera, el precipitador electrostático también recupera materiales valiosos que provienen de la chimenea en forma de óxidos metálicos.

## Xerografía

El proceso de xerografía se utiliza ampliamente para hacer fotocopias de cartas, documentos y otros materiales impresos. La idea básica del proceso fue desarrollada por Chester Carlson, al que se le concedió una patente en 1940. En 1947, Xerox Corporation lanzó un programa de gran envergadura para desarrollar máquinas duplicadoras automatizadas aplicando este proceso. El enorme éxito de este desarrollo es del todo evidente; en la actualidad, prácticamente todas las oficinas y bibliotecas modernas tienen una o más máquinas duplicadoras, y la capacidad de éstas aumenta en forma constante.

Algunas características del proceso xerográfico comprenden conceptos sencillos de la electrostática y la óptica. Sin embargo, la idea que hace que el proceso sea único es el uso de un material fotoconductor para formar una imagen. (Un fotoconductor es un material que es un mal conductor en la oscuridad pero bueno al ser expuesto a la luz).

En la figura 25.26 se muestra la secuencia de pasos aplicados en el proceso xerográfico. En primer lugar, la superficie de una placa o tambor se cubre con una película delgada de material fotoconductor (por lo común selenio o algún compuesto de éste) y a la superficie fotoconductor se le da una carga electrostática positiva en la oscuridad. Entonces se proyecta la página que va a ser copiada sobre la superficie cargada. La superficie fotoconductor sólo se vuelve conductora en las zonas donde recibió la luz. En estas zonas, la luz produce portadores de carga en el fotoconductor, los cuales neutralizan la superficie cargada positivamente. Sin embargo, las cargas permanecen sobre aquellas zonas del fotoconductor que no se expusieron a la luz, dejando una imagen escondida del objeto en la forma de una distribución superficial de carga positiva.

En seguida, un polvo cargado negativamente llamado *toner*, se espolvorea sobre la superficie fotoconductor. El polvo cargado se adhiere sólo en aquellas zonas de la superficie que contienen la imagen cargada positivamente. En este

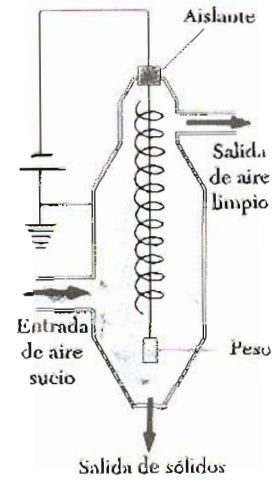


Figura 25.25 Diagrama esquemático de un precipitador electrostático. El alto voltaje mantenido en el alambre central crea una descarga eléctrica en la vecindad del alambre.

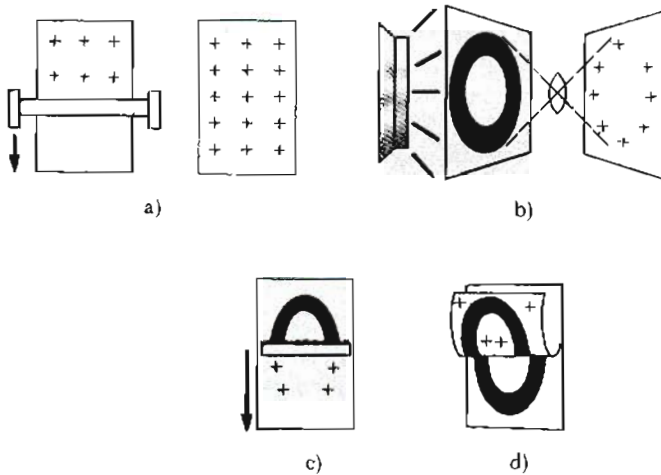


Figura 25.26 El proceso de xerografía: a) La superficie fotoconductor se cargada positivamente. b) A través de una fuente luminosa y lentes, una imagen se forma sobre la superficie en forma de sombra de cargas positivas. c) La superficie que contiene la imagen se cubre con un polvo cargado el cual se adhiere únicamente al área de la propia imagen. d) Se coloca un pieza de papel sobre la superficie y se le da una carga. Esto transfiera una imagen visible al papel, la cual por último se trata con calor para fijar el polvo al papel.

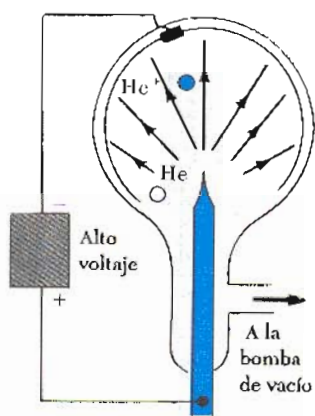


Figura 25.27 Diagrama esquemático de un microscopio de iones de campo. El campo eléctrico es muy intenso en la punta del espécimen que tiene forma de aguja.

momento, la imagen se vuelve visible. Después, la imagen se trasfiere a la superficie de una hoja de papel cargado positivamente.

Por último, el material toner se fija a la superficie del papel, a través de la aplicación de calor. Esto da lugar a una copia permanente del original.

### El microscopio de iones de campo

En la sección 25.6 se señaló que la intensidad del campo eléctrico puede ser muy alta en la vecindad de un lugar puntiagudo de un conductor cargado. Un aparato que hace uso de este campo intenso es el *microscopio de iones de campo*, inventado en 1956 por E. W. Mueller en Pennsylvania State University.

En la figura 25.27 se muestra la estructura básica del microscopio de emisión de campo. Un espécimen que va ser estudiado se fabrica a partir de un alambre delgado y se forma una punta aguda, por lo común tratando al alambre con ácido. Casi siempre el diámetro de la punta es aproximadamente de  $0.1 \mu\text{m}$  ( $= 100 \text{ nm}$ ). El espécimen se coloca en el centro de un tubo de vidrio al vacío que contiene una pantalla fluorescente. A continuación, se introduce una pequeña cantidad de helio en el recipiente. Se aplica una diferencia de potencial muy grande entre la aguja y la pantalla, produciendo un campo eléctrico muy intenso cerca de la punta de la aguja. Es importante enfriar la punta a cuando menos la temperatura del nitrógeno para obtener imágenes estables. Los átomos de helio que se encuentran en la vecindad de esta región con un campo muy intenso se ionizan por la pérdida de un electrón, lo cual deja al helio cargado positivamente. Los iones de  $\text{He}^+$  cargados positivamente se aceleran entonces a lo largo de las líneas del campo hacia la pantalla fluorescente con carga negativa. Esto da lugar a un patrón sobre la pantalla que representa una imagen de la punta del espécimen.

En condiciones apropiadas (temperatura baja del espécimen y alto vacío), resultan visibles las imágenes de los átomos individuales que están sobre la superficie de la muestra, y se puede estudiar la disposición atómica sobre la

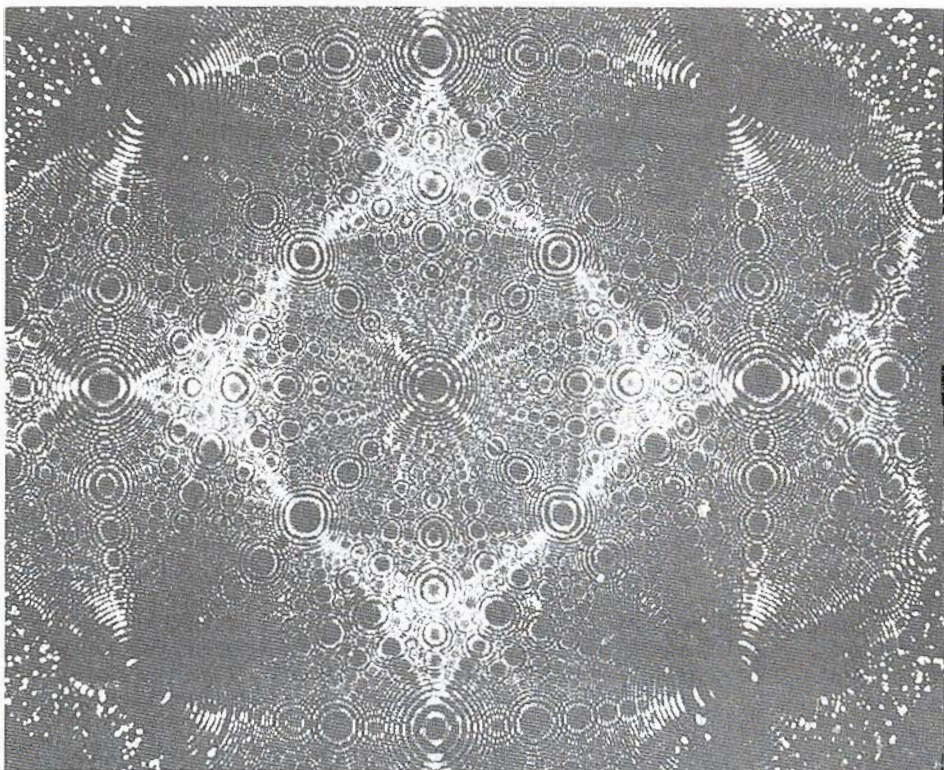


Figura 25.28 Imagen obtenida con un microscopio de iones de campo de la superficie de un cristal de platino, con una amplificación de  $1\,000\,000\times$ . Aplicando esta técnica pueden verse átomos individuales de las capas superficiales. (Cortesía del Prof. T. T. Tsong, The Pennsylvania State University)

superficie. Desgraciadamente los campos eléctricos intensos también dan lugar a fuertes esfuerzos mecánicos cerca de la punta del espécimen, lo cual limita la aplicación de la técnica a elementos metálicos fuertes, como el tungsteno y el rhenio. En la figura 25.28 se presenta un patrón típico del microscopio de iones de campo de un cristal de platino.

## RESUMEN

Cuando una carga de prueba positiva  $q_0$  se mueve entre los puntos  $A$  y  $B$  en un campo electrostático  $E$ , el **cambio en la energía potencial** está dada por

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B E \cdot ds \quad (25.3)$$

**Cambio en la energía potencial**

La **diferencia de potencial**  $\Delta V$  entre los puntos  $A$  y  $B$  en un campo electrostático  $E$  se define como el cambio de energía potencial dividido por la carga de prueba  $q_0$ :

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B E \cdot ds \quad (25.4)$$

**Diferencia de potencial**

donde el potencial eléctrico  $V$  es un escalar y tiene unidades de J/C, definido como 1 volt (V).

La diferencia de potencial entre dos puntos  $A$  y  $B$  en un campo eléctrico *uniforme*  $E$  está dado por

$$\Delta V = -Ed \quad (25.7)$$

donde  $d$  es el desplazamiento en la dirección *paralela* a  $E$ .

**TABLA 25.1** Potencial debido a varias distribuciones de carga

Distribución de carga	Potencial eléctrico	Localización
Anillo uniformemente cargado de radio $a$	$V = k \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	A lo largo del eje del anillo a una distancia $x$ de su centro
Disco uniformemente cargado de radio $a$	$V = 2\pi k\sigma[(x^2 + a^2)^{1/2} - x]$	A lo largo del eje del disco a una distancia $x$ de su centro
Esfera aislante uniformemente cargada de radio $R$ y carga total $Q$	$V = k \frac{Q}{r}$	$r \geq R$
	$V = \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$	$r < R$
Esfera conductora aislada de carga total $Q$ y radio $R$	$V = k \frac{Q}{R}$	$r \leq R$
	$V = k \frac{Q}{r}$	$r > R$

**Superficies equipotenciales** son las superficies sobre las cuales el potencial eléctrico permanece constante. Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas del campo eléctrico.

El potencial debido a una carga puntual  $q$  a una distancia  $r$  de la carga está dado por

$$V = k \frac{q}{r} \quad (25.12)$$

El potencial debido a un grupo de cargas puntuales se obtiene sumando los potenciales debidos a cada carga individualmente. Siendo  $V$  un escalar, la suma es una simple operación algebraica.

La **energía potencial de un par de cargas puntuales** separadas una distancia  $r_{12}$  está dada por

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (25.14)$$

Ésta representa el trabajo requerido para traer las cargas desde una separación infinita hasta una separación  $r_{12}$ . La energía potencial de una distribución de cargas puntuales se obtiene sumando los términos obtenidos por la ecuación 25.14 para cada par de partículas.

El **potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga** está dado por

$$V = k \int \frac{dq}{r} \quad (25.17)$$

Si el potencial eléctrico es conocido como una función de las coordenadas  $x, y, z$ , las componentes del campo eléctrico pueden ser obtenidas al sacar la derivada negativa del potencial con respecto a las coordenadas. Por ejemplo, la componente  $x$  del campo eléctrico está dada por

$$E_x = - \frac{dV}{dx} \quad (25.25)$$

Todos los puntos sobre la superficie de un conductor cargado en equilibrio electrostático están al mismo potencial. Además, el potencial es constante en cualquier lugar dentro del conductor e igual a su valor en la superficie. La tabla 25.1 enlista los potenciales debidos a varias distribuciones de cargas.

## ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Cuando se trabajen problemas que incluyan potencial eléctrico, recuerde que el potencial es una *cantidad escalar* (diferente de una cantidad vectorial como el campo eléctrico), así que no existen componentes de él. Por lo tanto, cuando se utilice el principio de superposición para evaluar el potencial eléctrico en un punto debido a un sistema de cargas puntuales, simplemente realice la suma algebraica de los potenciales debido a cada carga. Sin embargo, deben de considerarse los signos. El potencial para cada carga positiva ( $V = kq/r$ ) es positivo, mientras que el potencial para cada carga negativa es negativo.
2. Precisamente como en mecánica, sólo los *campos* de potencial son significativos, de aquí que el punto que se elija donde el potencial debe ser cero es arbitrario. Cuando se trabaja con cargas puntuales o distribuciones de carga finitas, por lo regular se define  $V = 0$  en un punto infinitamente lejano de la carga. Sin embargo, si la distribución de carga se extiende al infinito, algún punto cercano puede ser seleccionado como punto de referencia.

Potencial de una carga puntual

Energía potencial eléctrica de dos cargas

Potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua

- El potencial eléctrico en un punto dado debido a una distribución de carga continua se puede evaluar, dividiendo la distribución de carga en elementos de carga infinitesimales  $dq$  localizados a una distancia  $r$  del punto  $P$ . Al tratar entonces este elemento como carga puntual, el potencial en  $P$  debido al elemento es  $dV = k dq/r$ . El potencial total en  $P$  se obtiene al integrar  $dV$  sobre la distribución total de carga. Al realizar la integración para algunos problemas es necesario expresar  $dq$  en términos de  $r$  como una sola variable. Para poder simplificar la integración es importante que se tenga cuidado de considerar la geometría implicada en el problema. Revise los ejemplos 25.4 a 25.6 como guía para el uso de este método.
- Otro método que puede ser utilizado para obtener el potencial debido a una distribución de carga finita es comenzando con la definición de diferencia de potencial dada por la ecuación 25.4. Si  $E$  se conoce o puede ser obtenido fácilmente (digamos por la ley de Gauss), entonces la integral de línea  $E \cdot ds$  puede ser evaluada. Un ejemplo de este método se da en el ejemplo 25.7.
- Si se conoce el potencial en un punto, es posible obtener el campo eléctrico en el punto recordando que *el campo eléctrico es igual al negativo de la derivada del potencial con respecto a alguna coordenada*. Los ejemplos 25.4 y 25.5 muestran cómo se utiliza este proceso

## PREGUNTAS

- Con sus propias palabras, dé la diferencia entre potencial eléctrico y energía potencial eléctrica.
- Una carga negativa se mueve en la dirección de un campo eléctrico uniforme. ¿Su energía potencial aumenta o disminuye? ¿Su potencial eléctrico aumenta o disminuye?
- Si un protón se abandona desde el reposo en un campo eléctrico uniforme, ¿su potencial eléctrico aumenta o disminuye? ¿Qué pasa con su energía potencial?
- Dé una explicación física del hecho de que la energía potencial de un par de cargas del mismo signo es positiva, mientras que la energía potencial de un par de cargas de diferente signo es negativa.
- Un campo eléctrico uniforme es paralelo al eje  $x$ . ¿En qué dirección puede una carga ser desplazada en este campo sin realizar ningún trabajo externo sobre la carga?
- Explique por qué las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.
- Describa las superficies equipotenciales para a) una línea infinita de carga y b) una esfera uniformemente cargada.
- Explique por qué, en condiciones estáticas, todos los puntos en un conductor deben estar al mismo potencial.
- Si el potencial eléctrico de algún punto es cero, ¿puede concluirse que no existe carga en la vecindad de este punto? Dé una explicación.
- Si el potencial es constante en cierta región, ¿cuál es el campo eléctrico en esa región?
- El campo eléctrico dentro de una esfera hueca uniformemente cargada es cero. ¿Esto implica que el potencial es cero en interior de la esfera? Dé una explicación.
- El potencial de una carga puntual se define como cero a una distancia infinita. ¿Por qué no se puede definir el potencial de una línea infinita de carga como cero en  $r = \infty$ ?
- Dos esferas conductoras cargadas de diferente radio son conectadas por un alambre conductor como en la figura 25.21. ¿Cuál esfera tiene la mayor densidad de carga?
- ¿Qué determina el máximo potencial que un generador Van de Graaff puede alcanzar?
- ¿En qué tipo de clima podría una batería de automóvil descargarse con mayor facilidad y por qué?
- Explique el origen del resplandor que a veces se observa alrededor de los cables de las líneas de alto voltaje.
- ¿Por qué es importante evitar los bordes agudos o puntas afiladas en los conductores de alto voltaje?
- ¿Cómo protegería un circuito electrónico o un laboratorio de campos eléctricos externos? ¿Por qué esto es efectivo?
- ¿Por qué se está a salvo al permanecer en el interior de un automóvil durante una tormenta eléctrica intensa?
- Después de caminar por una alfombra, si toca a alguien puede recibir un toque. Explique por qué ocurre esto.

## PROBLEMAS

### Sección 25.1 Diferencia de potencial y potencial eléctrico

- Superficies esféricas concéntricas alrededor de una carga puntual en su centro son *superficies equipotenciales*.

La intersección de estas superficies con un plano a través de su centro común son *líneas equipotenciales*. ¿Cuánto trabajo se realiza para mover una carga  $q$  una distancia  $s$  a lo largo de un arco de una equipotencial de forma circular y de radio  $R$ ?

2. ¿Qué cambio en la energía potencial experimente una carga de  $12 \mu\text{C}$  cuando se mueve entre dos puntos para los cuales la diferencia de potencial es de  $65 \text{ V}$ ? Exprese su respuesta en eV.
3. a) Calcule la rapidez de un protón que se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de  $120 \text{ V}$ . b) Calcule la rapidez de un electrón que se acelera a través de la misma diferencia de potencial.
4. ¿A través de qué diferencia de potencial sería necesario acelerar un electrón para que el orden de magnitud de su velocidad aumente hasta el 40% de la velocidad de la luz, comenzando desde el reposo? ( $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ ).
5. Un deuterón (un núcleo que consta de un protón y un neutrón) se acelera a través de una diferencia de potencial de  $2.7 \text{ kV}$ . a) ¿Cuánta energía ganó? b) ¿Cuán rápido irá si comenzó desde el reposo?
6. ¿Qué diferencia de potencial se necesita para detener un electrón cuya velocidad inicial es de  $4.2 \times 10^5 \text{ m/s}$ ?
7. Un ion acelerado a través de una diferencia de potencial de  $115 \text{ V}$  experimenta un incremento en su energía potencial de  $7.37 \times 10^{-17} \text{ J}$ . Calcule la carga del ion.
8. ¿Cuánta energía es ganada por una carga de  $75 \mu\text{C}$  que se mueve a través de una diferencia de potencial de  $90 \text{ V}$ ? Exprese su respuesta en joules y electrón-volts.
9. Un positrón cuando se acelera desde el reposo entre dos puntos que se encuentran a una diferencia de potencial, adquiere una velocidad de 30% de la velocidad de la luz. ¿Qué velocidad adquiriría un protón si se acelera desde el reposo entre los mismos dos puntos?

**Sección 25.2 Diferencia de potencial en un campo eléctrico uniforme**

10. Considere dos puntos en un campo eléctrico uniforme. El potencial en el punto  $P_1$  es  $V_1 = -30 \text{ V}$ , y el potencial en  $P_2$  es  $V_2 = +150 \text{ V}$ . ¿Cuánto trabajo se realiza por una fuerza externa para mover una carga  $q = -4.7 \mu\text{C}$  desde  $P_2$  hasta  $P_1$ ?
11. ¿Cuánto trabajo se realiza (por una batería, generador u otra fuente de energía eléctrica) en mover un número de Avogadro de electrones desde un punto inicial donde el potencial eléctrico es  $9 \text{ V}$  hasta un punto donde el potencial es  $-5 \text{ V}$ ? (El potencial en cada caso es medido relativo a un punto de referencia común.)
12. Un capacitor consta de dos placas paralelas separadas por una distancia de  $0.3 \text{ mm}$ . Si una diferencia de potencial de  $20 \text{ V}$  se mantiene entre las placas, calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre las placas.
13. El campo eléctrico entre dos placas paralelas separadas una distancia de  $1.8 \text{ cm}$  tiene un valor uniforme de  $2.4 \times 10^4 \text{ N/C}$ . Encuentre la diferencia de potencial entre las dos placas. ¿Cuánta energía cinética puede ganarse por un deuterón al ser acelerado desde la placa positiva a la negativa?
14. Suponga que un electrón se abandona desde el reposo en un campo eléctrico uniforme cuya intensidad es  $5.9 \times 10^3 \text{ V/m}$ . a) ¿Cuál será la diferencia de potencia que habrá pasado después de moverse  $1 \text{ cm}$ ? b) ¿Cuán rápido se moverá el electrón después de haber viajado  $1 \text{ cm}$ ?

15. Un electrón que se mueve paralelo al eje de las  $x$  tiene una velocidad inicial de  $3.7 \times 10^6 \text{ m/s}$  en el origen. La velocidad del electrón se reduce a  $1.4 \times 10^5 \text{ m/s}$  en el punto  $x = 2 \text{ cm}$ . Calcule la diferencia de potencial entre el origen y el punto  $x = 2 \text{ cm}$ . ¿Cuál punto tiene mayor potencial?
16. Un positrón tiene la misma carga que un protón, pero la misma masa que un electrón. Suponga que un positrón se mueve  $5.2 \text{ cm}$  en la dirección de un campo eléctrico uniforme de  $480 \text{ V/m}$ . a) ¿Cuánta energía potencial ganó o perdió? b) Cuánta energía cinética ganó o perdió?
17. Un protón se mueve en la región de un campo eléctrico uniforme. El protón experimenta un incremento en energía cinética de  $5 \times 10^{-18} \text{ J}$  después de realizar un desplazamiento de  $2 \text{ cm}$  en la dirección paralela al campo. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?
18. Un campo eléctrico uniforme de magnitud  $325 \text{ V/m}$  está dirigido en dirección *negativa* de las  $y$ , figura 25.29. Las coordenadas del punto A son  $(-0.2, -0.3) \text{ m}$ , y las del punto B son  $(0.4, 0.5) \text{ m}$ . Calcule el potencial  $V_B - V_A$  utilizando la trayectoria azul.

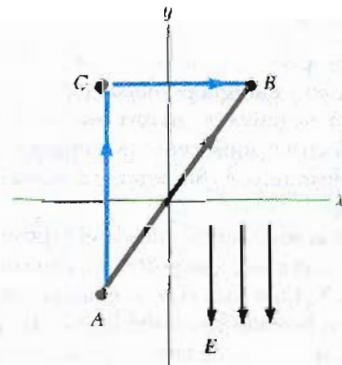


Figura 25.29 (Problemas 18 y 19).

19. Para la situación descrita en el problema 18, calcule el cambio en potencial eléctrico al ir del punto A al punto B a lo largo de trayectoria roja AB. ¿Cuál punto está a mayor potencial?
20. Un campo eléctrico uniforme de magnitud  $250 \text{ V/m}$  está dirigido en la dirección del eje  $x$  positivo. a) Suponga que una carga de  $12 \mu\text{C}$  se mueve desde el origen hasta un punto  $(x, y) = (20 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$ . ¿A través de qué diferencia de potencial se movió? b) ¿Cuál es el cambio en su energía potencial?

**Sección 25.3 Potencial eléctrico y energía potencial debido a cargas puntuales.**

*Nota: Se asumirá que el potencial de referencia para  $V = 0$  será  $r = \infty$  a menos que el problema en particular requiera otro.*

21. ¿A qué distancia de una carga puntual de  $8 \mu\text{C}$  se tendría un potencial igual a  $3.6 \times 10^4 \text{ V}$ ?
22. Un pequeño objeto esférico porta una carga de  $8 \text{ nC}$ . ¿A qué distancia desde su centro el potencial es igual a.

100 V, 50 V y 25 V? ¿Es el espaciamiento entre equipotenciales proporcional al cambio en V?

- 23. A una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$ , el potencial eléctrico es  $V = 400$  V y la magnitud del campo eléctrico es  $E = 150$  N/C. Determine el valor de  $q$  y de  $r$ .
- 24. Dos cargas puntuales se colocan como se muestra en la figura 25.30, donde  $q_1 = +4 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -2 \mu\text{C}$ ,  $a = 0.30$  m, y  $b = -0.90$  m. Calcule el valor del potencial eléctrico en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . ¿Cuál punto está a mayor potencial?

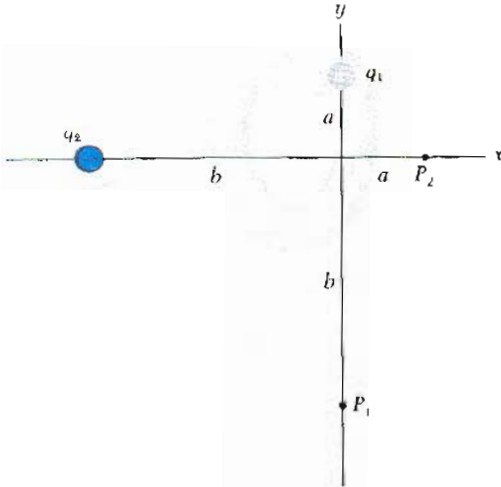


Figura 25.30 (Problema 24).

- 25. Una carga de  $+2 \mu\text{C}$  se coloca sobre el eje  $y$  en  $y = +1.6$  m, y una carga de  $-4.6 \mu\text{C}$  se coloca en el origen. Calcule el potencial en el punto  $(0.4 \text{ m}, 0)$ .
- 26. Dos cargas puntuales  $Q_1 = +5 \mu\text{C}$  y  $Q_2 = -2 \mu\text{C}$  están separadas una distancia de 50 cm. a) ¿Dónde, a lo largo de la línea que pasa a través de ambas, cargas el potencial es cero (además de  $r = \infty$ )? b) Determine la intensidad del campo eléctrico en el punto encontrado en a). ¿Si  $V = 0$  en ese punto, por qué  $E$  no es igual a cero también?
- 27. Las tres cargas que se ven en la figura 25.31 están en los vértices de un triángulo isósceles. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la base; tomando  $q = 7 \mu\text{C}$ .

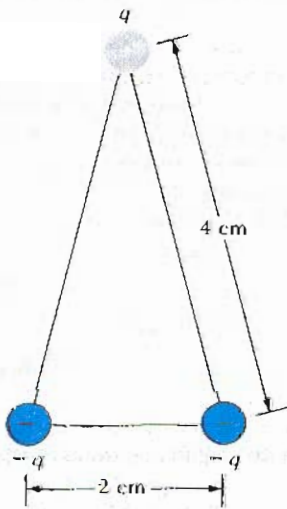


Figura 25.31 (Problema 27)

- 28. Calcule el valor del potencial eléctrico en el punto  $P$  debido a la configuración de carga que aparece en la figura 25.32. Utilice los valores  $q_1 = 5 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -10 \mu\text{C}$ ,  $a = 0.4$  m, y  $b = 0.50$  m.

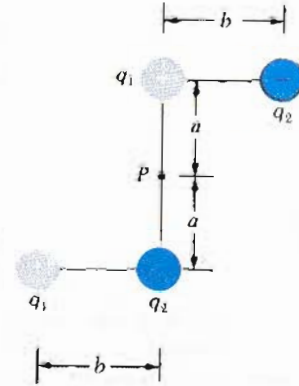


Figura 25.32 (Problema 28).

- 29. Dos cargas puntuales,  $Q_1 = +5 \mu\text{C}$  y  $Q_2 = -3 \mu\text{C}$  están separadas 35 cm. a) ¿Cuál es la energía potencial del par? ¿Cuál es el significado del signo algebraico de su resultado? b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto medio entre las dos cargas?
- 30. Una carga  $q_1 = -9 \mu\text{C}$  se localiza en el origen, y una segunda carga  $q_2 = -1 \mu\text{C}$  se localiza sobre el eje de la  $x$  en  $x = 0.7$  m. Calcule la energía potencial eléctrica de este par de cargas.
- 31. El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno establece que el electrón sólo puede estar en ciertas órbitas. El radio de cada una de la órbitas de Bohr está dado por la expresión  $r = n^2(0.0529 \text{ nm})$  donde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Calcule la energía potencial eléctrica del átomo de hidrógeno cuando el electrón está en: a) la primera órbita,  $n = 1$ , b) en la segunda órbita,  $n = 2$ , c) cuando el electrón ha escapado del átomo,  $r = \infty$ . Expresé su respuesta en electrón-volt.
- 32. Calcule la energía que se requiere para hacer el arreglo de cargas que se observa en la figura 25.33, donde  $a = 0.20$  m,  $b = 0.40$  m y  $q = 6 \mu\text{C}$ .

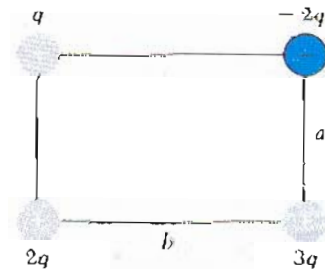


Figura 25.33 (Problema 32).

- 33. Demuestre que el trabajo requerido para colocar cuatro cargas puntuales idénticas de magnitud  $Q$  en las esquinas de un cuadrado de lado  $s$  está dado por  $5.41 kQ^2/s$ .
- 34. Cuatro cargas puntuales iguales de  $q = +5 \mu\text{C}$  se localizan en las esquinas de un rectángulo de 30 cm por

40 cm. Calcule la energía potencial almacenada en esta configuración de carga.

35. Cuatro cargas se localizan en las esquinas de un rectángulo como se muestra en la figura 25.34. ¿Cuánta energía debe utilizarse para enviar las dos cargas de  $4 \mu\text{C}$  hasta el infinito?

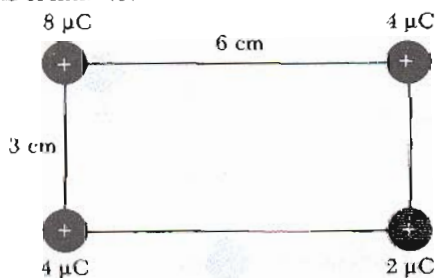


Figura 25.34 (Problema 35).

36. ¿Cuánto trabajo se requiere para ensamblar ocho cargas puntuales, cada una de magnitud  $q$ , en las esquinas de un cubo de lado  $s$ ?

**Sección 25.4 Potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua**

37. Considere un anillo de radio  $R$  con carga total  $Q$  distribuida uniformemente sobre su perímetro. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el punto en el centro del anillo y un punto sobre el eje del anillo a una distancia de  $2R$  del centro del anillo?
38. Considere un par de Helmholtz el cual consta de dos anillos coaxiales de 30 cm de radio, separados una distancia de 30 cm. a) Calcule el potencial eléctrico en el punto medio del eje común de los dos anillos, suponiendo que cada anillo tiene una carga de  $+5 \mu\text{C}$  distribuida uniformemente. b) ¿Cuál es el potencial en este punto si los anillos tienen cargas iguales en magnitud y opuestas en signo?
39. Una barra de longitud  $L$  (Fig. 25.35) está a lo largo del eje  $x$  con su extremo izquierdo en el origen y tiene una densidad de carga no uniforme  $\lambda = \alpha x$  (donde  $\alpha$  es una constante positiva) a) ¿Cuáles son las unidades de la constante? b) Calcule el potencial eléctrico en el punto  $A$ , a una distancia  $d$  desde el extremo izquierdo de la barra.

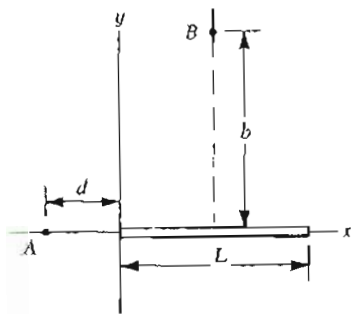


Figura 25.35 (Problemas 39 y 40).

40. Para el arreglo descrito en el problema anterior, calcule el potencial eléctrico en el punto  $B$  sobre la bisectriz perpendicular a la barra a una distancia  $b$  arriba del eje de las  $x$ . Note que la barra tiene una densidad de carga no uniforme  $\lambda = \alpha x$ .

Calcule el potencial eléctrico en el punto  $P$  sobre el eje del anillo que se muestra en la figura 25.36, el cual tiene una densidad de carga uniforme  $\sigma$  y sus radios interno y externo son, respectivamente,  $a$  y  $b$ .

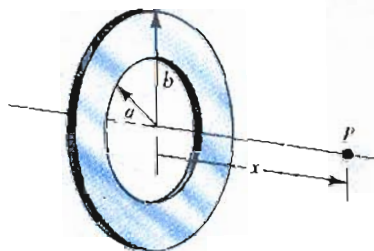


Figura 25.36 (Problema 41).

**\*Sección 25.5 Obtención de  $E$  a partir del potencial eléctrico**

42. El potencial eléctrico en cierta región del espacio está dado por  $V = 3x^2y - 4xz - 5y^2$  volts. Encuentre a) el potencial eléctrico y b) las componentes del campo eléctrico en el punto  $(+1, 0, +2)$  donde todas las distancias están en metros.
43. Sobre cierta región del espacio, el potencial eléctrico está dado por  $V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$ . Determine las expresiones para las componentes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  del campo eléctrico en esa región. ¿Cuál es la magnitud del campo en el punto  $P$ , con coordenadas  $(1, 0, -2)$  (en metros)?
44. El potencial eléctrico en cierta región del espacio está dado por  $V = 4xz - 5y + 3z^2$  volts. Determine la magnitud del campo eléctrico en el punto  $(+2, -1, +3)$  donde todas las distancias son en metros.
45. El potencial eléctrico sobre una región particular está dado por  $V = 3xy^2 - 4zk$ . Determine el ángulo entre la dirección del campo  $E$ , y la dirección del eje positivo de las  $x$  en el punto  $P$ , cuyas coordenadas (en metros) son  $(1, 0, 1)$ .
46. Dos placas paralelas son perpendiculares al eje  $x$ . La placa negativa está en el plano  $yz$  y la placa positiva está en el punto  $x = x_0$ . El potencial en cualquier punto entre las placas  $x < x_0$  está dado por  $V(x) = bx$  donde  $b$  es una constante. Encuentre una expresión para el campo eléctrico  $E$  entre las dos placas.
47. El potencial eléctrico dentro de un conductor esférico cargado de radio  $R$  está dado por  $V = kQ/R$  y fuera del conductor está dado por  $V = kQ/r$ . Utilizando  $E_r = -\frac{dV}{dr}$ , deduzca el campo eléctrico en ambas partes a) dentro ( $r < R$ ) y b) afuera ( $r > R$ ) de esta distribución de carga.
48. El potencial eléctrico dentro de una esfera aislante uniformemente cargada de radio  $R$  está dado por

$$V = \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$



y afuera por

$$V = \frac{kQ}{r}$$

Utilice  $E_r = -\frac{dV}{dr}$  para deducir el campo en ambas partes a) dentro ( $r < R$ ) y b) afuera ( $r > R$ ) de esta distribución de carga

49. Utilice el resultado del ejemplo 25.9 para evaluar  $V$  en  $x = 3a$  para el dipolo descrito cuando  $a = 2 \text{ mm}$  y  $q = 3 \mu\text{C}$ . Compare esta respuesta con la que se obtendría usando la fórmula aproximada válida cuando  $x \gg a$ .
50. Utilice el resultado exacto obtenido para el dipolo en el ejemplo 25.9 y encuentre el campo eléctrico en cualquier punto donde  $x > a$  sobre el eje del dipolo. Evalúe  $E$  para  $x = 3a$  si  $a = 2 \text{ mm}$  y  $q = 3 \mu\text{C}$ .

**Sección 25.6 Potencial de un conductor cargado**

51. ¿Cuántos electrones hay que quitarle a un conductor esférico inicialmente descargado de radio 0.3 m para producir un potencial de 7.5 kV en la superficie?
52. Calcule la densidad de carga superficial  $\sigma$  (en  $\text{C/m}^2$ ) para un conductor sólido esférico de radio  $R = 0.25 \text{ m}$  si el potencial a una distancia de 0.5 m desde el centro de la esfera es de 1300 V.
53. Un conductor esférico tiene un radio de 14 cm y una carga de  $+26 \mu\text{C}$ . Calcule el campo eléctrico y el potencial eléctrico a las siguientes distancias del centro de este conductor: a)  $r = 10 \text{ cm}$ , b)  $r = 20 \text{ cm}$ , y c)  $r = 14 \text{ cm}$ .
54. Dos conductores esféricos de radios  $r_1$  y  $r_2$  están conectados por un alambre conductor como se muestra en la figura 25.21. Si  $r_1 = 0.94 \text{ m}$ ,  $r_2 = 0.47 \text{ m}$ , y el campo en la superficie de la esfera más pequeña es  $890 \text{ N/C}$ , calcule la carga total en la esfera más grande suponiendo que inicialmente está descargada. Suponga que la separación de las esferas es grande, comparada con sus radios.
55. Dos conductores esféricos cargados son conectados por un alambre conductor largo. Una carga total de  $+20 \mu\text{C}$  se coloca sobre esta combinación de esferas. a) Si una tiene un radio de 4 cm y la otra tiene un radio de 6 cm, ¿cuál es el campo eléctrico cercano a la superficie de cada esfera? b) ¿Cuál es el potencial eléctrico de cada esfera?
56. Un conductor en forma de huevo tiene una carga de  $+43 \text{ nC}$  sobre su superficie. Si el área de su superficie total es de  $38 \text{ cm}^2$ . a) ¿Cuál es la densidad superficial de carga promedio? b) ¿Cuál es el campo eléctrico dentro del conductor? c) ¿Cuál es el campo eléctrico (promedio) precisamente afuera del conductor?

**\*Sección 25.8 Aplicaciones de la electrostática**

57. Considere un generador Van de Graaff con diámetro de 30 cm operando en aire seco. a) ¿Cuál es el máximo potencial en cúpula? ¿Cuál es la máxima carga en la cúpula?
58. a) Calcule la mayor carga posible sobre la superficie de un Van de Graaff con 40 cm de diámetro en la cúpula rodeado de aire. b) ¿Cuál es el potencial de esta esfera (cúpula) cuando tiene la carga calculada anteriormente?

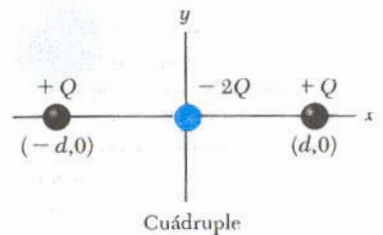
59. ¿Qué carga tendría que ser desplazada sobre la superficie de un Van de Graaff, cuya cúpula tiene un radio de 15 cm, para producir chispazos de 10 cm en el aire?
60. ¿Qué potencia en watts debe liberar un generador Van de Graaff si produce un haz de  $100 \mu\text{A}$  de protones con una energía de 12 MeV?

**PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS**

61. A una cierta distancia desde una carga puntual la intensidad del campo es  $500 \text{ V/m}$  y el potencial es  $-3000 \text{ V}$ . a) ¿Cuál es la distancia a la carga? b) ¿Cuál es la magnitud de la carga?
62. Todas las esquinas, excepto una, de un cubo de 1 m están ocupadas por cargas de  $+1 \mu\text{C}$ . ¿Cuál es el potencial eléctrico en la esquina vacía?
63. Tres cargas puntuales de magnitudes  $+8 \mu\text{C}$ ,  $-3 \mu\text{C}$  y  $+5 \mu\text{C}$  se colocan en las esquinas de un triángulo cuyos lados son de 9 cm de longitud cada uno. Calcule el potencial eléctrico en el centro del triángulo.
64. Considere el arreglo de ocho cargas negativas iguales colocadas en las esquinas de un cubo cuyo lado es  $\ell = 0.15 \text{ m}$ . Si cada una de las ocho cargas tiene una carga de  $q = -6 \mu\text{C}$ , determine el potencial en el centro del cubo.
65. Cargas iguales ( $q = +2 \mu\text{C}$ ) se colocan a intervalos de  $30^\circ$  alrededor del ecuador de una esfera con radio de 1.2 m. ¿Cuál es el potencial eléctrico a) en el centro de la esfera, b) en el polo norte de la esfera?
66. La distribución de carga que se ve en la figura 25.37 se conoce como un cuadrupolo lineal. a) Encuentre la expresión exacta para el potencial en un punto sobre el eje  $x$  donde  $x > d$ . b) Demuestre que la expresión encontrada en a) se reduce a

$$V = \frac{2kQd^2}{x^3}$$

cuando  $x \gg d$ .



**Figura 25.37**  
(Problemas 66, 67, y 75).

67. Utilice el resultado exacto del problema 66 para evaluar el potencial para un cuadrupolo en  $x = 3d$  si  $d = 2 \text{ mm}$  y  $q = 3 \mu\text{C}$ . Compare esta respuesta con la obtenida cuando se usa la aproximación resultante cuando  $x \gg d$ .
68. a) Use el resultado exacto del problema 66 para encontrar el campo eléctrico en cualquier punto a lo largo del eje del cuadrupolo lineal para  $x > d$ . b) Evalúe  $E$  para  $x = 3d$  si  $d = 2 \text{ mm}$  y  $Q = 3 \mu\text{C}$ .
69. Dos cargas puntuales de igual magnitud se localizan a lo largo del eje  $y$  a igual distancia sobre y debajo del eje  $x$ , como se muestra en la figura 25.38. a) Haga la gráfica del potencial en los puntos a lo largo del eje  $x$  en el intervalo  $-3a < x < 3a$ . Puede graficar el potencial en

unidades de  $kQ/a$ , donde  $k$  es la constante de Coulomb.  
 b) Considere que la carga colocada en  $-a$  es *negativa* y grafique el potencial a lo largo del eje  $y$  en el intervalo  $-4a < y < 4a$ .

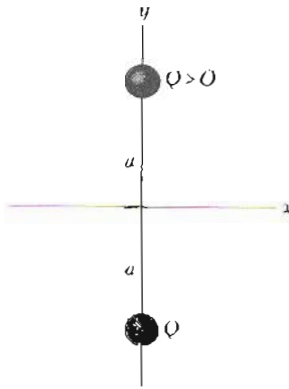


Figura 25.38 (Problema 69).

- 70. Una carga neta positiva  $Q$  se coloca sobre una esfera conductora sólida de radio  $R$ . Trace la gráfica del potencial eléctrico  $V$  como función de  $r$ , la distancia desde el centro de la esfera. El rango de  $r$  está en el intervalo  $0 < r < 3R$ , y  $V$  se grafica en unidades de  $kQ/R$ .
- 71. Una gota esférica de agua de 2 mm de radio tiene un potencial eléctrico de 300 V en su superficie. a) ¿Cuál es la carga en la gota? b) Si dos gotas de igual carga y radio se unen para formar una sola gota, ¿cuál es el potencial en la superficie de la gota resultante? (Suponga que la carga no se pierde al unirse las gotas.)
- 72. Un generador Van de Graaff opera de tal manera que la diferencia de potencial entre el electrodo de alto voltaje y los peines de carga (puntos A y B en la figura 25.24) es de  $1.5 \times 10^4$  V. Calcule la potencia requerida para el motor de la banda (contra las fuerzas eléctricas) en un instante cuando la corriente efectiva en el electrodo de alto voltaje es  $500 \mu\text{A}$ .
- 73. Calcule el trabajo que se debe realizar para cargar un cascarón esférico de radio  $R$  con una carga total  $Q$ .
- 74. Una esfera conductora de radio  $r$  está concéntrica con un gran cascarón esférico de radio  $R$ . Para dicho arreglo, demuestre que si las cargas sobre las esferas tienen valores  $q$  y  $Q$ , respectivamente, la diferencia de potencial entre las dos esferas estaría dado por

$$V_r - V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

- 75. ¿Cuánto trabajo se requiere para ensamblar el cuadrupolo que se observa en la figura 25.37 si  $d = 2$  mm y  $Q = 3 \mu\text{C}$ ?
- 76. Un gran rectángulo de longitud  $4a$  y ancho  $3a$  contiene cargas iguales positivas de magnitud  $q_1 = 4 \mu\text{C}$  en vértices opuestos como se muestra en la figura 25.39. Un rectángulo pequeño de longitud  $2a$  y ancho  $a$  tiene cargas iguales positiva de  $q_2 = 6 \mu\text{C}$  localizadas en los vértices que muestra la figura. ¿Cuánto trabajo debe ser realizado en contra de las fuerzas eléctricas para rotar el pequeño rectángulo sobre el lado del grande a la

posición que se marca por la línea punteada? Sea  $a = 0.1$  m.

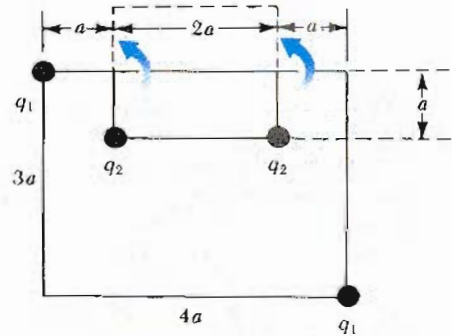


Figura 25.39 (Problema 76).

- 77. Una lámina cargada de lado  $L$  tiene una densidad de carga  $\sigma$  y está colocada en el plano  $xy$  como en la figura 25.40. Obtenga la expresión integral necesaria para calcular el potencial eléctrico en un punto  $P$  sobre el eje perpendicular que pasa a través del centro de la lámina. Suponga que el punto  $P$  está a una distancia  $d$  de la lámina.

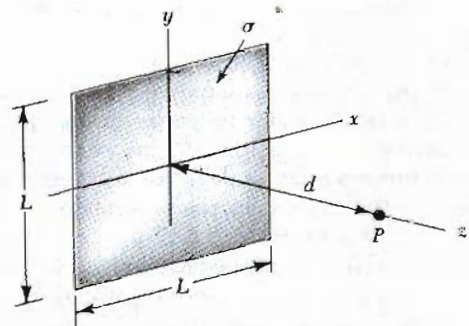


Figura 25.40 (Problema 77).

- 78. La barra delgada uniformemente cargada que se observa en la figura 25.41 tiene una longitud  $L$  y una densidad de carga  $\lambda$ . Determine la expresión para el potencial eléctrico en un punto  $P$ , a una distancia  $b$  a lo largo del eje  $y$  positivo.

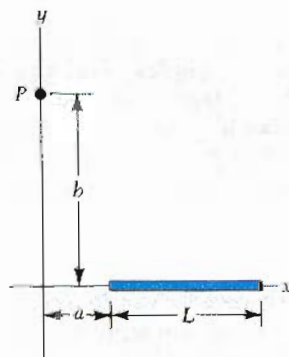


Figura 25.41 (Problema 78).

- 79. Se mostró en el ejemplo 25.6 que el potencial en un punto  $P$  a una distancia  $d$  sobre un extremo de una barra uniformemente cargada de longitud  $l$  colocada a lo largo del eje  $x$  está dado por

$$V = \frac{kQ}{\ell} \ln \left( \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + d^2}}{d} \right)$$

Utilice este resultado para derivar una expresión para la componente  $y$  del campo eléctrico en el punto  $P$ . (Sugerencia: Reemplace  $d$  con  $y$ ).

80. La figura 25.42 muestra varias líneas equipotenciales cada una etiquetada con su potencial en volts. La distancia entre las líneas de la rejilla cuadrada representa 1 cm. a) ¿Es la magnitud de  $E$  mayor en  $A$  o en  $B$ ? ¿Por qué? b) ¿Cuál es valor de  $E$  en  $B$ ? c) Represente cómo se vería en campo  $E$  trazando al menos ocho líneas de campo.

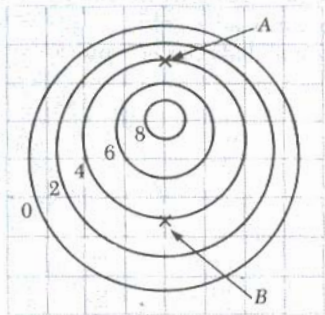


Figura 25.42 (Problema 80).

81. Un dipolo se coloca a lo largo del eje  $y$  como en la figura 25.43. a) En un punto  $P$ , el cual está lejos del dipolo ( $r \gg a$ ), el potencial eléctrico está dado por

$$V = k \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

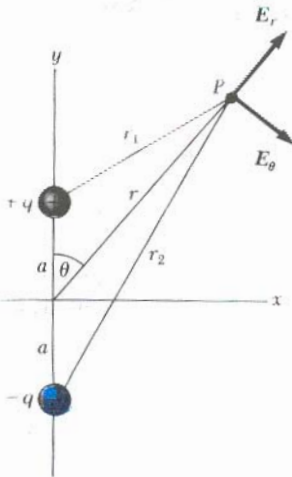


Figura 25.43 (Problema 81).

donde  $p = 2qa$ . Calcule la componente radial asociada al campo eléctrico  $E_r$  y la componente perpendicular  $E_\theta$ . Note que  $E_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$ . ¿Son estos resultados razonables para  $\theta = 90^\circ$  y  $0^\circ$ ? ¿Para  $r = 0$ ? b) Para el dipolo que se muestra, exprese  $V$  en términos de coordenadas rectangulares utilizando  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  y

$$\cos \theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Utilizando este resultado y tomando  $r \gg a$ , calcule las componentes  $E_x$  y  $E_y$ .

82. Un disco de radio  $R$  tiene un densidad de carga superficial no uniforme  $\sigma = Cr$ , donde  $C$  es una constante y  $r$  es medida desde el centro del disco (Fig. 25.44). Encuentre (por integración directa) el potencial en un punto axial  $P$  a una distancia  $x$  del disco.

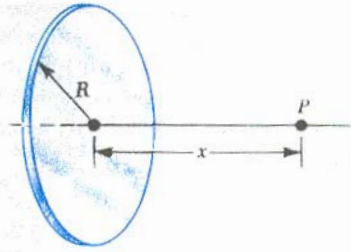


Figura 25.44 (Problema 82).

83. Una esfera sólida de radio  $R$  tiene una densidad de carga uniforme  $\rho$  y una carga total  $Q$ . Derive una expresión para la energía potencial eléctrica total de la esfera cargada. (Sugerencia: imagine que la esfera es construida sumando placas sucesivas de cascarones concéntricos de carga  $dq = (4\pi r^2 dr)\rho$  y use  $dV = Vdq$ .)
84. Un contador Geiger-Muller es un típico detector de radiación que consta esencialmente de un cilindro hueco (el cátodo) de radio interior  $r_a$  y un alambre cilíndrico coaxial (el ánodo) de radio  $r_b$  (Fig. 25.45). La carga por

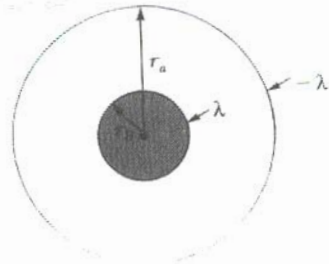


Figura 25.45 (Problema 84).

unidad de longitud sobre el ánodo es  $\lambda$ , asimismo la carga por unidad de longitud en el cátodo es  $-\lambda$ . a) Demuestre que la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro en la región sensible del detector está dado por

$$V = 2k\lambda \ln \left( \frac{r_b}{r_a} \right)$$

b) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico sobre esta región está dada por

$$E = \frac{V}{\ln(r_b/r_a)} \left( \frac{1}{r} \right)$$

donde  $r$  es la distancia desde el centro del ánodo al punto donde el campo es calculado.

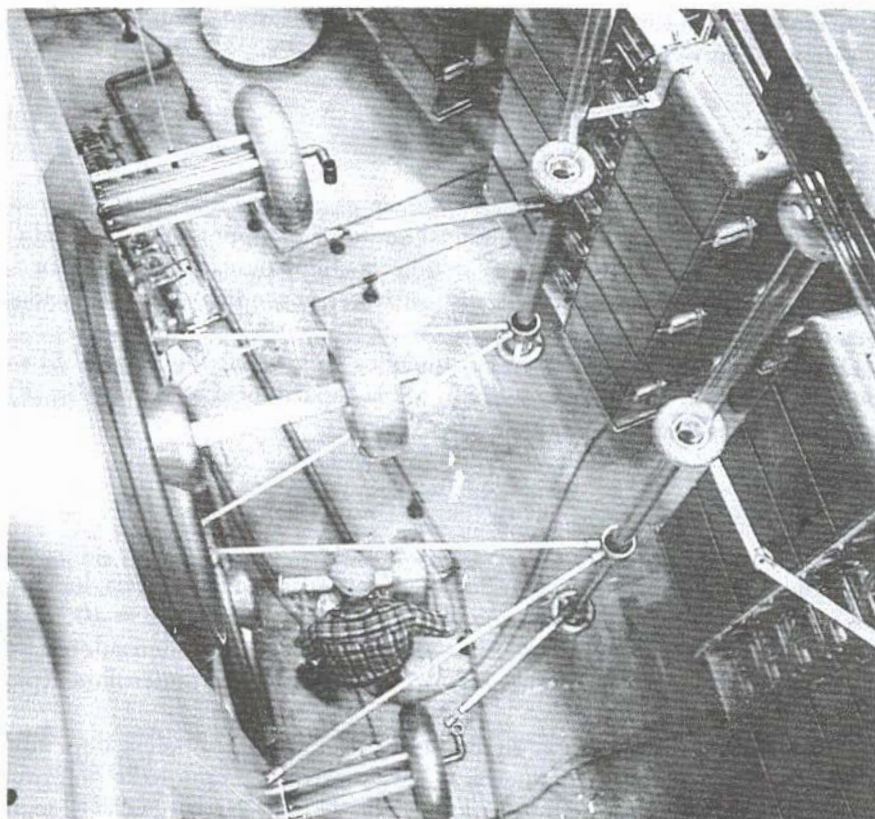
$$V = k \frac{Q}{\ell} \ln \left( \frac{\ell + d}{d} \right)$$

### PROBLEMAS DE CALCULADORA/COMPUTADORA

85. Una barra uniformemente cargada se coloca a lo largo del eje  $x$  como en la figura 23.14. La carga total sobre la barra es de  $+16 \times 10^{-10} \text{ C}$ ,  $d = 1.0 \text{ m}$ , y  $\ell = 2.0 \text{ m}$ . Estime el potencial eléctrico en  $x = 0$  aproximando la barra a: a) una carga puntual en  $x = 2.0 \text{ m}$ , b) dos cargas puntuales (cada una de  $+8 \times 10^{-10} \text{ C}$ ) en  $x = 1.5 \text{ m}$  y  $x = 2.5 \text{ m}$  y c) cuatro cargas puntuales (cada carga de  $4 \times 10^{-10} \text{ C}$ ) en  $x = 1.25 \text{ m}$ ,  $x = 1.75 \text{ m}$ ,  $x = 2.25 \text{ m}$  y  $x = 2.75 \text{ m}$ . d) Escriba un programa que le permita extender sus cálculos hasta 256 cargas puntuales igualmente espaciadas, y compare su resultado con el dado por la expresión
86. Un anillo de radio  $1 \text{ m}$  tiene una carga por unidad de longitud uniforme y una carga total de  $+16 \times 10^{-10} \text{ C}$ . El anillo se encuentra en el plano  $yz$  y su centro está en  $x = 0$ , como en la figura 25.10. Estime el potencial eléctrico a lo largo del eje  $x$  en  $x = 2 \text{ m}$  aproximando el anillo a: a) una carga puntual en el origen, b) dos cargas puntuales (cada carga de  $+8 \times 10^{-10} \text{ C}$ ) diametralmente opuestas una de la otra sobre el anillo, y c) cuatro cargas puntuales (cada carga de  $+4 \times 10^{-10} \text{ C}$ ) simétricamente espaciadas en el anillo. d) Escriba un programa que le permita extender sus cálculos hasta 64 cargas puntuales igualmente espaciadas sobre el anillo, y compare su resultado con el dado por la expresión exacta, ecuación 25.18.

# 26

## Capacitancia y condensadores



*Condensadores muy grandes se utilizan como componentes en los generadores de alto voltaje. En esta fotografía, se muestra la instalación técnica de los interruptores de seguridad en la "sección de aceite" que contiene el generador Max, los cuales se aprecian a la derecha de la fotografía. Éste es el principal interruptor mecánico de alto voltaje que une el generador Max con los módulos del acelerador. (Cortesía de Sandia National Laboratories)*

**E**ste capítulo se refiere a las propiedades de los condensadores, dispositivos que almacenan carga. Los condensadores se utilizan comúnmente en una gran variedad de circuitos eléctricos; por ejemplo, se utilizan 1) para sintonizar la frecuencia en los radio receptores, 2) como filtros en las fuentes de poder, 3) para eliminar el chisporroteo en los sistemas de ignición de los automóviles y 4) como dispositivos de almacenamiento de energía en las unidades electrónicas de destello.

Básicamente un condensador consta de dos conductores que poseen cargas iguales pero de signo opuesto. Se verá que la capacitancia dada en un dispositivo depende de su geometría y del material que separa a los conductores, llamado *dieléctrico*. Un dieléctrico es un material aislante que tiene propiedades eléctricas distintivas, las cuales pueden comprenderse mejor considerando las propiedades de los átomos.

### 26.1 DEFINICIÓN DE CAPACITANCIA

Consideremos dos conductores que tienen una diferencia de potencial  $V$  entre ellos, y supongamos que los dos conductores tienen cargas iguales y de signo

opuesto como en la figura 26.1. Esto se puede lograr conectando los dos conductores descargados a las terminales de una batería. Una combinación de conductores así cargados es un dispositivo conocido como *condensador*. Se encuentra que la diferencia de potencial  $V$  es proporcional a la carga  $Q$  en el condensador.<sup>1</sup>

La **capacitancia**  $C$ , de un condensador se define como la razón de la magnitud de la carga en cualquiera de los dos conductores a la diferencia de potencial entre ellos.

**Definición de capacitancia**

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{26.1}$$

Obsérvese que por definición *la capacitancia es siempre una cantidad positiva*. Además, como la diferencia de potencial aumenta al aumentar la carga almacenada en el condensador, la razón  $Q/V$  es una constante para un condensador dado. Por lo tanto, la capacitancia de un dispositivo es la medida de su capacidad de almacenar carga y energía potencial eléctrica.

De la ecuación 26.1, se ve que las unidades de la capacitancia en el SI son el Coulomb por Volt. La unidad en el SI para la capacitancia es el **faradio (F)**, en honor a Michael Faraday. Es decir,

$$[\text{Capacitancia}] = 1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$$

El faradio es una unidad muy grande de capacitancia; en la práctica, los dispositivos típicos tienen capacitancias que van desde microfarad ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ) hasta picofarad ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ). Como una nota práctica, los condensadores tienen etiquetas que marcan  $\text{mF}$  para microfarad y  $\text{mmF}$  para micromicrofarad (picofarad).

Como se demostrará en la siguiente sección, la capacitancia depende del arreglo geométrico de los conductores. Para mostrar este punto se determinará la capacitancia de un conductor esférico aislado de radio  $R$  y carga  $Q$ . (El segundo conductor se puede considerar como un cascarón esférico hueco concéntrico de radio infinito). Ya que el potencial de la esfera es simplemente  $kQ/R$  (donde  $V = 0$  en el infinito) su capacitancia está dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ/R} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R \tag{26.2}$$

Esto demuestra que la capacitancia de una esfera cargada aislada es proporcional a su radio y que es independiente tanto de la carga como de la diferencia de potencial. Por ejemplo, una esfera metálica aislada de radio 0.15 m tiene una capacitancia de

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0.15 \text{ m}) = 17 \text{ pF}$$

**26.2 CÁLCULO DE LA CAPACITANCIA**

La capacitancia de un par de conductores cargados con cargas opuestas puede ser calculada de la siguiente manera. Se supone una carga de magnitud  $Q$ , y la

<sup>1</sup> La proporcionalidad entre la diferencia de potencial y la carga en los dos conductores puede ser probada por la ley de Coulomb o por experimentación.

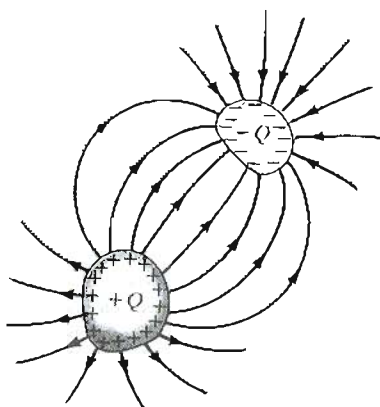


Figura 26.1 Un condensador consta de dos conductores aislados uno del otro y de sus alrededores. Cuando el condensador es cargado, los dos conductores tienen la misma carga pero opuesta.

diferencia de potencial se determina con las técnicas descritas en el capítulo anterior. Así, entonces simplemente se utiliza  $C = Q/V$  para evaluar la capacitancia. Como podría esperarse, el cálculo de la capacitancia es relativamente fácil si la geometría del condensador es simple.

Esto se mostrará con tres geometrías que son familiares, dos placas paralelas, dos cilindros concéntricos, y dos esferas concéntricas. En estos ejemplos, se supondrá que la carga en los conductores está separada por vacío. El efecto del dieléctrico entre los conductores se tratará en la sección 26.5.

### Condensador de placas paralelas

Dos placas paralelas de igual área  $A$  están separadas una distancia  $d$  como en la figura 26.2. Una placa tiene carga  $+Q$ , y la otra, carga  $-Q$ . La carga por unidad de área en cada placa es  $\sigma = Q/A$ . Si las placas están muy cercanas una de la otra (comparada con su longitud y su ancho), podemos desprestigiar los efectos de los extremos y suponer que el campo eléctrico es uniforme entre las placas y cero en cualquier otro lugar. De acuerdo con la ecuación 24.6, el campo eléctrico entre las placas está dado por

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

La diferencia de potencial entre las placas es igual a  $Ed$ ; por lo tanto,

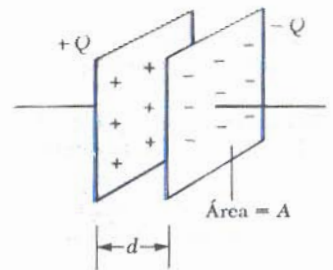
$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

Sustituyendo este resultado dentro de la ecuación 26.1, encontramos que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd/\epsilon_0 A}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

(26.3)

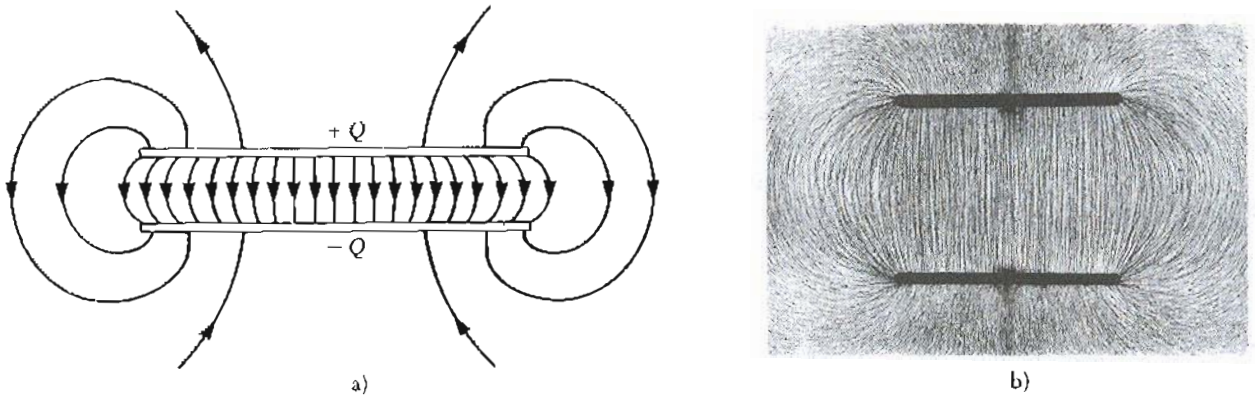


Esto significa que la capacitancia de un condensador de placas paralelas es proporcional al área de éstas e inversamente proporcional a la separación entre ellas.

Como se ve de la definición de capacitancia,  $C = Q/V$ , la cantidad de carga almacenada en un condensador para una diferencia de potencial dada entre sus placas aumenta al aumentar la capacitancia. Por lo tanto, se ve razonable que si se construye un condensador con placas grandes debería almacenar grandes cargas. La cantidad de carga necesaria para producir una diferencia de potencial dada aumenta cuando decrece la separación entre las placas.

Una observación cuidadosa de las líneas de campo eléctrico para un condensador de placas paralelas revela que el campo es uniforme en la región central entre las placas como se presenta en la figura 26.3a. Sin embargo, el campo no es uniforme en las orillas de las placas. La figura 26.3b es una fotografía del patrón del campo eléctrico en un condensador de placas paralelas, el cual muestra las líneas de un campo no uniforme en las orillas de las placas.

**Figura 26.2** Un condensador de placas paralelas consta de dos placas paralelas cada una de área  $A$ , separadas una distancia  $d$ . Las placas tienen cargas iguales y opuestas.



**Figura 26.3** a) El campo eléctrico entre las placas de un condensador de placas paralelas es uniforme cerca del centro, pero es no uniforme cerca de sus orillas. b) Patrón de campo eléctrico de dos placas conductoras con cargas opuestas. Pequeñas piezas de fibra sobre la superficie del aceite se alinean con el campo eléctrico. Obsérvese la naturaleza no uniforme del campo eléctrico en los extremos de las placas. Estos efectos en los extremos pueden ser despreciados si la separación entre las placas es pequeña comparada con la longitud de las placas. (Cortesía de Harold M. Waage, Princeton University)

**EJEMPLO 26.1 Condensador de placas paralelas**

Un condensador de placas paralelas tiene un área  $A = 2 \text{ cm}^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  y una separación entre las placas  $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ . Encuentre su capacitancia.

**Solución** De la ecuación 26.3, se encuentra

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \left( 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right) \left( \frac{2 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{1 \times 10^{-3} \text{ m}} \right)$$

$$= 1.77 \times 10^{-12} \text{ F} = \mathbf{1.77 \text{ pF}}$$

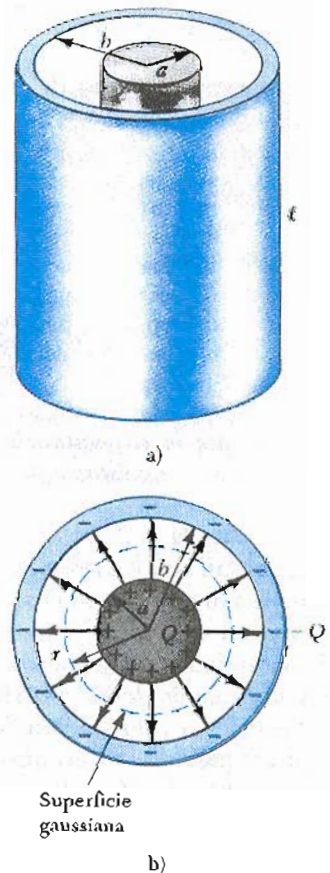
**Ejercicio 1** Si la placa de separación de este condensador se incrementa en 3 mm, encuentre su capacitancia. Respuesta: 0.59 pF.

**EJEMPLO 26.2 El condensador cilíndrico**

Un conductor cilíndrico de radio  $a$  y carga  $+Q$  está concéntrico con un gran cascarón cilíndrico de radio  $b$  y carga  $-Q$  (Fig. 26.4a). Encuentre la capacitancia del condensador cilíndrico si su longitud es  $\ell$ .

**Solución** Si se supone que  $\ell$  es grande comparada con  $a$  y  $b$ , los efectos en los extremos son despreciables. En este caso, el campo es perpendicular al eje de los cilindros y está confinado a la región entre ellos (Fig. 26.4b). Primero debe calcularse la diferencia de potencial entre los cilindros, la cual en general se expresa como

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$



**Figura 26.4** (Ejemplo 26.2) a) Un condensador cilíndrico consta de un conductor cilíndrico de radio  $a$  y longitud  $\ell$  rodeado por un cascarón cilíndrico coaxial de radio  $b$ . b) Vista del extremo de un condensador cilíndrico. La línea quebrada representa el extremo de la superficie gaussiana de radio  $r$  y longitud  $\ell$ .



donde  $E$  es el campo eléctrico en la región  $a < r < b$ . En el capítulo 24, se demostró utilizando la ley de Gauss que el campo eléctrico de un cilindro de carga por unidad de longitud  $\lambda$  está dado por  $2k\lambda/r$ . El mismo resultado se aplica aquí, ya que el cilindro externo no contribuye al campo eléctrico interno. Utilizando este resultado y observando que  $E$  está a lo largo de  $r$  en la figura 26.4b, se encuentra que

$$V_b - V_a = - \int_a^b E_r dr = -2k\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = -2k\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sustituyendo esto dentro de la ecuación 26.1 y utilizando el hecho de que  $\lambda = Q/\ell$ , se obtiene

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{2kQ}{\ell} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\ell}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (26.4)$$

$V$  es la magnitud de la diferencia de potencial dada por  $2k\lambda \ln(b/a)$ , una cantidad *positiva*. Es decir,  $V = V_a - V_b$  es *positiva* ya que el cilindro interior está a un potencial mayor.

Nuestro resultado obtenido para  $C$  tiene sentido puesto que indica que la capacitancia es proporcional a la longitud de los cilindros. Lógicamente, la capacitancia depende también de los radios de los dos conductores cilíndricos. Como un ejemplo, un cable coaxial consta de dos conductores cilíndricos concéntricos de radios  $a$  y  $b$ , separados por un material aislante. El cable lleva corriente en sentidos opuestos en los conductores interior y exterior. Una geometría de este tipo es especialmente útil para proteger una señal eléctrica contra influencias externas. De la ecuación 26.4, se ve que la capacitancia por unidad de longitud de un cable coaxial está dada por

$$\frac{C}{\ell} = \frac{1}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

### EJEMPLO 26.3 Condensador esférico

Un condensador esférico consta de un cascarón esférico conductor de radio  $b$  y carga  $-Q$  que está concéntrico con una esfera conductora más pequeña de radio  $a$  y carga  $+Q$  (Fig. 26.5). Determine su capacitancia.

**Solución** Como se demostró en el capítulo 24, el campo en el exterior de una carga simétricamente esférica es radial

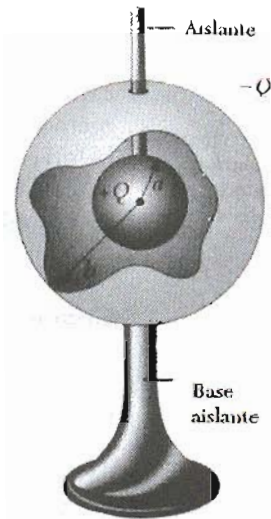


Figura 26.5 (Ejemplo 26.3) Un condensador esférico consta de una esfera interior de radio  $a$  rodeada por un cascarón concéntrico de radio  $b$ . El campo eléctrico entre las esferas es radial hacia afuera si la esfera interior está positivamente cargada.

y dado por  $kQ/r^2$ . En este caso, esto corresponde al campo eléctrico entre las esferas ( $a < r < b$ ). (El campo es cero en cualquier otro lugar.) De la ley de Gauss se ve que sólo la esfera interna contribuye a este campo. Entonces, la diferencia de potencial entre las esferas está dada por

$$\begin{aligned} V_b - V_a &= - \int_a^b E_r dr = -kQ \int_a^b \frac{dr}{r^2} = kQ \left[ \frac{1}{r} \right]_a^b \\ &= kQ \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

La magnitud de la diferencia de potencial está dada por

$$V = V_a - V_b = kQ \frac{(b-a)}{ab}$$

Sustituyendo esto en la ecuación 26.1, se obtiene

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{ab}{k(b-a)} \quad (26.5)$$

**Ejercicio 2** Demuestre que cuando el radio  $b$  de la esfera exterior tiende al infinito, la capacitancia se aproxima al valor  $a/k = 4\pi\epsilon_0 a$ . Este resultado es consecuente con el obtenido anteriormente (Ec. 26.2).

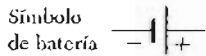
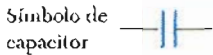


Figura 26.6 Símbolos en circuitos para condensadores y baterías. Observe que los condensadores están en azul, mientras que las baterías están en rojo.

### 26.3 COMBINACIONES DE CONDENSADORES

Con mucha frecuencia se combinan dos o más condensadores en circuitos. La capacitancia equivalente de ciertas combinaciones puede calcularse utilizando los métodos descritos en esta sección. El símbolo en circuitos para condensadores y baterías, se muestra con sus colores en la figura 26.6. La terminal positiva de la batería está a mayor potencial y se representa por una línea vertical más grande en el símbolo de la batería.

#### Combinación en paralelo

Dos condensadores conectados como se muestra en la figura 26.7 se conocen como *combinación en paralelo*. Las placas izquierdas de los condensadores están conectadas por un alambre conductor a la terminal positiva de la batería y por lo tanto están al mismo potencial. Igualmente, las placas de la derecha están conectadas a la terminal negativa de la batería. Cuando los condensadores se conectan por primera vez en el circuito, los electrones son transferidos a través de la batería de las placas de la izquierda a las de la derecha, quedando las placas de la izquierda cargadas positivamente y las de la derecha negativamente. La fuente de energía para la transferencia de esta carga es la energía química interna almacenada en la batería, la cual es convertida en energía eléctrica. El flujo de carga cesa cuando el voltaje a través de los condensadores es igual al de la batería. Los condensadores se encuentran a su máxima carga cuando el flujo de carga cesa. Llamemos a las cargas máximas en dos condensadores  $Q_1$  y  $Q_2$ . Entonces la *carga total*,  $Q$ , almacenada en los dos condensadores es

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{26.6}$$

Supongamos que deseamos reemplazar estos dos condensadores por un condensador equivalente  $C_{eq}$ . Este condensador equivalente debe tener exactamente

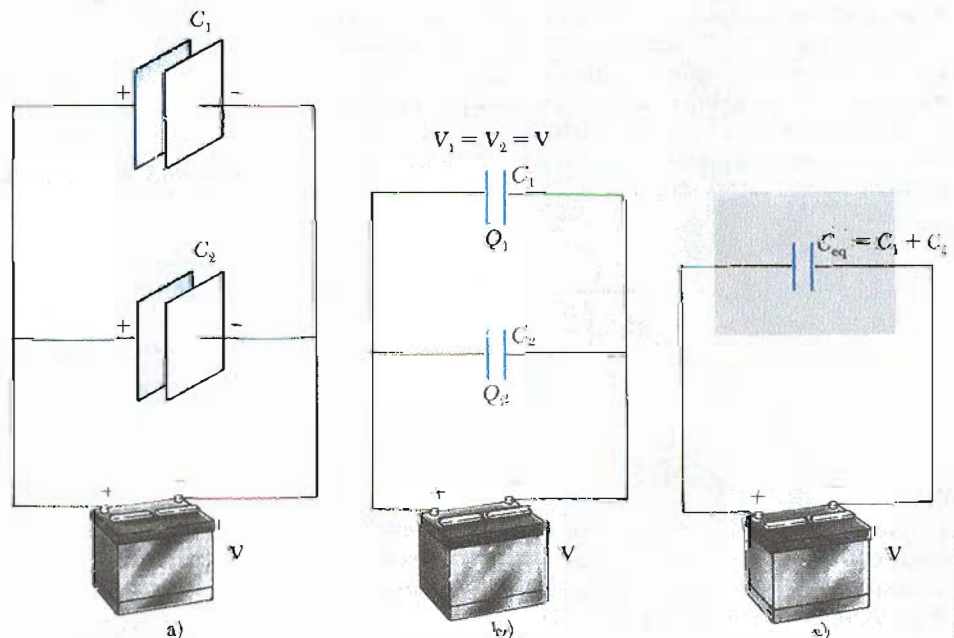


Figura 26.7 a) Conexión en paralelo de dos condensadores. b) Diagrama del circuito para la combinación en paralelo. c) La diferencia de potencial es la misma a través de cada condensador, y la capacitancia equivalente es  $C_{eq} = C_1 + C_2$ .

el mismo efecto externo que los dos originales. Es decir, debe de almacenar  $Q$  unidades de carga. Vemos de la figura 26.7b que

la diferencia de potencial a través de cada condensador en un circuito en paralelo es la misma y es igual al voltaje de la batería,  $V$ .

De la figura 26.7c, vemos que el voltaje a través del condensador equivalente es también  $V$ . Entonces, tenemos

$$Q_1 = C_1 V \quad Q_2 = C_2 V$$

y, para el condensador equivalente,

$$Q = C_{\text{eq}} V$$

Sustituyendo esta relación dentro de la ecuación 26.6 da

$$C_{\text{eq}} V = C_1 V + C_2 V$$

o

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 \quad \left( \begin{array}{l} \text{combinación} \\ \text{en paralelo} \end{array} \right) \quad (26.7)$$

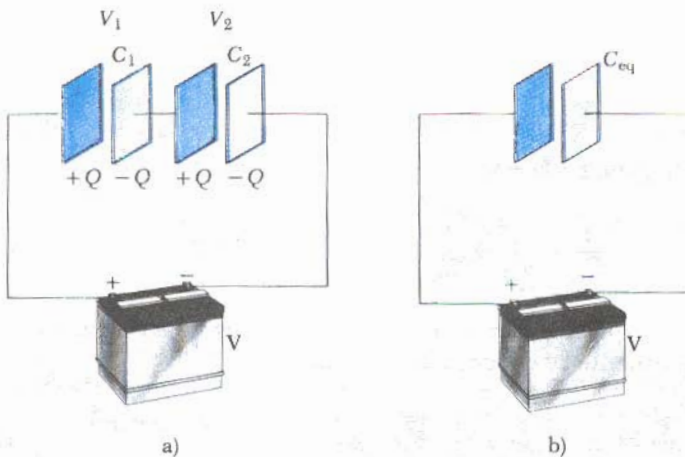
Si extendemos este tratamiento a tres o más condensadores conectados en paralelo, la capacitancia equivalente se encuentra que debe ser

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad \left( \begin{array}{l} \text{combinación} \\ \text{en paralelo} \end{array} \right) \quad (26.8)$$

Entonces se ve que *la capacitancia equivalente de una combinación en paralelo de condensadores es mayor que cualquiera de las capacitancias individuales.*

### Combinación en serie

Ahora consideremos dos condensadores en *serie*, como los que se muestran en la figura 26.8a.



**Figura 26.8** Conexión en serie de dos condensadores. La carga en cada condensador es la misma, y el condensador equivalente puede ser calculado por la relación  $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ .

Para combinaciones de condensadores en serie, la magnitud de la carga debe de ser la misma en todas las placas.

Puede comprenderse este hecho, al considerar el proceso de transferencia de carga en detalle. Empezaremos con los condensadores descargados y en seguida veremos que sucede justamente después de ser conectados a la batería. Cuando la batería se conecta, los electrones son trasferidos desde la placa izquierda de  $C_1$  a la placa derecha de  $C_2$  a través de la batería. Así esta carga negativa se acumula en la placa derecha de  $C_2$ , y una cantidad equivalente de cargas negativas es forzada a salir de la placa izquierda de  $C_2$ , dejando a ésta con un exceso de carga positiva. La carga negativa que sale de la placa izquierda de  $C_2$  se acumula en la placa derecha de  $C_1$ , donde nuevamente una cantidad de carga negativa sale de la placa izquierda. *El resultado de esto es que todas las placas derechas ganan una carga de  $-Q$  mientras que las placas de la izquierda tienen una carga de  $+Q$ .*

Supongamos un condensador equivalente que realice las mismas funciones que la combinación en serie. Después de que está totalmente cargado, *el condensador equivalente debe terminar con una carga  $-Q$  en la placa derecha y de  $+Q$  en la placa izquierda.* Aplicando la definición de capacitancia para el circuito que se ve en la figura 26.8b, se tiene

$$V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

donde  $V$  es la diferencia de potencial entre las terminales de la batería y  $C_{eq}$  es la capacitancia equivalente. De la figura 26.8a, se ve que

$$V = V_1 + V_2 \tag{26.9}$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  son las diferencias de potenciales a través de los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ . En general, la diferencia de potencial a través de cualquier número de condensadores en serie es igual a la suma de las diferencias de potencial a través de cada condensador individual. Ya que  $Q = CV$  puede ser aplicado a cada condensador, la diferencia de potencial a través de cada uno está dada por

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Sustituyendo estas expresiones dentro de la ecuación 26.9 y observando que  $V = Q/C_{eq}$ , se tiene

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Cancelando  $Q$ , llegamos a la relación

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \left( \begin{array}{l} \text{combinación} \\ \text{en serie} \end{array} \right) \tag{26.10}$$

Si este análisis se aplica a tres o más condensadores conectados en serie, la capacitancia equivalente se encuentra que debe ser

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad \left( \begin{array}{l} \text{combinación} \\ \text{en serie} \end{array} \right) \tag{26.11}$$

Esto demuestra que *la capacitancia equivalente de una combinación en serie es siempre menor que la de cualquiera de las capacitancias individuales en la combinación.*



pueda ser considerado como un sistema electrostático. La diferencia de potencial a través del condensador es  $V = Q/C$ . Como la diferencia de potencial inicial es cero, la diferencia de potencial *promedio* durante el proceso de carga es  $V/2 = Q/2C$ . De esto podemos inferir que el trabajo necesario para cargar el condensador está dado por  $W = QV/2 = Q^2/2C$ . Aun cuando este resultado es correcto, una prueba más detallada es deseable, la cual se da a continuación.

Supóngase que  $q$  es la carga en el condensador en algún instante durante el proceso de carga. En el mismo instante, la diferencia de potencial a través del condensador es  $V = q/C$ . El trabajo necesario<sup>2</sup> para transferir un incremento de carga  $dq$  desde la placa  $-q$  a la placa de carga  $q$  (la cual se encuentra a mayor potencial) está dada por

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq$$

Por lo que el trabajo total requerido para cargar el condensador desde  $q = 0$  hasta alguna carga final  $q = Q$  está dado por

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Pero el trabajo que se realiza en cargar el condensador puede ser considerado como la energía potencial  $U$  almacenada en el condensador. Utilizando  $Q = CV$ , se puede expresar la energía electrostática almacenada en un condensador cargado en las siguientes formas alternativas:

Energía almacenada en un condensador cargado

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \quad (26.12)$$

Este resultado se aplica a cualquier condensador, sin importar su geometría. Obsérvese que la energía almacenada aumenta al aumentar  $C$  así como al aumentar la diferencia de potencial. En la práctica, existe un límite máximo de energía (o carga) que puede ser almacenada. Esto se debe esencialmente a que una descarga eléctrica podría ocurrir entre las placas del condensador para un valor grande de  $V$ . Por esta razón, los condensadores se etiquetan usualmente con el máximo voltaje de operación.

La energía almacenada en el condensador puede ser considerada como que está almacenada en el campo eléctrico creado entre las placas cuando el condensador está cargado. Esta descripción es razonable en vista del hecho que el campo eléctrico es proporcional a la carga en el condensador. Para un condensador de placas paralelas, la diferencia de potencial se relaciona con el campo eléctrico a través de la expresión  $V = Ed$ . Además, su capacitancia está dada por  $C = \epsilon_0 A/d$ . Sustituyendo estas expresiones dentro de la ecuación 26.12 da

Energía almacenada en un condensador de placas paralelas

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A d) E^2 \quad (26.13)$$

Como el volumen de un condensador de placas paralelas que es ocupado por el campo eléctrico es  $Ad$ , la *energía por unidad de volumen*  $u = U/Ad$ , llamada *densidad de energía* es

Densidad de energía en un campo eléctrico

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (26.14)$$

<sup>2</sup> Una analogía mecánica de este proceso es el trabajo requerido para alzar una masa a través de alguna distancia vertical en presencia de la gravedad.

Aun cuando la ecuación 26.14 se obtuvo para un condensador de placas paralelas, la expresión es generalmente válida. Es decir, la *densidad de energía en cualquier campo electrostático es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo eléctrico en un punto dado*. (Una prueba formal de esta afirmación se da en cursos intermedios o avanzados de electricidad y magnetismo.)

### EJEMPLO 26.5 Reconectando dos condensadores cargados

Dos condensadores  $C_1$  y  $C_2$  (donde  $C_1 > C_2$ ) están cargados a la misma diferencia de potencial  $V_0$ , pero con polaridades opuestas. Los condensadores cargados se desconectan de la batería y sus placas son conectadas como se muestra en la figura 26.10a. Los interruptores  $S_1$  y  $S_2$  son entonces cerrados como en la figura 26.10b. a) Encuentre la diferencia de potencial final entre  $a$  y  $b$  después de que los interruptores se cerraron.

**Solución** La carga en las placas de la izquierda de los condensadores *antes* de que los interruptores se cerraran están dadas por

$$Q_1 = C_1 V_0 \quad \text{y} \quad Q_2 = -C_2 V_0$$

El signo negativo para  $Q_2$  es necesario ya que la polaridad de este condensador es *opuesta* a la del condensador  $C_1$ . Después de cerrar los interruptores, las cargas en las placas se redistribuyen hasta que la carga total  $Q$  compartida por los dos condensadores sea

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 - C_2)V_0$$

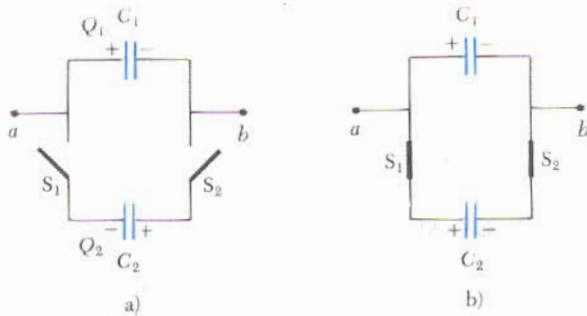


Figura 26.10 (Ejemplo 26.5).

Los dos condensadores están ahora en *paralelo*, así que la diferencia de potencial a través de cada uno es la *misma* y está dada por

$$V = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \left( \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right) V_0$$

b) Encuentre la energía total almacenada en los condensadores antes y después de que los interruptores sean cerrados.

**Solución** Antes de que los interruptores sean cerrados, la energía total almacenada en los condensadores está dada por

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 + \frac{1}{2} C_2 V_0^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V_0^2$$

Después de que se cierran los interruptores y de que los condensadores han alcanzado la carga de equilibrio, la energía total almacenada en los condensadores está dada por

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2 \\ &= \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left( \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2 V_0^2 = \left( \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2 U_i \end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón entre las energías almacenadas final e inicial es

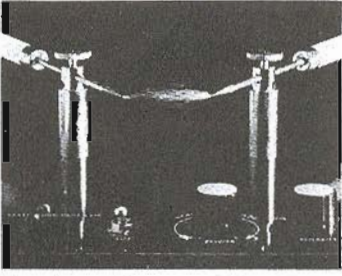
$$\frac{U_f}{U_i} = \left( \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2$$

Esto muestra que la energía final es *menor* que la energía inicial. Al principio, uno podría pensar que se ha violado la ley de la conservación de la energía, pero éste no es el caso, ya que se supuso un circuito ideal. Parte de la energía perdida se transforma en calor en los alambres, los cuales tienen una resistencia, y parte de la energía es radiada en forma de ondas electromagnéticas (Cap. 34).

## 26.5 CONDENSADORES CON DIELECTRICO

Un *dieléctrico* es un material no conductor, como el caucho, vidrio o el papel. Cuando un dieléctrico se introduce entre las placas de un condensador, la capacitancia aumenta. Si el dieléctrico llena por completo el espacio entre las placas, la capacitancia aumenta en un factor adimensional  $\kappa$ , llamado **constante dieléctrica**.

El siguiente experimento muestra el efecto del dieléctrico en un condensador. Considérese un condensador de placas paralelas de carga  $Q_0$  y capacitancia  $C_0$  en



Esta fotografía muestra la ruptura en el dieléctrico en aire. El chispazo se produce cuando es aplicado un alto voltaje alterno a través de los electrodos utilizando una bobina de inducción de alto voltaje. (Cortesía de CENCO)

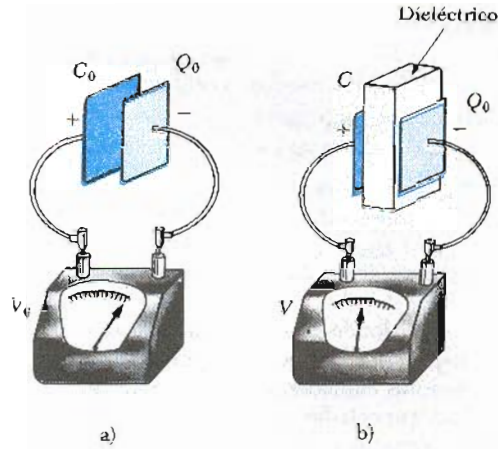


Figura 26.11 Cuando un dieléctrico se introduce entre las placas de un condensador *cargado*, la carga en las placas permanece sin cambio, pero la diferencia de potencial registrada por un voltímetro electrostático se reduce desde  $V_0$  hasta  $V = V_0/\kappa$ . Por lo tanto, la capacitancia se *incrementa* en el proceso por el factor  $\kappa$ .

ausencia de un dieléctrico. La diferencia de potencial medida con un voltímetro es  $V_0 = Q_0/C_0$  (Fig. 26.11a). Nótese que el circuito del condensador está *abierto*, es decir, las placas del condensador *no* están conectadas a una batería y la carga no puede fluir a través del voltímetro ideal. (Se discutirá el comportamiento del voltímetro en el capítulo 28.) Entonces, *no* existe ninguna trayectoria por la cual la carga pueda fluir y alterar la carga sobre el condensador. Si un dieléctrico se introduce entre las placas como en la figura 26.11b, se encuentra que la lectura del voltímetro *disminuye* por un factor  $\kappa$  hasta un valor  $V$ , donde

$$V = \frac{V_0}{\kappa}$$

Siendo  $V < V_0$ , se ve que  $\kappa > 1$ .

Como la carga  $Q_0$  en el condensador *no cambia*, se concluye que la capacitancia debe cambiar el valor

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\kappa} = \kappa \frac{Q_0}{V_0}$$

$$C = \kappa C_0 \tag{26.15}$$

donde  $C_0$  es la capacitancia en ausencia de dieléctrico. Es decir, la capacitancia *aumenta* por un factor  $\kappa$  cuando un dieléctrico llena completamente la región entre sus placas.<sup>3</sup> Para un condensador de placas paralelas, donde  $C_0 = \epsilon_0 A/d$ , la capacitancia cuando el condensador está lleno con un dieléctrico puede expresarse como

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{26.16}$$

De las ecuaciones 26.3 y 26.16 se puede apreciar que la capacitancia puede ser muy grande cuando la distancia entre las placas  $d$  disminuya. En la práctica,

<sup>3</sup> Si se realiza otro experimento en el cual el dieléctrico se introduce mientras la diferencia de potencial permanece constante por medio de una batería, la carga aumenta hasta el valor  $Q = \kappa Q_0$ . La carga adicional se proporciona por la batería y la capacitancia se incrementa por un factor  $\kappa$ .

La capacitancia de un condensador lleno es mayor que la de uno vacío por un factor  $\kappa$



**TABLA 26.1** Constantes dieléctricas y resistencias dieléctricas de varios materiales a temperatura ambiente

Material	Constante dieléctrica $\kappa$	Resistencia dieléctrica <sup>a</sup> (V/m)
Vacío	1.00000	—
Aire (seco)	1.00059	$3 \times 10^6$
Baquelita	4.9	$24 \times 10^6$
Cuarzo fundido	3.78	$8 \times 10^6$
Vidrio Pyrex	5.6	$14 \times 10^6$
Poliestireno	2.56	$24 \times 10^6$
Teflón	2.1	$60 \times 10^6$
Caucho neopreno	6.7	$12 \times 10^6$
Nylon	3.4	$14 \times 10^6$
Papel	3.7	$16 \times 10^6$
Estroncio titanio	233	$8 \times 10^6$
Agua	80	—
Aceite de silicón	2.5	$15 \times 10^6$

<sup>a</sup> La resistencia dieléctrica es igual al campo eléctrico máximo que puede existir en un dieléctrico sin ruptura eléctrica.

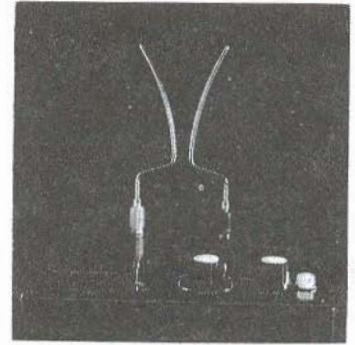
los valores de  $d$  están limitados por la descarga eléctrica que podría ocurrir a través del medio dieléctrico que separa a las placas. Para cualquier separación  $d$ , el máximo voltaje que puede ser aplicado al condensador sin que cause una descarga depende de la *resistencia dieléctrica* (máxima intensidad de campo eléctrico) del dieléctrico, la cual para el aire es igual  $3 \times 10^6$  V/m. Si la intensidad del campo en el medio excede la resistencia dieléctrica, las propiedades aislantes se romperán y el medio será conductor. La mayoría de los materiales aislantes tienen una resistencia dieléctrica y una constante dieléctrica muy grande comparada con la del aire, como se indica en la tabla 26.1. Entonces, se puede concluir que un dieléctrico tiene las siguientes ventajas:

1. Un dieléctrico aumenta la capacitancia de un condensador.
2. El dieléctrico aumenta el voltaje de operación de un condensador.
3. El dieléctrico proporciona una estructura mecánica de soporte entre las placas conductoras.

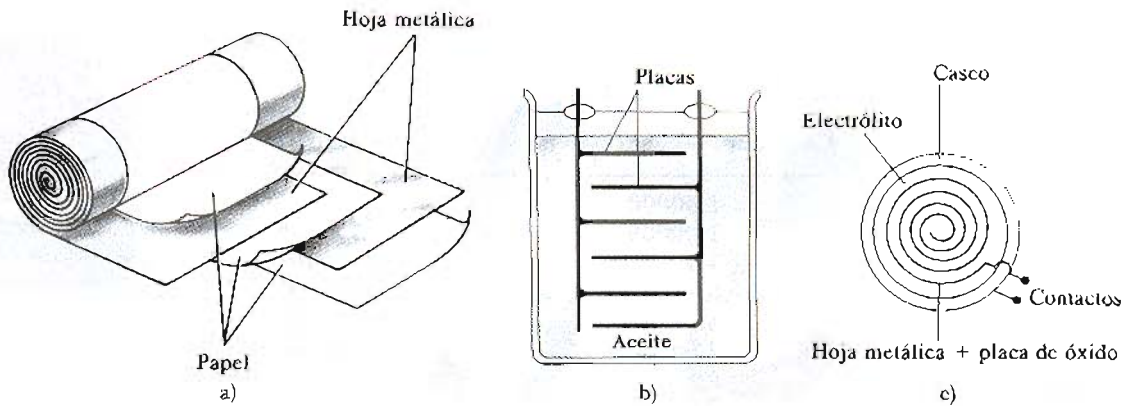
### Tipo de condensadores

La mayor parte de los condensadores comerciales se fabrican con dos hojas metálicas con placas delgadas de papel impregnadas de parafina, la cual sirve como material dieléctrico. Se colocan alternadas las hojas metálicas y dieléctricas y entonces se enrollan dando la forma de un cilindro que forma un pequeño paquete (Fig. 26.12a). Los condensadores de alto voltaje comúnmente constan de un número de placas alternadas inmersas en aceite de silicón (Fig. 26.12b). Los condensadores pequeños son a veces fabricados con materiales cerámicos. Los condensadores variables (por lo común de 10 a 500 pF) generalmente constan de dos conjuntos de placas alternadas, uno fijo y otro móvil, con aire como dieléctrico.

Un condensador electrolítico es a veces utilizado para almacenar grandes cantidades de carga a voltajes relativamente bajos. Este dispositivo, que se muestra en la figura 26.12c, consta de una hoja de metal en contacto con un electrolito —solución que conduce la electricidad en virtud del movimiento de los iones contenidos en la solución. Cuando un voltaje se aplica entre las hojas y



Una descarga continua se produce entre dos electrodos cuando el voltaje aplicado produce un campo eléctrico que excede la resistencia dieléctrica del aire. ¿Qué le sucede al aire en la vecindad de esta descarga? Con la descarga continua los chispazos tienden a subir. ¿Podría explicar este comportamiento? (Cortesía de CENCO)



**Figura 26.12** Tres diseños de condensadores comerciales. a) Condensador tubular cuyas placas están separadas por papel y enrolladas en un cilindro. b) Un condensador de alto voltaje consta de varias placas paralelas separadas por aceite aislante. c) Un condensador electrolítico.

el electrolito, una capa delgada de óxido metálico (un aislante) se forma sobre la hoja metálica, y esta capa sirve como el dieléctrico. Grandes valores de capacitancia se pueden obtener ya que la capa de dieléctrico es muy delgada.

Cuando se utilizan condensadores electrolíticos en circuitos, la polaridad (el signo más y menos en el dispositivo) debe de conectarse adecuadamente. Si la polaridad del voltaje aplicado es opuesta a la indicada, la capa de óxido puede ser eliminada y el condensador conducirá electricidad en lugar de almacenar carga.

**EJEMPLO 26.6 Condensador relleno de papel**

Un condensador de placas paralelas tiene placas cuyas dimensiones son 2 cm × 3 cm. Las placas están separadas por papel de 1 mm de espesor. a) Encuentre la capacitancia del dispositivo.

**Solución** Como para el papel  $\kappa = 3.7$  (Tabla 26.1) se obtiene

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} = 3.7 \left( 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right) \left( \frac{6 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{1 \times 10^{-3} \text{ m}} \right)$$

$$= 19.6 \times 10^{-12} \text{ F} = \mathbf{19.6 \text{ pF}}$$

b) ¿Cuál es la máxima carga que se puede colocar en el condensador?

**Solución** De la tabla 26.1 se ve que la resistencia dieléctrica del papel es de  $16 \times 10^6 \text{ V/m}$ . Como el espesor del papel es de 1 mm, el máximo voltaje que puede ser aplicado antes de que la ruptura ocurra es

$$V_{\text{máx}} = E_{\text{máx}} d = \left( 16 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) (1 \times 10^{-3} \text{ m})$$

$$= 16 \times 10^3 \text{ V}$$

Por lo tanto, la máxima carga está dada por

$$Q_{\text{máx}} = CV_{\text{máx}} = (19.6 \times 10^{-12} \text{ F})(16 \times 10^3 \text{ V})$$

$$= \mathbf{0.31 \mu\text{C}}$$

**Ejercicio 4** ¿Cuál es la máxima energía que puede ser almacenada en el condensador?

**Respuesta**  $2.5 \times 10^{-3} \text{ J}$ .

**EJEMPLO 26.7 Energía almacenada antes y después**

Un condensador de placas paralelas se carga con una batería hasta una carga  $Q_0$  como en la figura 26.13a. La batería es entonces retirada, y una plancha de constante dieléctrica  $\kappa$  se introduce entre las placas, como en la figura 26.13b. Encuentre la energía almacenada en el condensador antes y después de que el dieléctrico se introduzca.

**Solución** La energía almacenada en el condensador en ausencia de dieléctrico es

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

Como  $V_0 = Q_0/C_0$ , esto se puede expresar como

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}$$

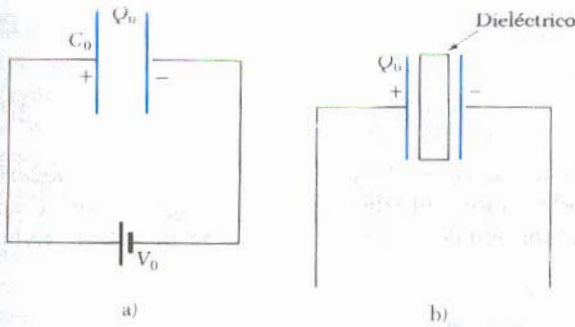


Figura 26.13 (Ejemplo 26.7).

Después de que la batería es retirada y de que el dieléctrico es introducido entre las placas, la carga del condensador sigue siendo la misma. Por lo tanto, la energía almacenada en presencia del dieléctrico está dada por

$$U = \frac{Q_0^2}{2C}$$

Pero como la capacitancia en presencia del dieléctrico está dada por  $C = \kappa C_0$ , la  $U$  vendría a ser

$$U = \frac{Q_0^2}{2\kappa C_0} = \frac{U_0}{\kappa}$$

Como  $\kappa > 1$  se ve que la energía final es menor que la energía inicial por un factor  $1/\kappa$ . Es posible dar una explicación a esta energía faltante si se observa que, al introducir el dieléctrico en el condensador, recibe un tirón hacia adentro del dispositivo. El agente externo debe realizar un trabajo negativo para evitar que la plancha se acelere. Este trabajo es simplemente la diferencia  $U - U_0$ . (De manera alternativa, el trabajo positivo realizado por el sistema sobre el agente externo es  $U_0 - U$ .)

**Ejercicio 5** Suponga que la capacitancia en ausencia del dieléctrico es de 8.50 pF, y que el condensador se carga a una diferencia de potencial de 12.0 V. Si la batería se desconecta y una plancha de poliestireno ( $\kappa = 2.56$ ) se introduce entre las placas, calcule la diferencia de energía  $U - U_0$ .

**Solución** 373 pJ.

Como se vio, la energía de un condensador es menor cuando un dieléctrico se introduce entre sus placas, lo cual significa que un trabajo se realizó sobre el dieléctrico. Esto, visto de otra forma, implica que una fuerza actúa sobre el dieléctrico arrastrándolo hacia dentro del condensador. Esta fuerza se origina de la naturaleza no uniforme del campo eléctrico en las vecindades de las orillas como se indica en la figura 26.14. La componente horizontal del campo en esta zona actúa sobre las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico, produciendo una fuerza neta dirigida hacia dentro del condensador.

## 26.6 DIPOLO ELÉCTRICO EN UN CAMPO ELÉCTRICO EXTERNO

El dipolo eléctrico discutido con anterioridad en el ejemplo 23.7, consta de dos cargas iguales y opuestas separadas una distancia  $2a$ , como en la figura 26.15. Ahora definiremos el **momento dipolar eléctrico** de esta configuración como

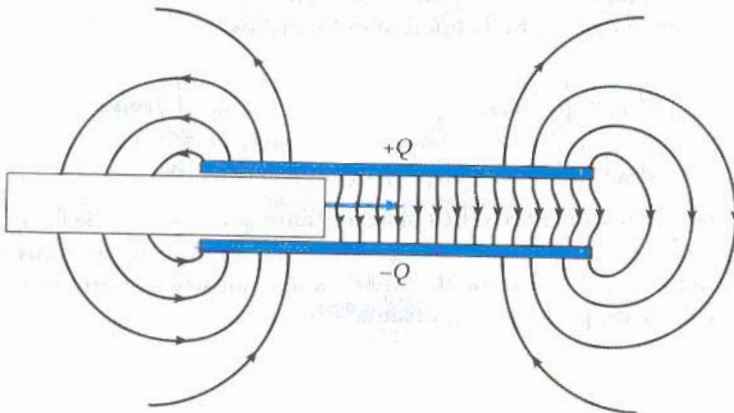


Figura 26.14 El campo eléctrico no uniforme cerca de las orillas de un condensador de placas paralelas ocasiona que el dieléctrico sea jalado hacia dentro del condensador. Obsérvese que el campo actúa sobre las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico, las cuales no están uniformemente distribuidas.

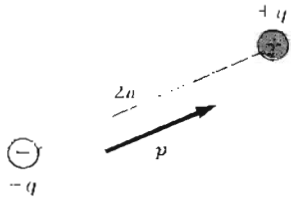


Figura 26.15 Un dipolo consta de cargas iguales y opuestas separadas una distancia  $2a$ .

un vector  $\mathbf{p}$  cuya magnitud es  $2aq$  (es decir, la separación  $2a$  multiplicada por la carga  $q$ ).

$$p = 2aq \tag{26.17}$$

Ahora supongamos que colocamos el dipolo en un campo eléctrico externo  $\mathbf{E}$  como en la figura 26.16, donde el momento dipolar hace un ángulo  $\theta$  con el campo. Las fuerzas sobre las cargas son iguales y opuestas como se muestran, cada una con una magnitud de

$$F = qE$$

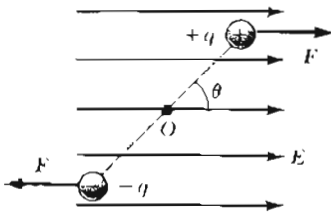


Figura 26.16 Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme. El momento del dipolo  $\mathbf{p}$  hace un ángulo  $\theta$  con el campo y el dipolo experimenta una torca.

Entonces, la fuerza neta sobre el dipolo es *cero*. Sin embargo, las dos fuerzas producen una torca neta sobre el dipolo, y el dipolo tiende a rotar de tal manera que su eje se alinea con el campo. El momento de una fuerza debido a la fuerza sobre la carga positiva alrededor de un eje a través de  $O$  está dada por  $Fa \text{ sen } \theta$ , donde  $a \text{ sen } \theta$  es el brazo de palanca de  $F$  sobre  $O$ . En la figura 26.16, esta fuerza hace que tienda a rotar en la dirección de las manecillas del reloj. El momento de una fuerza sobre la carga negativa alrededor de  $O$  es también  $Fa \text{ sen } \theta$ , así que el momento de una fuerza neta alrededor  $O$  está dada por

$$\tau = 2Fa \text{ sen } \theta$$

Ya que  $F = qE$  y  $p = 2aq$ , se puede expresar  $\tau$  como

$$\tau = 2aqE \text{ sen } \theta = pE \text{ sen } \theta \tag{26.18}$$

Es conveniente expresar el momento de una fuerza en forma vectorial como el producto vectorial de los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{E}$ :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{26.19}$$

**Torca sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico extendido**

Podemos determinar también la energía potencial de un dipolo eléctrico como una función de su orientación respecto al campo eléctrico externo. La forma de hacer esto, sería reconocer qué trabajo debe ser realizado por un agente externo para rotar el dipolo a través del campo un ángulo dado. El trabajo realizado es entonces almacenado como energía potencial en el sistema, es decir, el dipolo y el campo externo. El trabajo  $dW$  requerido para rotar un dipolo a través de un ángulo  $d\theta$  está dado por  $dW = \tau d\theta$  (Cap. 10). Ya que  $\tau = pE \text{ sen } \theta$  y como el trabajo es transformado en energía potencial  $U$ , encontramos que para una rotación desde  $\theta_0$  hasta  $\theta$ , el cambio en la energía potencial es

$$U - U_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} pE \text{ sen } \theta d\theta = pE \int_{\theta_0}^{\theta} \text{sen } \theta d\theta$$

$$U - U_0 = pE[-\text{cos } \theta]_{\theta_0}^{\theta} = pE(\text{cos } \theta_0 - \text{cos } \theta)$$

El término que involucra  $\text{cos } \theta_0$  es una constante que depende de la orientación inicial del dipolo. Es conveniente escoger  $\theta_0 = 90^\circ$ , ya que  $\text{cos } \theta_0 = \text{cos } 90^\circ = 0$ . Además, tomemos  $U_0 = 0$  para  $\theta_0 = 90^\circ$  como nuestra energía potencial de referencia. Entonces, podemos expresar a  $U$  como

$$U = -pE \text{ cos } \theta \tag{26.20}$$

Esto puede ser expresado como el producto punto de los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{E}$ :

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \tag{26.21}$$

**Energía potencial de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo**

Se dice que las moléculas están polarizadas cuando existe una separación entre el "centro de gravedad" de las cargas negativas y el de las cargas positivas en la molécula. En algunas moléculas, como el agua, esta condición está siempre presente. Esto puede entenderse por una inspección de la geometría de la molécula de agua. La molécula presenta un arreglo en el cual el átomo de oxígeno está sujeto a dos átomos de hidrógeno que forman un ángulo de  $105^\circ$  entre los enlaces (Fig. 26.17). El centro de las cargas negativas está cerca del átomo de oxígeno y el centro de las cargas positivas está en el punto medio a lo largo de la línea que une los átomos de hidrógeno (punto  $x$  en el diagrama). Los materiales compuestos de moléculas que están permanentemente polarizadas en esta forma tienen grandes constantes dieléctricas. Por ejemplo, la constante dieléctrica del agua es bastante grande ( $\kappa = 80$ ).

Una molécula simétrica puede no tener polarización permanente, pero una polarización puede ser inducida por un campo eléctrico externo. Por ejemplo, si una molécula lineal colocada a largo del eje  $x$ , en un campo eléctrico externo en dirección del eje positivo de la  $x$  podría causar que el centro de cargas positivas se recorriera hacia la derecha desde su posición inicial y el centro de las cargas negativas se recorriera hacia la izquierda. Esta polarización inducida es el efecto predominante en la mayor parte de los materiales utilizados como dieléctricos en los condensadores.

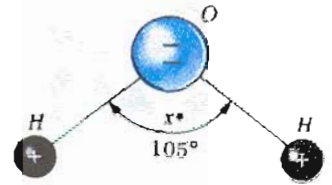


Figura 26.17 La molécula de agua,  $H_2O$ , tiene una polarización permanente como resultado de su geometría.

#### EJEMPLO 26.8 La molécula de agua

La molécula de agua tiene un momento dipolar de  $6.3 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ . Una muestra contiene  $10^{21}$  moléculas, cuyos momentos dipolares están todos orientados en la dirección de un campo eléctrico de  $2.5 \times 10^5 \text{ N/C}$ . ¿Cuánto trabajo se requiere para rotar los dipolos desde esta orientación ( $\theta = 0^\circ$ ) a una en la cual todos los momentos sean perpendiculares al campo ( $\theta = 90^\circ$ )?

**Solución** El trabajo requerido para rotar una molécula  $90^\circ$  es igual a la diferencia de energía potencial entre la

orientación a  $90^\circ$  y la orientación a  $0^\circ$ . Utilizando la ecuación 26.20 obtenemos

$$\begin{aligned} W &= U_{90} - U_0 = (-pE \cos 90^\circ) - (-pE \cos 0^\circ) \\ &= pE = (6.3 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})(2.5 \times 10^5 \text{ N/C}) \\ &= 1.6 \times 10^{-24} \text{ J} \end{aligned}$$

Como existen  $10^{21}$  moléculas en la muestra, el trabajo total requerido está dado por

$$W_{\text{total}} = (10^{21})(1.6 \times 10^{-24} \text{ J}) = 1.6 \times 10^{-3} \text{ J}$$

## 26.7 UNA DESCRIPCIÓN ATÓMICA DE LOS DIELECTRICOS

En la sección 26.5 encontramos que la diferencia de potencial entre las placas de un condensador se reducía en un factor de  $\kappa$  cuando un dieléctrico se introducía. Como la diferencia de potencial entre las placas es igual al producto del campo eléctrico por la separación  $d$ , el campo eléctrico también es reducido por un factor  $\kappa$ . Entonces, si  $E_0$  es el campo eléctrico sin dieléctrico, el campo en presencia del dieléctrico es

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \quad (26.22)$$

Esto se comprende al notar que el dieléctrico puede ser polarizado. A nivel atómico, un material es polarizado si las cargas negativas y positivas se separan ligeramente. Si las moléculas del dieléctrico poseen un momento dipolar permanente en ausencia de campo eléctrico, se llaman *moléculas polares* (por ejemplo el agua). Los dipolos están aleatoriamente orientados en ausencia de campo

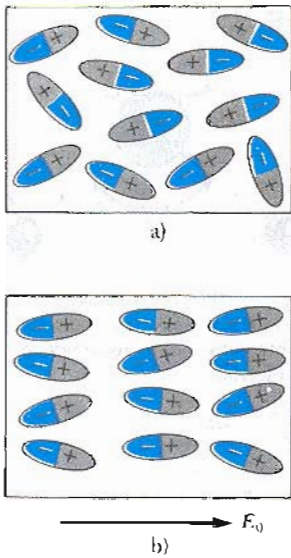


Figura 26.18 a) Moléculas con momento dipolar permanente están orientadas en forma aleatoria en ausencia de campo eléctrico externo. b) Cuando un campo eléctrico externo es aplicado, los dipolos se alinean parcialmente con el campo.

eléctrico, como se muestra en la figura 26.18a. Cuando un campo eléctrico externo se aplica, una torca se ejerce sobre los dipolos, ocasionando que éstos se alineen parcialmente con el campo, como en la figura 26.18b. El grado de alineamiento depende de la temperatura y de la magnitud del campo aplicado. En general, aumenta el alineamiento con la disminución de la temperatura y con un aumento en la intensidad del campo eléctrico. La alineación parcial de dipolos produce un campo eléctrico interno que se *opone* al campo eléctrico externo, de donde se ocasiona una reducción en el campo original.

Si las moléculas del dieléctrico no tienen momento dipolar permanente, se llaman **moléculas no polares**. En este caso, un campo eléctrico externo produce la separación de las cargas y los momentos dipolares resultantes se dice que son *inducidos*. Estos momentos dipolares inducidos tienden a alinearse con el campo externo, ocasionando una reducción en el campo eléctrico interno.

Con estas ideas en mente, consideremos una plancha de material dieléctrico en un campo eléctrico uniforme  $E_0$  como en la figura 26.19a. La porción positiva de la molécula se desplaza ligeramente en la dirección del campo eléctrico, y la negativa también se desplaza en dirección opuesta. Por lo tanto, el campo eléctrico aplicado polariza al dieléctrico. El efecto neto sobre el dieléctrico es la formación de una densidad de carga superficial positiva "inducida"  $\sigma_i$  sobre la cara derecha y una densidad superficial de carga negativa en la cara izquierda, como se muestra en la figura 26.19b. Esta densidad de carga superficial en el dieléctrico da por resultado un campo eléctrico interno  $E_i$ , el cual se *opone* al campo eléctrico externo  $E_0$ . Por lo tanto, el campo eléctrico neto  $E$  en el dieléctrico tiene una magnitud dada por

$$E = E_0 - E_i \tag{26.23}$$

En el condensador de placas paralelas que se muestra en la figura 26.20, el campo eléctrico externo  $E_0$  se relaciona con la densidad de carga libre  $\sigma$  a través de la relación  $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ . El campo eléctrico inducido en el dieléctrico se relaciona con la densidad de carga inducida  $\sigma_i$  a través de la relación  $E_i = \sigma_i/\epsilon_0$ . Como  $E = E_0/\kappa = \sigma/\kappa\epsilon_0$ , sustituyendo dentro de la ecuación 26.23 obtenemos

$$\frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}$$

$$\sigma_i = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\sigma \tag{26.24}$$

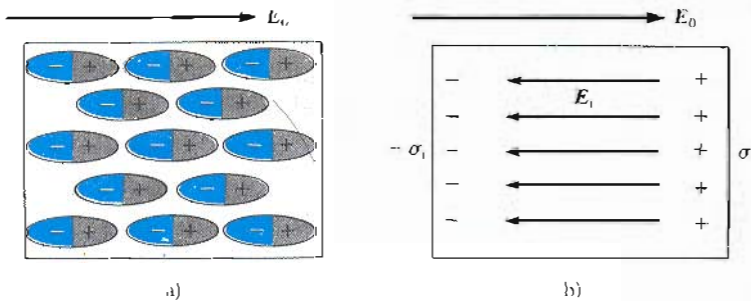


Figura 26.19 a) Cuando un dieléctrico se polariza, los momentos dipolares de las moléculas se alinean con el campo eléctrico externo  $E_0$ . b) Esta polarización produce una superficie de carga negativa inducida en uno de los lados del dieléctrico y una superficie igual de carga positiva en el lado opuesto. Con este resultado se tiene una reducción en el campo eléctrico interno con el dieléctrico.

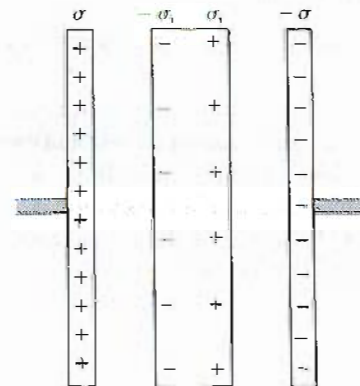


Figura 26.20 Carga inducida sobre un dieléctrico colocado entre las placas de un condensador cargado. Obsérvese que la densidad de carga inducida sobre el dieléctrico es menor que la densidad de carga libre en las placas.

En virtud de que  $\kappa > 1$ , se demuestra que la densidad de carga inducida  $\sigma_i$  en el dieléctrico es menor que la densidad de cargas libres sobre las placas. Por ejemplo, si  $\kappa = 3$ , vemos que la densidad de carga inducida en el dieléctrico es las dos terceras partes de la densidad de cargas libre sobre las placas. Si no existe dieléctrico presente,  $\kappa = 1$  y  $\sigma_i = 0$  como era de esperarse. Sin embargo, si el dieléctrico se reemplaza por un *conductor*, para el cual  $E = 0$ , entonces la ecuación 26.23 muestra que  $E_0 = E_i$ , lo que corresponde a que  $\sigma_i = \sigma$ . Es decir, la carga superficial inducida en el conductor debe de ser igual y opuesta a la de las placas, resultando un campo eléctrico neto de cero en el conductor.

### EJEMPLO 26.9 Un condensador parcialmente lleno

Un condensador de placas paralelas tiene una capacitancia  $C_0$  en ausencia de dieléctrico. Una plancha de material dieléctrico de constante dieléctrica  $\kappa$  y espesor  $\frac{1}{3}d$  se introduce entre las placas (Fig. 26.21a). ¿Cuál es la nueva capacitancia cuando el dieléctrico está presente?

**Solución** Este condensador es equivalente a dos condensadores de la misma área  $A$  conectados en serie, uno con una separación entre sus placas  $d/3$  (lleno de dieléctrico) y el otro con una separación entre las placas de  $2d/3$  (Fig. 26.21b). (Este paso es permitido ya que no existe diferencia de potencial entre la placa inferior de  $C_1$  y la placa superior de  $C_2$ .)<sup>4</sup>

De las ecuaciones 26.3 y 26.15, los dos capacitancias están dadas por

$$C_1 = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d/3} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{2d/3}$$

Utilizando la ecuación 26.10 para dos condensadores conectados en serie, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d/3}{\kappa\epsilon_0 A} + \frac{2d/3}{\epsilon_0 A} \\ \frac{1}{C} &= \frac{d}{3\epsilon_0 A} \left( \frac{1}{\kappa} + 2 \right) = \frac{d}{3\epsilon_0 A} \left( \frac{1+2\kappa}{\kappa} \right) \\ C &= \left( \frac{3\kappa}{2\kappa+1} \right) \frac{\epsilon_0 A}{d} \end{aligned}$$

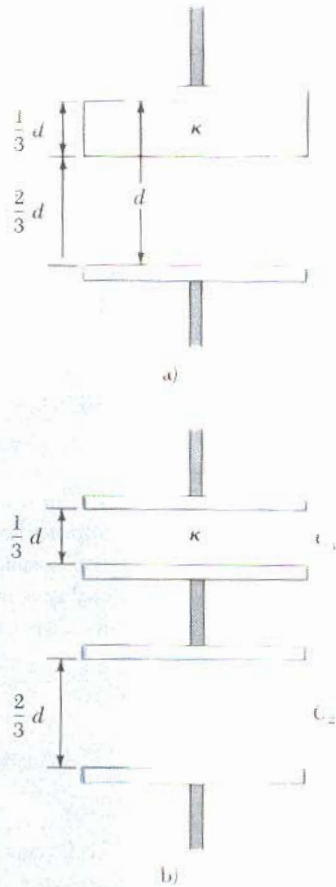
Como la capacitancia *sin* dieléctrico está dada por  $C_0 = \epsilon_0 A/d$ , se ve que

$$C = \left( \frac{3\kappa}{2\kappa+1} \right) C_0$$

### EJEMPLO 26.10 Efecto de una plancha metálica

Un condensador de placas paralelas tiene una separación entre sus placas  $d$  y un área en la placa  $A$ . Una plancha de

<sup>4</sup> Podría también imaginarse colocar dos placas metálicas delgadas (conectadas a través de un alambre conductor entre ellas) en la superficie de abajo del dieléctrico en la figura 26.21a y entonces jalar el ensamble hasta que se vea como en la figura 26.21b.



**Figura 26.21** (Ejemplo 26.9) a) Un condensador de placas paralelas con separación entre las placas  $d$  parcialmente lleno con un dieléctrico de espesor  $d/3$ . b) Circuito equivalente de un condensador que consta de dos condensadores conectados en serie.

metal descargada de espesor  $a$  es introducida justamente a la mitad entre las placas, como se muestra en la figura 26.22a. Encuentre la capacitancia de este dispositivo.

**Solución** Este problema se puede resolver si se observa que siempre que aparece carga en las placas del condensador, se debe inducir una carga *igual y opuesta* en la plancha metálica, como se muestra en la figura 26.22a. En consecuencia, la carga neta en la plancha metálica sigue siendo cero, y el campo eléctrico dentro de ella es cero. De donde, el condensador equivale a dos condensadores en *serie*,

cada uno con una separación entre sus placas  $(d-a)/2$  como se indica en la figura 26.22b. Utilizando la regla de la suma de condensadores en serie se obtiene

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2}}$$

Resolviendo para  $C$  se obtiene

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d-a}$$

Note que la capacitancia tiende al infinito cuando  $a$  tiende a  $d$ . ¿Por qué?

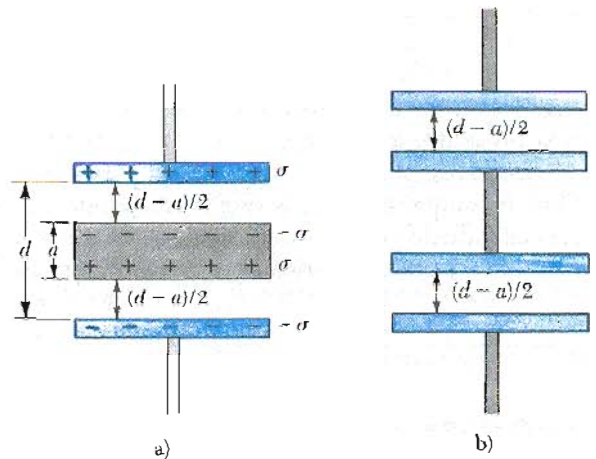


Figura 26.22 (Ejemplo 26.10) a) Condensador de placas paralelas de separación entre sus placas  $d$  parcialmente lleno con una plancha metálica de espesor  $a$ . b) Circuito equivalente del dispositivo en a) que consta de dos condensadores en serie, cada uno con una separación entre sus placas de  $(d-a)/2$ .

### RESUMEN

Un *condensador* consta de dos conductores con cargas iguales y opuestas separados una distancia muy pequeña comparada con sus dimensiones con una diferencia de potencial  $V$  entre ellos. La **capacitancia**  $C$  de cualquier condensador se define como la razón de la magnitud de la carga  $Q$  en cualquiera de los conductores y la magnitud de la diferencia de potencial  $V$ :

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{26.1}$$

La unidad SI de la capacitancia es el coulomb por volt, o faradio (F), y  $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$ .

La capacitancia de varias geometrías (condensadores) se resumen en la tabla 26.2. Las fórmulas se aplican cuando los conductores cargados están separados por vacío.

Si dos o más condensadores se conectan en *paralelo*, la diferencia de potencial a través de cada uno de ellos debe ser la misma. La capacitancia equivalente de una combinación en paralelo está dada por

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \tag{26.8}$$

Si dos o más condensadores están conectados en *serie*, la carga en cada uno de ellos es la misma, y la capacitancia equivalente de la combinación en serie está dada por

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \tag{26.11}$$

Se requiere trabajo para cargar un condensador, ya que el proceso de carga consiste en transferir carga desde un conductor que está a un potencial menor hasta otro conductor que está a un potencial mayor. El trabajo realizado al

### Definición de capacitancia

### Combinaciones en paralelo

### Combinación en serie



TABLA 26.2 Capacitancia y geometría

Geometría	Capacitancia	Ecuación
Esfera cargada aislada de radio $R$	$C = 4\pi\epsilon_0 R$	(26.2)
Condensador de placas paralelas de área $A$ y separación de placas $d$	$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$	(26.3)
Condensador cilíndrico de longitud $\ell$ y radios interior y exterior $a$ y $b$ , respectivamente	$C = \frac{\ell}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$	(26.4)
Condensador esférico con radios interior y exterior $a$ y $b$ , respectivamente.	$C = \frac{ab}{k(b-a)}$	(26.5)

cargar un condensador hasta una carga  $Q$  es igual a la energía potencial electrostática  $U$  almacenada en el condensador, donde

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \quad (26.12)$$

Cuando un material dieléctrico se introduce entre las placas de un condensador, la capacitancia generalmente aumenta por un factor adimensional  $\kappa$  llamado **constante dieléctrica**. Esto es,

$$C = \kappa C_0 \quad (26.15)$$

donde  $C_0$  es la capacitancia en ausencia de dieléctrico. El aumento en la capacitancia se debe a la disminución del campo eléctrico en presencia del dieléctrico, lo cual corresponde a la disminución en la diferencia de potencial entre las placas —suponiendo que la batería de carga se elimina del circuito antes de introducir el dieléctrico—. La disminución de  $E$  proviene de un campo eléctrico interno producido por la alineación de los dipolos en el dieléctrico. Este campo interno producido por los dipolos se opone al campo original aplicado, lo cual conduce a una reducción en el campo eléctrico neto.

Un *dipolo eléctrico* consta de dos cargas iguales y opuestas separadas por una distancia  $2a$ . El **momento dipolar eléctrico**  $p$  de esta configuración tiene una magnitud

$$p \equiv 2aq \quad (26.17)$$

El **momento de una fuerza** que actúa sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme  $E$  está dada por

$$\tau = p \times E \quad (26.19)$$

La **energía potencial** de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme  $E$  está dada por

$$U = -p \cdot E \quad (26.21)$$

Energía almacenada en un condensador cargado

Momento del dipolo eléctrico

Torca sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico extendido

Energía potencial en un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo

### ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Sea cuidadoso al escoger las unidades. Para calcular la capacitancia en farad, asegurarse que la distancia esté en metros y utilícese el valor de  $\epsilon_0$  en el SI. Cuando se verifique la consistencia de unidades, recuérdese que las unidades para el campo eléctrico pueden darse en N/C o V/m.
2. Cuando dos o más condensadores diferentes son conectados en *serie*, tienen la misma carga, pero la diferencia de potencial no es la misma. Sus capacitancias se suman como recíprocos y la capacitancia equivalente de la combinación es siempre *menor* que la del más pequeño de los condensadores.
3. Cuando dos o más condensadores son conectados en *paralelo*, la diferencia de potencial a través de cada uno es la misma. La carga en cada condensador es proporcional a su capacitancia, por lo tanto las capacitancias se suman directamente para obtener la capacitancia equivalente de la combinación en paralelo.
4. El efecto de un dieléctrico en un condensador es el de *aumentar* su capacitancia por un factor  $\kappa$  (la constante dieléctrica) sobre su capacitancia cuando está vacío. La razón de esto es que la carga superficial inducida en el dieléctrico reduce el campo eléctrico dentro del material desde  $E$  hasta  $E/\kappa$ .
5. Sea cuidadoso en los problemas en los cuales se deba de conectar y desconectar la batería de un condensador. Es importante observar si las modificaciones al condensador se llevan a cabo mientras el condensador está conectado a la batería o después de ser desconectado. Si el condensador permanece conectado a la batería, el *voltaje* a través del condensador necesariamente permanece *constante* (igual al voltaje de la batería), y la carga deberá ser proporcional a la capacitancia, *sin embargo esto puede ser modificado* (digamos introduciendo un dieléctrico). Por otro lado, si se desconecta el condensador de la batería *antes* de hacer alguna modificación en el condensador, entonces su *carga* permanece constante. En este caso, al variar la capacitancia, el voltaje a través de las placas cambiará inversamente proporcional a la capacitancia de acuerdo con  $V = Q/C$ .

### PREGUNTAS

1. ¿Qué le sucede a la carga en un condensador si la diferencia de potencial entre los conductores se duplica?
2. Las placas de un condensador están conectadas a una batería. ¿Qué le sucede a la carga en las placas si los alambres conectores se retiran de la batería? ¿Qué le sucede a la carga si los alambres son retirados de la batería y conectados entre sí?
3. Un faradio es una unidad muy grande de capacitancia. Calcule la longitud del lado de un condensador cuadrado relleno de aire, con una separación entre sus placas de 1 metro. Suponga que tiene una capacitancia de 1 farad.
4. Un par de condensadores se conectan en paralelo mientras un par idéntico de condensadores se conecta en serie. ¿Cuál par podría ser más peligroso de manejar después de ser conectado a la misma fuente de voltaje? Explique.
5. Si cuenta con tres condensadores diferentes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , ¿cuántas combinaciones de capacitancia podría producir?
6. ¿Qué ventaja se tiene al utilizar dos condensadores idénticos en paralelo conectados en serie con otro par idéntico paralelo, en comparación con utilizar un simple condensador por sí solo?
7. ¿Es siempre posible reducir una combinación de condensadores a un condensador equivalente con las reglas que se desarrollaron? Explique su respuesta.
8. Como la carga neta en un condensador es siempre cero, ¿qué almacena el condensador?
9. Dado que las cargas en las placas de un condensador de placas paralelas son iguales y opuestas, se atraen una a la otra. Por lo tanto, se podría tener un trabajo positivo al incrementar la separación entre las placas. ¿Qué sucede con el trabajo externo realizado en este proceso?
10. Explique por qué el trabajo necesario para mover una carga,  $Q$ , a través de un potencial  $V$ , está dado por  $W = QV$  si la energía almacenada en un condensador cargado es  $U = \frac{1}{2}QV$ . ¿De dónde sale el factor  $\frac{1}{2}$ ?
11. Si la diferencia de potencial en un condensador se duplica, ¿por qué factor cambia la energía almacenada?
12. ¿Por qué es peligroso tocar las terminales de un condensador de alto voltaje aun después de que el voltaje aplicado es eliminado? ¿Qué debe realizarse para manejar el condensador con seguridad después de que se eliminó el voltaje aplicado?

13. Si se desea aumentar el máximo voltaje de operación en un condensador de placas paralelas, describa cómo podría lograrlo para una separación fija de las placas.
14. Un condensador relleno de aire es cargado, después desconectado de la fuente de voltaje y finalmente conectado a un voltímetro. Explique por qué y en cuánto cambia el voltaje medido cuando un dieléctrico se introduce entre las placas del condensador.
15. Utilice el modelo de molécula polar para explicar cómo afecta un dieléctrico al campo eléctrico en el interior del condensador.
16. Explique por qué un dieléctrico aumenta el máximo voltaje de operación de un condensador siempre que el tamaño físico del condensador no cambie.
17. ¿Cuál es la diferencia entre resistencia dieléctrica y constante dieléctrica?
18. ¿Dónde se llevará a cabo primero la ruptura eléctrica en un cable coaxial si es conectado a diferencia de potencial excesiva?
19. Explique por qué las moléculas de agua están permanentemente polarizadas. ¿Qué tipo de moléculas no tienen polarización permanente?
20. Si el dieléctrico de un condensador es calentado, ¿cómo cambiaría la capacitancia? (Desprecie la dilatación térmica y suponga que las orientaciones del dipolo son independientes de la temperatura.)
21. En términos de cargas inducidas explique por qué un peine cargado atrae pequeños trozos de papel.
22. Si le pidieran diseñar un condensador de pequeño tamaño y gran capacitancia, ¿qué factores deberían ser los importantes para este diseño?

## PROBLEMAS

### Sección 26.1 Definición de capacitancia

1. El exceso de carga en cada conductor de un condensador de placas paralelas es  $53 \mu\text{C}$ . ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los conductores si la capacitancia del sistema es de  $4 \times 10^{-3} \mu\text{F}$ ?
2. Demuestre que las unidades  $\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}$  son iguales a  $1 \text{ F}$ .
3. Dos alambres están suspendidos en el vacío. Cuando la diferencia de potencial entre los alambres es de  $25 \text{ V}$ , cada alambre tiene una carga de  $73 \text{ pC}$  (las cargas son de signos opuestos). Calcule la capacitancia del sistema de alambres paralelos.
4. Dos conductores aislados son cargados al transferir electrones de uno al otro. Después de transferir  $1.6 \times 10^{12}$  electrones, la diferencia de potencial entre los conductores es de  $14 \text{ V}$ . ¿Cuál es la capacitancia del sistema?
5. Un condensador de placas paralelas tiene una capacitancia de  $19 \mu\text{F}$ . ¿Qué carga produce en cada placa una diferencia de potencial de  $36 \text{ V}$  entre las placas del condensador?
6. Una esfera conductora aislada puede ser considerada como un elemento de un condensador (el otro elemento sería una esfera concéntrica de radio infinito). a) ¿Si la capacitancia de este sistema es  $9.1 \times 10^{-11} \text{ F}$ , ¿cuál es el radio de la esfera? b) Si el potencial en la superficie de la esfera es  $2.8 \times 10^4 \text{ V}$ , ¿cuál es la densidad de carga superficial?
7. Una esfera conductora aislada cargada de radio  $12 \text{ cm}$  genera un campo eléctrico de  $4.9 \times 10^4 \text{ N/C}$  a una distancia de  $21 \text{ cm}$  desde su centro. a) ¿Cuál es la densidad de carga superficial? b) ¿Cuál es su capacitancia?
8. Dos esferas conductoras con diámetros de  $0.40 \text{ m}$  y  $1.0 \text{ m}$  están separadas una distancia muy grande comparada con sus diámetros. Las esferas son conectadas con un alambre delgado y cargadas hasta  $7 \mu\text{C}$ . a) ¿Cómo se distribuye esta carga total entre las esferas? (Desprecie cualquier carga en el alambre.) b) ¿Cuál es el potencial del sistema de esferas relativo a  $V = 0$  para  $r = \infty$ ?

9. Dos conductores esféricos con radios  $R_1$  y  $R_2$  están separados por una distancia lo suficientemente grande que los efectos de inducción son despreciables. Las esferas se conectan a través de un alambre conductor delgado y se encuentran al mismo potencial  $V$  relativo a  $V = 0$  para  $r = \infty$ . a) Determine la capacitancia  $C$  del sistema, donde  $C = (Q_1 + Q_2)/V$ . b) ¿Cuál es la razón  $Q_1/Q_2$ ?

### Sección 26.2 Cálculo de capacitancias

10. Un condensador de placas paralelas lleno de aire tiene una capacitancia de  $1 \text{ F}$ . Si la distancia entre las placas es de  $1 \text{ mm}$ , calcule el área de la superficie requerida en cada placa. Convierta su respuesta a millas cuadradas.
11. Un condensador de placas paralelas tiene un área de placa de  $12 \text{ cm}^2$  y una capacitancia de  $7 \text{ pF}$ . ¿Cuál es la separación entre las placas?
12. Las placas de un condensador de placas paralelas están separadas  $0.2 \text{ mm}$ . Si el espacio entre las placas es aire, ¿cuál es el área que se requiere para producir una capacitancia de  $9 \text{ pF}$ ?
13. Cuando una diferencia de potencial de  $150 \text{ V}$  se aplica a las placas de un condensador de placas paralelas, las placas tienen una densidad de carga superficial de  $30 \text{ nC/cm}^2$ . ¿Cuál es el espacio entre las placas?
14. Un pequeño objeto cuya masa es de  $350 \text{ g}$  tiene una carga de  $30 \text{ nC}$  y está suspendido por un hilo entre las placas verticales de un condensador de placas paralelas. Las placas están separadas  $4 \text{ cm}$ . Si el hilo hace un ángulo de  $15^\circ$  con la vertical, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas?
15. Un condensador relleno de aire consta de dos placas paralelas, cada una con un área de  $0.6 \text{ cm}^2$ , separadas una distancia de  $1.8 \text{ mm}$ . Si se aplica una diferencia de potencial de  $20 \text{ V}$  a estas placas, calcule a) el campo eléctrico entre las placas, b) la densidad de carga superficial, c) la capacitancia y d) la carga en cada placa.

16. Calcule el campo eléctrico en el interior de un condensador de  $75 \text{ pF}$  de placas paralelas con un voltaje aplicado de  $0.34 \text{ V}$ . Suponga que el área de la superficie de la placa es de  $1 \text{ cm}^2$ .
17. Un condensador de placas paralelas circulares espaciadas  $d = 3 \text{ mm}$  se carga hasta producir una intensidad de campo eléctrico de  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ . ¿Cuál es el radio  $R$  requerido en la placa si la carga almacenada es de  $1 \text{ }\mu\text{C}$ ?
18. Un condensador es construido intercalando placas como se muestra en la figura 26.23 (vista de sección transversal). La separación entre las placas adyacentes es  $0.8 \text{ cm}$  y el área total efectiva de las placas es de  $7 \text{ cm}^2$ . Ignorando los efectos de las orillas, calcule la capacitancia de la unidad.

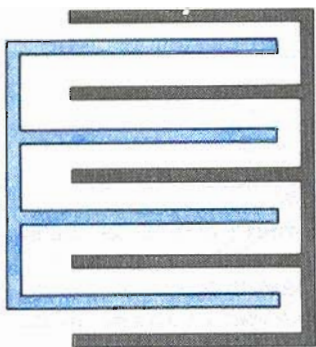


Figura 26.23 (Problemas 18 y 87).

19. Una placa de un condensador de placas paralelas (con área  $A = 100 \text{ cm}^2$ ) está aterrizada. La placa no aterrizada tiene una carga  $Q$ . Cuando la placa no aterrizada se desplaza  $5 \text{ cm}$  alejándose de la placa aterrizada, la diferencia de potencial entre las placas aumenta  $200 \text{ V}$ . Determine la magnitud de la carga  $Q$ .
20. Un condensador cilíndrico lleno de aire tiene una capacitancia de  $10 \text{ pF}$  y su longitud es de  $6 \text{ cm}$ . Si el radio del conductor externo es  $1.5 \text{ cm}$ , ¿cuál es el radio requerido para el conductor interno?
21. Un cable coaxial de  $50 \text{ m}$  de longitud tiene un conductor interno con diámetro de  $2.58 \text{ mm}$  y una carga de  $+8.1 \text{ }\mu\text{C}$ . El conductor que lo rodea tiene un diámetro interno de  $7.27 \text{ mm}$  y una carga de  $-8.1 \text{ }\mu\text{C}$ . a) ¿Cuál es la capacitancia de este cable? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos conductores?
22. Un condensador cilíndrico tiene conductores interno y externo cuyos radios tienen una razón de  $b/a = 4/1$ . El conductor interno se reemplaza por un alambre cuyo radio es la mitad del diámetro del conductor original. ¿Por qué factor debería ser incrementarla la longitud del condensador para que tuviera la capacitancia del condensador original?
23. Un conductor esférico relleno de aire se construye con cascarones internos y externos cuyos radios son  $7 \text{ cm}$  y  $14 \text{ cm}$ , respectivamente. a) Calcule la capacitancia del dispositivo. b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las esferas como resultado de tener  $4 \text{ }\mu\text{C}$  en cada esfera?
24. Un condensador esférico relleno de aire tiene un conductor esférico externo de radio  $0.25 \text{ m}$ . Si la capacitancia del dispositivo es de  $1 \text{ }\mu\text{F}$ , calcule el valor del radio requerido para el conductor interno.

25. Un condensador esférico consta de una bola conductora con diámetro de  $10 \text{ cm}$  que está centrada en el interior de un cascarón esférico aterrizado con un diámetro interno de  $12 \text{ cm}$ . ¿Qué carga se requiere en el condensador para que la bola se encuentre a un potencial de  $1000 \text{ V}$ ?
26. Compare la capacitancia de un condensador esférico de radios  $a = 7 \text{ cm}$  y  $b = 8 \text{ cm}$  con la capacitancia de un condensador cilíndrico que tenga los mismos radios y una longitud axial de  $15 \text{ cm}$ . (En cada caso el conductor externo está aterrizado.) ¿Por qué los valores de la capacitancia son aproximadamente iguales?

### Sección 26.3 Combinaciones de condensadores

27. Dos condensadores,  $C_1 = 2 \text{ }\mu\text{F}$  y  $C_2 = 16 \text{ }\mu\text{F}$ , se conectan en paralelo. ¿Cuál es el valor de la capacitancia equivalente?
28. Calcule la capacitancia equivalente de los dos condensadores descritos en el ejercicio anterior si son conectados en serie.
29. a) Determine la capacitancia equivalente del conjunto de condensadores que se ve en la figura 26.24. b) Si el conjunto se conecta a una batería de  $12 \text{ V}$ , calcule la diferencia de potencial a través de cada condensador y la carga en cada condensador.

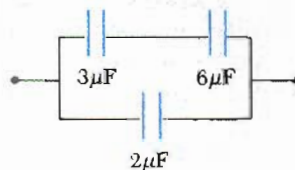


Figura 26.24 (Problema 29).

30. Evalúe la capacitancia efectiva de la configuración que se muestra en la figura 26.25. Cada uno de los condensadores es idéntico y tiene una capacitancia  $C$ .

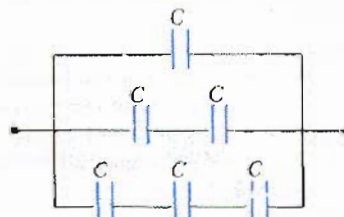


Figura 26.25 (Problema 30).

31. Cuatro condensadores son conectados como se muestra en la figura 26.26. a) Determine la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$ . b) Calcule la carga en cada condensador si  $V_{ab} = 15 \text{ V}$ .
32. a) La figura 26.27 muestra el conjunto de condensadores entre las terminales  $a$  y  $b$ . Reduzca este conjunto a un simple condensador equivalente. b) Determine la carga en los condensadores de  $4 \text{ }\mu\text{F}$  y de  $8 \text{ }\mu\text{F}$  cuando los condensadores están totalmente cargados por una

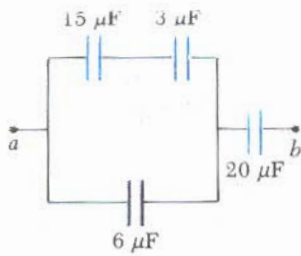


Figura 26.26 (Problemas 31 y 44).

batería de 12 V conectada en las terminales. c) Determine la diferencia de potencial a través de cada condensador.

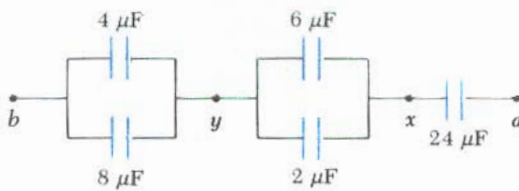


Figura 26.27 (Problema 32).

33. Considere el circuito que se ve en la figura 26.28, donde  $C_1 = 6 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 3 \mu\text{F}$  y  $V = 20 \text{ V}$ . Se carga primero  $C_1$  cerrando el interruptor  $S_1$ . El interruptor  $S_1$  es entonces abierto, y el condensador cargado se conecta al condensador descargado al cerrar el interruptor  $S_2$ . Calcule la carga inicial adquirida por  $C_1$  y la carga final en cada uno de los condensadores.

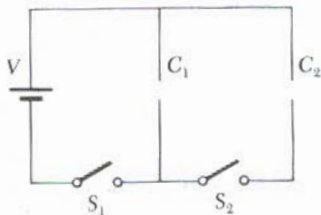


Figura 26.28 (Problema 33).

34. Considere el grupo de condensadores que se observa en la figura 26.29. a) Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$ . b) Determine la carga en cada condensador cuando la diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$  es de 12 V.

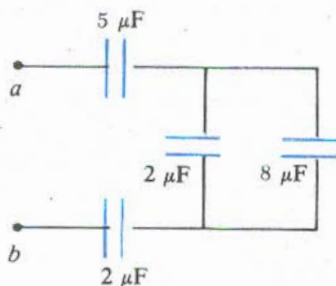


Figura 26.29 (Problema 34).

35. Considere la combinación de condensadores que se muestra en la figura 26.30. a) ¿Cuál es la capacitancia entre los puntos  $a$  y  $b$ ? b) Determine la carga en cada condensador si  $V_{ab} = 4.8 \text{ V}$ .

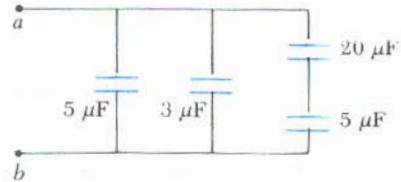


Figura 26.30 (Problema 35).

36. Un director de compras consigue un descuento al comprar un gran número de condensadores iguales. ¿Cuántos valores diferentes de capacitancia efectiva puede un técnico producir utilizando todas las combinaciones posibles de uno a tres condensadores separados? Evalúe la capacitancia en términos de la capacitancia  $C$  de un condensador muestra para cada combinación.
37. Un condensador de  $4 \mu\text{F}$  cargado a  $400 \text{ V}$  y un condensador de  $6 \mu\text{F}$  cargado a  $600 \text{ V}$  se conectan uno con el otro con las placa positiva de cada uno conectada a la placa negativa del otro. a) ¿Cuál es valor final de la carga que reside en cada condensador? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada condensador después de que han sido conectados?
38. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  del grupo de condensadores conectados como se muestra en la figura 26.31 si  $C_1 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 2 \mu\text{F}$ .

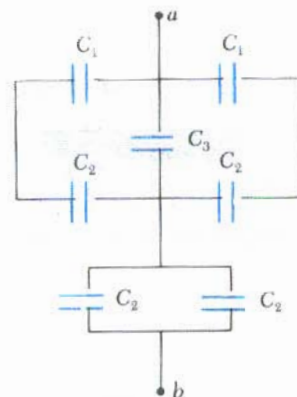


Figura 26.31 (Problemas 38 y 39).

39. Para el circuito descrito en el ejercicio anterior, si la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  es  $60 \text{ V}$ , ¿cuál es la carga almacenada en el condensador  $C_3$ ?
40. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  en el grupo de condensadores que se ve en la figura 26.32.

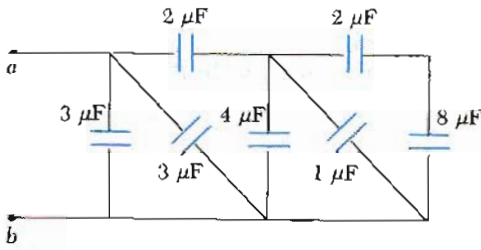


Figura 26.32 (Problema 40).

41. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  en la combinación de condensadores que se muestra en la figura 26.33.

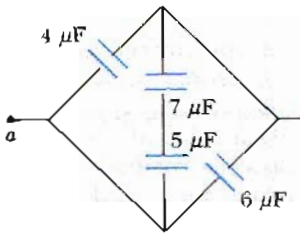


Figura 26.33 (Problema 41).

42. ¿Cómo deberían ser conectados cuatro capacitores de  $2 \mu\text{F}$  para que tengan una capacitancia total de a)  $8 \mu\text{F}$ , b)  $2 \mu\text{F}$ , c)  $1.5 \mu\text{F}$  y d)  $0.5 \mu\text{F}$ ?
43. Una plancha conductora de espesor  $d$  y área  $A$  se introduce en el espacio entre las placas de un condensador de placas paralelas cuya separación es  $s$  y área  $A$ , como se muestra en la figura 26.34. ¿Cuál es el valor de la capacitancia del sistema?

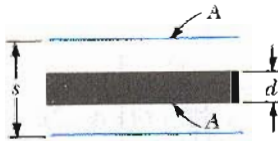


Figura 26.34 (Problema 43).

#### Sección 26.4 Energía almacenada en un condensador cargado

44. ¿Cuánta energía total está almacenada en el grupo de condensadores que se ve en la figura 26.26 si  $V_{ab} = 15 \text{ V}$ ?
45. Calcule la energía almacenada en un condensador de  $18 \mu\text{F}$  cuando es cargado a un potencial de  $100 \text{ V}$ .
46. Un condensador de placas paralelas es cargado y entonces desconectado de la batería. ¿Por qué fracción cambia la energía almacenada (aumenta o disminuye) cuando se duplica la separación entre las placas?
47. Suponga un condensador de capacitancia  $C$  que puede operar a un potencial máximo  $V$ . Compare la máxima

energía que pueden almacenar una combinación en serie de dos de estos condensadores con la máxima energía almacenada por una combinación en paralelo de estos dos condensadores.

48. Dos condensadores,  $C_1 = 25 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ , están conectados en paralelo y cargados con una fuente de poder de  $100 \text{ V}$ . a) Calcule la energía total almacenada en los dos condensadores. b) ¿Qué diferencia de potencial se requeriría a través de los mismos condensadores conectados en serie de tal manera que la combinación almacene la misma energía que en a)?
49. Un condensador de placas paralelas de  $16 \text{ pF}$  es cargado por una batería de  $10 \text{ V}$ . Si cada placa del condensador tiene un área de  $5 \text{ cm}^2$ , ¿cuál es la energía almacenada en el condensador? ¿Cuál es la densidad de energía (energía por unidad de volumen) en el campo eléctrico del condensador si las placas están separadas por aire?
50. La densidad de energía en un condensador de placas paralelas está dada como  $2.1 \times 10^{-9} \text{ J/m}^3$ . ¿Cuál es el valor del campo eléctrico entre las placas del condensador?
51. Un condensador de placas paralelas tiene una carga  $Q$  y área en las placas  $A$ . Demuestre que la fuerza ejercida por cada placa sobre la otra está dada por  $F = Q^2/2\epsilon_0 A$ . (Sugerencia: sea  $C = \epsilon_0 A/x$  para una separación entre placas arbitraria  $x$ , entonces el trabajo realizado en separar las placas cargadas es  $W = \int F dx$ .)
52. Un campo eléctrico uniforme  $E = 3000 \text{ V/m}$  existe en una región del espacio. ¿Qué volumen del espacio podría contener una energía igual a  $10^{-7} \text{ J}$ ? Expresar su respuesta en metros cúbicos y en litros.
53. Demuestre que la energía asociada con una esfera conductora de radio  $R$  y carga  $Q$  rodeada de vacío está dada por  $U = kQ^2/2R$ .
54. Utilice la ecuación 26.14 para hacer un cálculo explícito de la energía almacenada en el campo eléctrico de un condensador esférico simple. Demuestre que  $U = Q^2/2C$ .

#### \*Sección 26.5 Condensadores con dieléctrico y \*Sección 26.7 Descripción atómica del dieléctrico

55. Determine: a) la capacitancia y b) el máximo voltaje que se le puede aplicar a un condensador de placas paralelas relleno con Teflón que tiene un área en la placa de  $175 \text{ cm}^2$  y el espesor del aislante es de  $0.04 \text{ mm}$ . Vea la tabla 26.1, para otras propiedades dieléctricas.
56. Un condensador de placas paralelas se construye utilizando papel como dieléctrico. Si se desea que el máximo voltaje antes de la ruptura sea de  $2500 \text{ V}$ , ¿qué espesor de dieléctrico se necesita? Consulte en la tabla 26.1 otras propiedades dieléctricas.
57. Un condensador de placas paralelas tiene un área de  $0.64 \text{ cm}^2$ . Cuando las placas están en vacío, la capacitancia del dispositivo es de  $4.9 \text{ pF}$ . a) Calcule el valor de la capacitancia si el espacio entre las placas se llena con nylon. b) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede ser aplicada a las placas sin causar la ruptura eléctrica o descarga?
58. Un condensador se construye con dos placas cuadradas de lado  $L$  y separadas por una distancia  $d$  (Fig. 26.35). La mitad del espacio entre las placas (de arriba a abajo)

se llena con poliestireno ( $\kappa = 2.56$ ), y la otra mitad se llena con caucho neopreno ( $\kappa = 6.7$ ). Calcule la capacitancia del dispositivo, tomando  $L = 2 \text{ cm}$  y  $d = 0.75 \text{ mm}$  (Sugerencia: el condensador puede ser considerado como dos condensadores conectados en paralelo.)

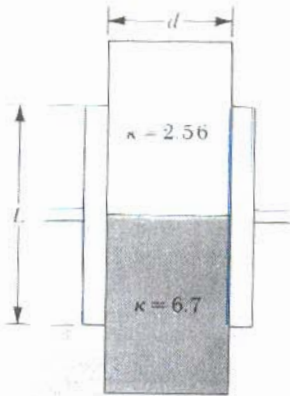


Figura 26.35 (Problema 58).

59. Un condensador comercial se construye como se indica en la figura 26.12a. Este particular condensador es el enrollado de dos tiras de aluminio separadas por dos tiras de papel empapadas de parafina. Cada tira de metal y papel tiene 7 cm de ancho. La tira de metal tiene un espesor de 0.004 mm y la tira de papel es de 0.025 mm de espesor y tiene una constante dieléctrica de 3.7. ¿Qué longitud debe tener la tira si se desea un condensador de  $9.5 \times 10^{-8} \text{ F}$ ? (Utilice la fórmula del condensador de placas paralelas.)
60. Un cable coaxial tiene un conductor externo de diámetro interno 0.9 cm, y está relleno con polietileno, el cual tiene una constante dieléctrica de 2.3. Si la capacitancia por unidad de longitud del cable es 40 pF/m, ¿cuál es diámetro del conductor interno?
61. Un condensador con aire entre sus placas es cargado a 120 V y entonces desconectado de la batería. Cuando una pieza de vidrio se coloca entre sus placas, el voltaje a través de sus placas cae hasta 20 V. ¿Cuál es la constante dieléctrica del vidrio? (Suponga que el vidrio llena el espacio entre las placas.)
62. Un condensador de placas paralelas puede almacenar una energía máxima  $U_a$  cuando el espacio entre las placas está lleno de aire. ¿Cuál es la máxima energía que puede almacenar el condensador si el espacio se llena de teflón?
63. Un condensador de placas paralelas puede ser cargado hasta 3 C antes de que la ruptura ocurra en las placas. ¿Cuál es la máxima carga que pueden tener las placas si el espacio entre ellas se llena con a) vidrio ( $\kappa = 5$ ) b) polietileno ( $\kappa = 2.3$ )?
64. Sea  $Q_0$  la mayor carga que puede ser colocada en las placas de un condensador de placas paralelas lleno de aire sin que ocurra una descarga eléctrica. Sea  $Q$  la mayor carga que puede ser colocada en las placas del mismo condensador cuando el espacio entre sus placas está lleno de caucho neopreno. ¿Cuál es la razón  $Q/Q_0$ ?
65. Una lámina de papel de 0.1 mm de espesor se introduce entre las placas de un condensador de 340 pF relleno

de aire, con una separación entre sus placas de 0.4 mm. Calcule la nueva capacitancia.

66. Una oblea de óxido de titanio ( $\kappa = 173$ ) tiene un área de  $1 \text{ cm}^2$  y un espesor de 0.10 mm. Se evapora aluminio sobre las caras paralelas para formar un condensador de placas paralelas. a) Calcule la capacitancia. b) Cuando el condensador se carga con una batería de 12 V, ¿cuál es la magnitud de la carga libre en cada placa? c) Para la situación en b), ¿cuáles son las densidades de carga superficial libre e inducida? d) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico  $E$ ?

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

67. Cuando dos condensadores están conectados en paralelo su capacitancia equivalente es  $4 \mu\text{F}$ . Si los mismos condensadores se conectan en serie, la capacitancia es un cuarto de la capacitancia de uno de los condensadores. Determine las dos capacitancias.
68. Para el sistema de condensadores que se ve en la figura 26.36, encuentre: a) la capacitancia equivalente del sistema, b) el potencial a través de cada condensador, c) la carga en cada condensador y d) la energía almacenada en el grupo.

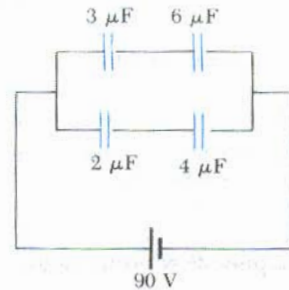


Figura 26.36 (Problema 68).

69. Cuando el voltaje aplicado a un condensador se aumenta desde 80 V hasta 110 V, la carga en el condensador aumenta en  $9.0 \times 10^{-5} \text{ C}$ . Determine la capacitancia.
70. a) ¿Cuál es la capacitancia de un condensador de placas paralelas cuadradas cuyo lado mide 5 cm y la separación entre las placas de 0.2 mm está llena de teflón. b) ¿Cuál es el máximo voltaje que este condensador puede soportar? c) ¿Cuál es la máxima energía que este condensador puede almacenar?
71. Cuando cierto condensador de placas paralelas lleno de aire se carga con una batería, adquiere una carga (en cada placa) de  $150 \mu\text{C}$ . Mientras la batería permanece conectada, una plancha de dieléctrico se introduce entre las placas llenando la región. Esto produce una acumulación de carga adicional de  $200 \mu\text{C}$  en cada placa. ¿Cuál es la constante dieléctrica de la plancha?
72. La energía almacenada en un condensador de  $52 \mu\text{F}$  se utiliza para fundir una muestra de 6 mg de plomo. ¿A qué voltaje debe ser inicialmente cargado el condensador, suponiendo que la temperatura inicial del plomo es de  $20^\circ\text{C}$ ?
73. Tres condensadores de  $8 \mu\text{F}$ ,  $10 \mu\text{F}$ ,  $14 \mu\text{F}$  se conectan a las terminales de una batería de 12 V. ¿Cuánta energía

debe suministrar la batería si los condensadores están conectados a) en serie y b) en paralelo?

74. Una esfera metálica aislada cuya capacitancia es de 50 pF se carga a un potencial de  $10^3$  V. a) ¿Cuánta energía está almacenada en la esfera? b) Una esfera descargada idéntica se pone en contacto con la esfera cargada; posteriormente, la segunda esfera se retira, por lo que en efecto, las dos esferas quedan aisladas. Calcule la energía total almacenada en las dos esferas. c) Explique cualquier diferencia entre los resultados de a) y b).
75. Condensadores de  $C_1 = 4 \mu\text{F}$  y  $2 \mu\text{F}$  son cargados como una combinación en serie a través de una batería de 100 V. Los dos condensadores se desconectan de la batería, así como uno del otro. Ahora se conectan las placas positivas y las placas negativas. Calcule la carga resultante en cada condensador.
76. Encuentre 9 combinaciones no iguales de condensadores que pueda obtener al utilizar 4 condensadores idénticos, cada uno con capacitancia  $C$ .
77. Dos condensadores idénticos son conectados en paralelo. Inicialmente se cargan a un potencial  $V_0$  y cada uno adquiere una carga  $Q_0$ . Después la batería se desconecta y el espacio entre las placas de un condensador se llena con un dieléctrico ( $\kappa = 3$ ). a) Calcule la carga en cada condensador después de que se introdujo el dieléctrico. b) Calcule la nueva diferencia de potencial en términos de  $V_0$ .
78. Un condensador  $C_1 = 4 \mu\text{F}$  se carga a una diferencia de potencial de 800 V. El condensador es entonces desconectado de la fuente de poder y cada placa del condensador cargado se conecta con la correspondiente de un condensador descargado  $C_2 = 6 \mu\text{F}$ . a) ¿Cuál es la carga resultante en cada condensador? b) ¿Cuál es la energía total electrostática asociada a los dos condensadores antes y después de ser conectados?
79. Un condensador de placas paralelas se debe construir utilizando nylon como dieléctrico. Si la capacitancia del dispositivo debe ser  $0.6 \mu\text{F}$  y su voltaje de operación de 4000 V, a) calcule la mínima área de placa requerida. b) ¿Cuál es la energía almacenada en el condensador al operar a este voltaje?
- Un condensador de placas paralelas se construye utilizando tres diferentes materiales dieléctricos, como se muestra en la figura 26.37. a) Encuentre la expresión para la capacitancia del dispositivo en términos del área de la placa  $A$  y  $d$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$ . b) Calcule la capacitancia utilizando los valores  $A = 1 \text{ cm}^2$ ,  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $\kappa_1 = 4.9$ ,  $\kappa_2 = 5.6$  y  $\kappa_3 = 2.1$ .

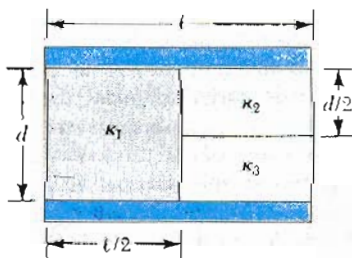


Figura 26.37 (Problema 80).

81. En el arreglo que se muestra en la figura 26.38, un potencial  $V$  es aplicado, y  $C_1$  se ajusta para que la lectura del voltímetro electrostático entre los puntos  $b$  y  $d$  sea cero. Este "balance" ocurre cuando  $C_1 = 4 \mu\text{F}$ . Si  $C_3 = 9 \mu\text{F}$  y  $C_4 = 12 \mu\text{F}$ , calcule el valor de  $C_2$ .

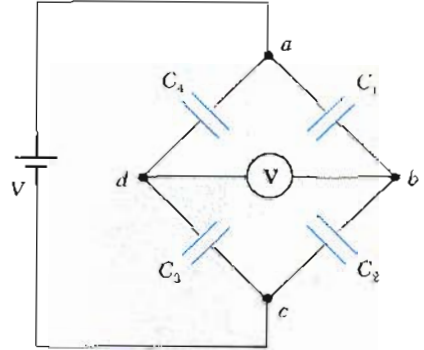


Figura 26.38 (Problema 81).

82. Es posible obtener una gran diferencia de potencial primero cargando un grupo de condensadores conectados en paralelo y entonces activando interruptores que desconecten los condensadores de la fuente de carga y entre sí y los reconecte en un arreglo en serie. El grupo de condensadores cargados es entonces descargado en serie. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede ser obtenida de esta manera utilizando diez condensadores cada uno de  $500 \mu\text{F}$  y con una fuente de alimentación de 800 V?
83. Un condensador de placas paralelas cuya separación en las placas es  $d$  se carga a una diferencia de potencial  $V_0$ . Una plancha de dieléctrico de espesor  $d$  y constante dieléctrica  $\kappa$  se introduce entre las placas mientras la batería permanece conectada a las placas. a) Demuestre que la razón de la energía almacenada después de que introdujo el dieléctrico a la energía cuando estaba vacío está dado por  $U/U_0 = \kappa$ . Dé una explicación física para el incremento en la energía almacenada. b) ¿Qué le sucede a la carga del condensador? (Note que esta situación no es la misma que la del ejemplo 26.7, en el cual la batería era retirada del circuito antes de introducir el dieléctrico.)
84. Un condensador de placas paralelas debe ser construido utilizando vidrio Pyrex como dieléctrico. Si la capacitancia del dispositivo debe ser  $0.2 \mu\text{F}$  y el voltaje de operación de 6000 V, a) calcule el área mínima de la placa requerida. b) ¿Cuánta energía es almacenada a este voltaje de operación? Para el vidrio Pyrex, utilice  $\kappa = 5.6$ . (Nota: cada material dieléctrico tiene una resistencia dieléctrica. Éste es el máximo voltaje por unidad de espesor del material que puede soportar sin ruptura o descarga eléctrica. Para el Pyrex, la resistencia eléctrica es  $14 \times 10^6 \text{ V/in.}$ )
85. Un condensador se construye de dos placas cuadradas de lados  $l$  y separación  $d$ . Un material dieléctrico de constante  $\kappa$  se introduce a una distancia  $x$  dentro del



condensador, como en la figura 26.39. a) Encuentre la capacitancia equivalente del dispositivo. b) Calcule la energía almacenada en el condensador si la diferencia de potencial es  $V$ . c) Encuentre la dirección y la magnitud de la fuerza ejercida sobre el dieléctrico, suponiendo una diferencia de potencial constante  $V$ . Desprecie los efectos de los extremos y la fricción. d) Obtenga un valor numérico para la fuerza suponiendo que  $\ell = 5$  cm,  $V = 2000$  V,  $d = 2$  mm, y el dieléctrica es vidrio ( $\kappa = 4.5$ ). (Sugerencia: el sistema puede ser considerado como dos condensadores conectados en paralelo).

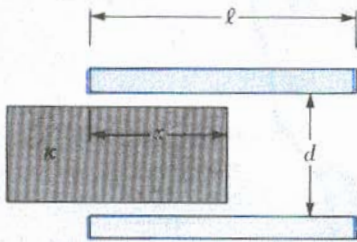


Figura 26.39 (Problema 85).

86. Los condensadores  $C_1 = 6 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 2 \mu\text{F}$  se cargan como una combinación en paralelo a través de una batería de 250 V. Los condensadores se desconectan de la batería y uno del otro. Ahora se conecta la placa positiva de uno con la negativa del otro y la negativa con la positiva. Calcule la carga resultante en cada condensador.
87. Una columna de  $N$  placas tiene placas alternas conectadas para formar un condensador similar al de la figura 26.23. Las placas adyacentes están separadas por un dieléctrico de espesor  $d$ . La constante dieléctrica es  $\kappa$  y el área de traslape de las placas adyacentes es  $A$ . Demuestre que la capacitancia de esta columna de placas es  $C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d} (N - 1)$ .

88. Una balanza de coulomb se construye con dos placas paralelas cuadradas de 10 cm de lado. La placa superior es móvil. Una masa de 25 mg se coloca sobre la placa superior, se observa lo que baja la placa y entonces la masa se retira. Cuando una diferencia de potencial se aplica a las placas, se encuentra que un voltaje de 375 V ocasiona que la placa superior baje lo mismo que bajó cuando la masa se colocó sobre ella. Si la fuerza ejercida sobre una placa por la otra está dada por  $F = Q^2/2\epsilon_0 A$ , calcule lo siguiente suponiendo un voltaje aplicado de 375 V: a) la carga sobre las placas. b) El campo eléctrico entre las placas. c) La distancia de separación entre las placas. d) La capacitancia del condensador.

89. El conductor interno de un cable coaxial tiene un diámetro de 0.8 mm y el conductor externo tiene un diámetro interno de 3.0 mm. El espacio entre los conductores se llena con polietileno, el cual tiene una

constante dieléctrica de 2.3 y una resistividad dieléctrica de  $18 \times 10^6$  V/m. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede soportar el cable?

90. Está optimizando el diseño de un cable coaxial para una mejor producción. Demuestre que para un radio del conductor externo  $b$  dado, la máxima diferencia de potencial capaz de soportar se obtiene cuando el radio del conductor interno está dado por  $a = b/e$  donde  $e$  es la base de los logaritmos naturales.
91. Calcule la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  de la figura 26.40. Observe que ésta no es una simple combinación en serie o en paralelo. (Sugerencia: suponga una diferencia de potencial  $V$  entre los puntos  $a$  y  $b$ . Escriba expresiones para  $V_{ab}$  en términos de las cargas y las capacitancias para varias de las posibles trayectorias desde  $a$  hasta  $b$ , y aplique la conservación de la carga para las placas de los condensadores que están conectadas.)

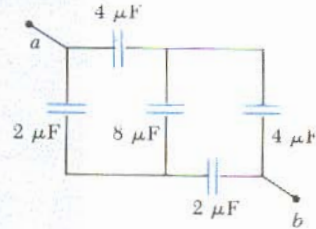


Figura 26.40 (Problema 91).

92. Determine la capacitancia efectiva de la combinación que se muestra en la figura 26.41. (Sugerencia: ¡considere la simetría involucrada!)

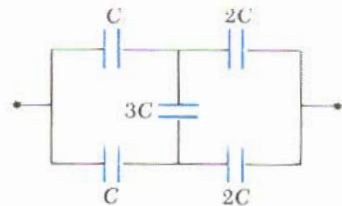


Figura 26.41 (Problema 92).

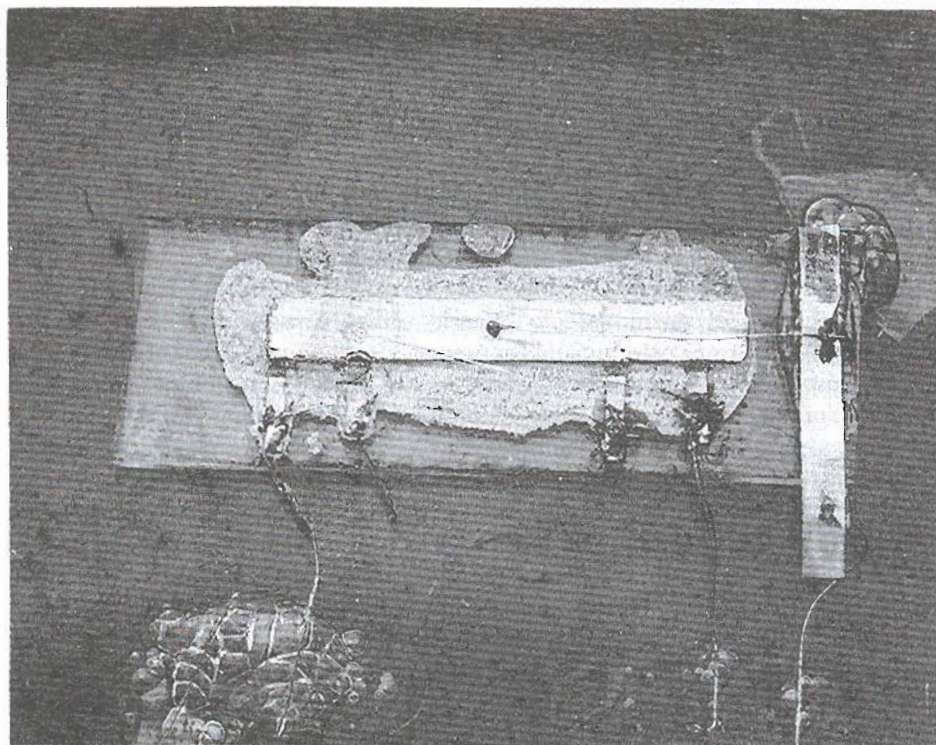
93. Considere dos alambres largos paralelos, con cargas opuestas de radio  $d$  con sus centros separados por una distancia  $D$ . Suponiendo que la carga está distribuida uniformemente sobre la superficie de cada alambre, demuestre que la capacitancia por unidad de longitud de este par de alambres está dada por la expresión:

$$\frac{C}{\ell} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}$$



"Pero precisamente no tenemos la tecnología para realizar esto".

## Corriente y resistencia



*Primer circuito integrado, probado el 12 de septiembre de 1958. (Cortesía de Texas Instruments)*

**H**asta el momento las discusiones de los fenómenos eléctricos se han enfocado a las cargas en reposo o electrostática. Ahora se considerarán situaciones en las cuales se consideran cargas en movimiento. El término *corriente eléctrica* o simplemente *corriente* se utiliza para describir la rapidez de flujo de la carga por alguna región del espacio. La mayor parte de las aplicaciones prácticas de la electricidad se refieren a las corrientes eléctricas. Por ejemplo, la batería de una lámpara suministra corriente al filamento de la bombilla (foco) cuando el interruptor se coloca en la posición de encendido. Una gran variedad de aparatos domésticos funcionan con corriente alterna. En estos casos comunes, el flujo de carga se lleva a cabo en un conductor, como un alambre de cobre. Sin embargo, es posible que existan corrientes fuera del conductor. Por ejemplo, el haz de electrones en un cinescopio de TV constituye una corriente.

En este capítulo primero se describirá la batería, una fuente de corriente continua, y luego la definición de corriente y densidad de corriente. Se dará una descripción microscópica de la corriente, y se discutirán algunos de los factores que contribuyen a la resistencia al flujo de la carga en conductores. Los mecanismos responsables de la resistencia eléctrica de varios materiales dependen de la composición del material y de la temperatura. Un modelo clásico se utiliza para describir la conducción en un metal, y algunas de las limitaciones del modelo son puntualizadas.

27.1 LA BATERÍA

Aun cuando los fenómenos eléctricos eran conocidos antes de 1800, las máquinas eléctricas de esa época se limitaban a dispositivos que producían carga estática y grandes diferencias de potencial por medio de fricción. Tales máquinas eran capaces de producir grandes chispas, pero su valor práctico era bastante limitado.

La batería eléctrica, inventada en 1800 por Alessandro Volta (1745-1827), fue uno de los más importantes descubrimientos prácticos en la ciencia. Este invento representa el fundamento de un amplio espectro de subsecuentes desarrollos en la tecnología eléctrica.

Es interesante describir brevemente algunos de los más importantes eventos que llevaron a Volta a su invento. En 1786, Luigi Galvani (1737-1798) encontró que cuando un anzuelo de cobre era insertado en la columna espinal de una rana, el cual a su vez se colgaba de un barandal de hierro, el músculo del anca se contraía. Galvani observó el mismo efecto cuando utilizó otros metales que no eran similares. Al informar este inusual fenómeno, propone que la fuente de la carga era el músculo o los nervios de la rana. Por ello, utilizó el término: fuente "electricidad animal".

Después de escuchar los resultados de Galvani, Volta procedió a confirmar y ampliar estos experimentos. Él propuso entonces la idea de que la fuente de carga no era animal, sino el contacto entre dos metales no similares, como hierro y cobre. Durante sus investigaciones, Volta reconoció que el contacto entre dos metales requiere un conductor acuoso (como el músculo de la rana) para obtener un efecto apreciable. Eventualmente probó este punto al demostrar que el efecto ocurría (aunque débilmente) cuando el músculo de la rana era reemplazado por una sustancia inorgánica. Por otro lado, demostró que ciertos pares de metales producían un mayor efecto que otros.

Volta entonces procedió a inventar una fuente continua de electricidad, la primera batería. Su original dispositivo, llamado pila voltaica, consta de placas alternadas de plata y zinc, como en la figura 27.1. Las placas adyacentes eran separadas por una tela empapada de solución salina o de ácido diluido. La estructura de las placas produce una diferencia de potencial continuo entre los dos extremos, con un exceso de carga positiva en el extremo de plata y un exceso de carga negativa en el extremo de zinc. En efecto, la pila era un convertidor de energía, donde la energía química interna era convertida en energía potencial eléctrica. Aunque esta batería producía un potencial muy pequeño comparado con el producido por las máquinas electrostáticas por fricción, era capaz de dar una gran carga eléctrica, por lo que probó ser de gran importancia práctica. Estas primeras fuentes fueron muy importantes para los experimentos porque producían una diferencia de potencial casi constante.

Existen diferentes tipos de batería de uso cotidiano. Uno de los tipos más común es la pila ordinaria para lámpara. Estas baterías se producen en una variedad de tamaños y formas, pero todas trabajan básicamente de la misma forma. La figura 27.2 es un diagrama del interior de dicha batería. En esta particular batería, a veces llamada pila seca, el casco de zinc sirve como terminal negativa, mientras que la barra de carbón colocada en el centro sirve de terminal positiva. El espacio entre las dos terminales contiene una pasta ligera de una mezcla de dióxido de manganeso, cloruro de amonio y carbón.

Cuando estos materiales se ensamblan en esta forma, dos reacciones químicas se llevan a cabo; una ocurre en el casco de zinc, y la otra en la placa de dióxido de manganeso que rodea a la barra de carbón. Iones de zinc cargados positivamente ( $Zn^{2+}$ ) salen del casco y entran a la pasta de cloruro de amonio donde se combinan con iones de cloro ( $Cl^-$ ). (Los iones de cloro están presentes porque un pequeño porcentaje de cloruro de amonio se disocia, dejando iones de cloro libres en la solución.) Al ser removido del casco cada ion deja dos electrones. Al sumar los

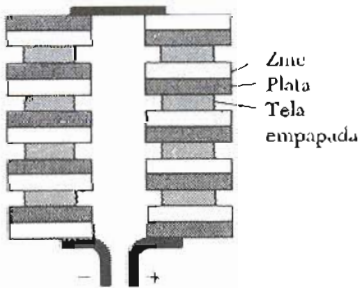


Figura 27.1 Diagrama de la pila original de Volta. La tela que separa las placas está empapada de una solución salina. Una diferencia de potencial se produce entre las placas de los extremos.

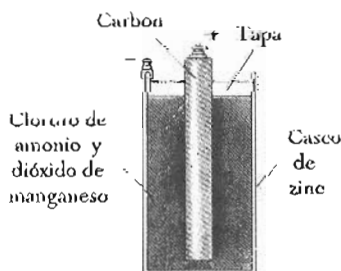


Figura 27.2 Vista de la sección transversal de una pila seca.

iones de zinc que salen del casco, más electrones de zinc se acumulan, dejando el casco de zinc con una carga neta negativa.

Cuando un ion de cloro queda libre de la molécula de cloruro de amonio, la porción remanente de la molécula queda simplemente ionizada. Este ion cargado positivamente se neutraliza por el dióxido de manganeso, el cual proporciona los electrones necesarios. Como resultado de esto, la barra de carbón rodeada por su capa de dióxido de manganeso queda con una carga neta positiva.

Estas reacciones químicas y la separación de las cargas no es ilimitada. El casco de zinc concentrará tal cantidad de carga que los iones de zinc no podrán escapar. Una saturación de carga similar ocurre en la barra de carbón.

## 27.2 CORRIENTE ELÉCTRICA

Siempre que cargas eléctricas del mismo signo están en movimiento, se dice que existe una *corriente*. Para definir la corriente con más precisión, supongamos que las cargas se mueven perpendicularmente a un área superficial  $A$  como en la figura 27.3. Por ejemplo, esta área podría ser la sección transversal de un alambre. La *corriente es la rapidez con la cual fluye la carga a través de esta superficie*. Si  $\Delta Q$  es la cantidad de carga que pasa a través de esta área en un tiempo  $\Delta t$ , la *corriente promedio*,  $I_p$ , es igual a la razón de la carga en el intervalo de tiempo:

$$I_p = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (27.1)$$

Si la rapidez con que fluye la carga varía con el tiempo, la corriente también varía en el tiempo y se define la **corriente instantánea**,  $I$ , como el límite diferencial de la expresión anterior:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (27.2)$$

La unidad de corriente en el SI es el **ampere** (A), donde

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} \quad (27.3)$$

Es decir, 1 A de corriente equivale a que 1 coulomb de carga que pase a través de la superficie en 1 s. En la práctica, con frecuencia se utilizan unidades más pequeñas de corriente, tales como el miliampere ( $1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$ ) y el microampere ( $1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$ ).

Cuando las cargas fluyen a través de la superficie en la figura 27.3, pueden ser positivas, negativas o ambas. *Por convención se escoge la dirección de la corriente como la dirección en la cual fluyen las cargas positivas*. En un conductor como el cobre, la corriente se debe al movimiento de los electrones cargados negativamente. Por lo tanto, cuando hablamos de corriente en un conductor ordinario, como el alambre de cobre, *la dirección de la corriente será opuesta a la dirección del flujo de electrones*. Por otro lado, si uno considera un haz de protones cargados positivamente en un acelerador, la corriente está en la dirección del movimiento de los protones. En algunos casos, la corriente es el resultado del flujo de ambas cargas positiva y negativa. Esto ocurre, por ejemplo, en los semiconductores y electrólitos. Es común referirse al movimiento de cargas (positivas o negativas) como el movimiento de *portadores de carga*. Por ejemplo, los portadores de carga en un metal son electrones.

Resulta instructivo relacionar la corriente con el movimiento de partículas cargadas. Para mostrar este punto, consideremos la corriente en un conductor de

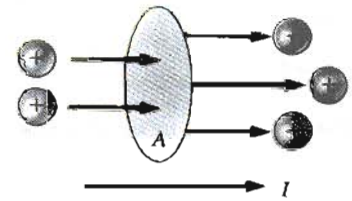


Figura 27.3 Cargas en movimiento a través de un área  $A$ . La rapidez del flujo de carga a través del área se define como la corriente  $I$ . La dirección de la corriente es en la dirección en la cual fluirían las cargas positivas.

### Corriente eléctrica

### Dirección de la corriente

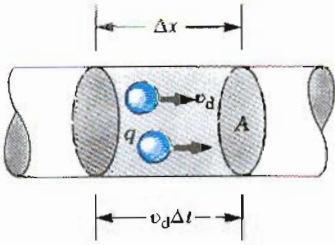


Figura 27.4 Sección de un conductor uniforme con área de sección transversal  $A$ . Los portadores de carga se mueven con una velocidad  $v_d$ , y la distancia que recorren en un tiempo  $\Delta t$  está dado por  $\Delta x = v_d \Delta t$ . El número de portadores de carga móviles en una sección de longitud  $\Delta x$  está dado por  $nA\Delta x$  donde  $n$  es el número de portadores móviles por unidad de volumen.

Corriente en un conductor

área en su sección transversal  $A$  (Fig. 27.4). El volumen de un elemento del conductor de longitud  $\Delta x$  (sección sombreada en la figura 27.4) es  $A \Delta x$ . Si  $n$  representa el número de portadores de carga por unidad de volumen, entonces el número de portadores de carga en el elemento de volumen está dado por  $nA \Delta x$ . Por lo tanto, la carga  $\Delta Q$  en este elemento está dada por

$$\Delta Q = \text{número de cargas} \times \text{carga por partícula} = (nA \Delta x)q$$

donde  $q$  es la carga de cada partícula. Si los portadores de carga se mueven con una velocidad  $v_d$ , la distancia que se mueven en un tiempo  $\Delta t$  está dada por  $\Delta x = v_d \Delta t$ . Por lo tanto, podemos escribir  $\Delta Q$  en la forma

$$\Delta Q = (nAv_d \Delta t)q$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación por  $\Delta t$ , se ve que la corriente en el conductor está dada por

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d A \tag{27.4}$$

La velocidad de los portadores de carga,  $v_d$ , es la velocidad promedio y se llama **velocidad de deriva**. Para entender el significado de la velocidad de deriva, consideremos un conductor en el cual los portadores de carga sean los electrones libres. En un conductor aislado, estos electrones estarán moviéndose en forma aleatoria como las moléculas de un **gas**. Cuando una diferencia de potencial es aplicada a través del conductor (digamos, por medio de una batería), un campo eléctrico se forma en el conductor, el cual genera una fuerza eléctrica sobre los electrones y por tanto una corriente. En realidad, los electrones no se mueven en simples líneas rectas a lo largo del conductor. Constantemente están chocando con los átomos del metal, lo cual ocasiona un movimiento complicado de zigzag (Fig. 27.5). La energía transferida de los electrones a los átomos del metal ocasiona un aumento en la energía vibracional **de los átomos** y en consecuencia un aumento en la temperatura del conductor. **Sin embargo**, a pesar de las colisiones, los electrones se mueven lentamente a lo largo del conductor (en dirección opuesta al campo  $E$ ) con una velocidad promedio llamada velocidad de deriva,  $v_d$ . El campo hace trabajo sobre los electrones que exceden la pérdida promedio debida a las colisiones, con lo cual resulta una corriente neta. Como se verá en el siguiente ejemplo, la velocidad de deriva es **mucho** menor que la velocidad promedio entre colisiones. Se discutirá este modelo con más detalle en la sección 27.6. Uno puede pensar que las colisiones de los electrones en el interior del conductor vienen a ser fricción efectiva interna (o fuerza de arrastre), análoga a la experimentada por las moléculas de un líquido que fluye a través de una tubería llena de virutas de acero.

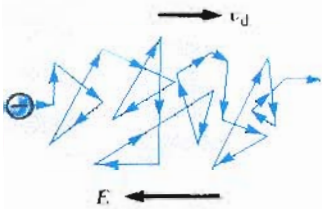


Figura 27.5 Representación esquemática del movimiento en zigzag de los portadores de carga en un conductor. El cambio en la dirección se debe a las colisiones con los átomos en el conductor. Nótese que el movimiento neto de los electrones es opuesto a la dirección del campo. Las trayectorias zig-zag en realidad son segmentos parabólicos.

La cita siguiente es una descripción interesante y graciosa hecha por W.F.G. Swann, de la conducción electrónica en los cables telefónicos.<sup>1</sup>

Piénsese en los cables que conducen la corriente telefónica en forma de electrones. En ausencia de corriente los electrones se están moviendo en todas direcciones. Se mueven tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, y la nada que se tiene está compuesta de dos mitades iguales y opuestas, alrededor de un millón de millones de amperes por centímetro cuadrado en una dirección y un millón de millones de amperes por centímetro cuadrado en la dirección opuesta. La corriente telefónica constituye un trastorno en un centésimo de millonésima de ampere por centímetro cuadra-

<sup>1</sup> W.F.G. Swann, *Physic Today*, junio 1951, p. 9.

do, o sea alrededor de una parte en cien trillones. Entonces, si se equivoca una parte en mil de esta parte en cien trillones, se llama a la compañía telefónica y nos quejamos de que la calidad del sonido es mala.

### EJEMPLO 27.1 Velocidad de deriva en un alambre de cobre

Un alambre de cobre de área en la sección transversal de  $3 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  lleva una corriente de 10 A. Encuéntrese la velocidad de deriva de los electrones en el alambre. La densidad del cobre es  $8.95 \text{ g/cm}^3$ .

**Solución** Con base en la tabla periódica de los elementos, se encuentra que el peso atómico del cobre es  $63.5 \text{ g/mol}$ . Recuerde que una mol de cualquier sustancia contiene  $6.02 \times 10^{23}$  átomos, el número de Avogadro de átomos. Conociendo la densidad del cobre es posible calcular el volumen ocupado por  $63.5 \text{ g}$  de cobre:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{63.5 \text{ g}}{8.95 \text{ g/cm}^3} = 7.09 \text{ cm}^3$$

Si suponemos que cada átomo de cobre contribuye con un electrón libre en el material, se tiene

$$\begin{aligned} n &= \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ electrones}}{7.09 \text{ cm}^3} \\ &= 8.48 \times 10^{22} \text{ electrones/cm}^3 \\ &= \left( 8.48 \times 10^{22} \frac{\text{electrones}}{\text{cm}^3} \right) \left( 10^6 \frac{\text{cm}^3}{\text{m}^3} \right) \\ &= 8.48 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3 \end{aligned}$$

De la ecuación 27.4, se encuentra que la velocidad de deriva es

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{I}{nqA} \\ &= \frac{10 \text{ C/s}}{(8.48 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(3 \times 10^{-6} \text{ m}^2)} \\ &= 2.46 \times 10^{-4} \text{ m/s} \end{aligned}$$

El ejemplo 27.1 demuestra que las velocidades típicas de deriva son muy pequeñas. De hecho, la velocidad de deriva es mucho menor que la velocidad promedio entre colisiones. Por ejemplo, los electrones que se mueven a esta velocidad tardarían juntos 68 min en recorrer 1 m! En vista de estas bajas velocidades, se podría preguntar por qué las luces se encienden instantáneamente al hacer funcionar el apagador. Esta discrepancia aparente se resuelve si se observa el flujo del agua a través de un tubo. Si una gota de agua es forzada en el extremo de un tubo lleno de agua, otra gota debe salir por el otro extremo del tubo. Aunque gotas individuales pueden tardar mucho tiempo en recorrer todo el tubo, un flujo iniciado en un extremo produce un flujo similar en otro extremo y muy rápidamente. En un conductor, al campo eléctrico que mueve a los electrones libres, viaja por el conductor con una rapidez próxima a la luz. Así cuando se acciona el encendedor de la luz, el mensaje para que los electrones empiecen a moverse por el alambre (el campo eléctrico) les llega con una rapidez aproximada de  $10^8 \text{ m/s}$ .

## 27.3 RESISTENCIA Y LA LEY DE OHM

Anteriormente, se encontró que no se puede tener un campo eléctrico en el interior de un conductor. Sin embargo, esta afirmación es *sólo* válida si el conductor está en equilibrio estático. El propósito de esta sección es describir qué sucede cuando las cargas están en movimiento en el conductor.

Las cargas se mueven en un conductor para producir una corriente con la acción de un campo eléctrico que está en el interior del propio conductor. En este caso, puede existir un campo eléctrico en el interior del conductor puesto que se trata de cargas en movimiento, un caso *no electrostático*. Esto contrasta con la situación en la que el conductor está en *equilibrio electrostático* (en el que las cargas están en reposo) donde no puede existir campo eléctrico en el interior del conductor.

Considérese un conductor con área de sección transversal  $A$  que lleva una corriente  $I$ . La **densidad de corriente**  $J$  en el conductor se define como la corriente por unidad de área. Como  $I = nqv_dA$ , la densidad de corriente está dada por

### Densidad de corriente

$$J \equiv \frac{I}{A} = nqv_d \quad (27.5)$$

donde  $J$  tiene unidades en el SI de  $A/m^2$ . Esta expresión es válida sólo si la densidad de corriente es uniforme y la superficie es perpendicular a la dirección de la corriente. En general la densidad de corriente es una *cantidad vectorial*. Esto es,

$$J = nqv_d \quad (27.6)$$

Con base en la definición, se ve también que la densidad de corriente, como la corriente, está en la dirección del movimiento de las cargas para los portadores de carga positivos y en dirección opuesta a la del movimiento de los portadores de carga negativos.

Una densidad de corriente  $J$  y un campo eléctrico  $E$  se establecen en un conductor cuando una diferencia de potencial se mantiene a través del conductor. Si la diferencia de potencial es constante, la corriente en el conductor será también constante. Con mucha frecuencia, la densidad de corriente en un conductor es proporcional al campo eléctrico en el conductor. Es decir,

### Ley de Ohm

$$J = \sigma E \quad (27.7)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\sigma$  se llama la **conductividad** del conductor.<sup>2</sup> Los materiales cuyo comportamiento se ajusta a la ecuación 27.7 se dice que siguen la ley de Ohm, nombre que se puso en honor a George Simon Ohm (1787-1854). En forma más específica:

La **ley de Ohm** afirma que para muchos materiales (incluyendo la mayor parte de los metales), la razón de la densidad de corriente al campo eléctrico es una constante,  $\sigma$ , la cual es independiente del campo eléctrico que produce la corriente.

Materiales que obedecen la ley de Ohm, y por tanto demuestran este comportamiento lineal entre  $E$  y  $J$ , se dice que son *óhmicos*. El comportamiento eléctrico de los muchos materiales es casi lineal con *muy pequeños cambios* en la corriente. Experimentalmente se encuentra que no todos los materiales tienen esta propiedad. Materiales que no obedecen la ley de Ohm se dicen ser *no óhmicos*. La ley de Ohm *no* es una ley fundamental de la naturaleza, sino una relación empírica válida sólo para ciertos materiales.

Una forma de la ley de Ohm que se utiliza de modo más directo en las aplicaciones prácticas puede ser obtenida al considerar un segmento de un alambre recto de área en la sección transversal  $A$  y longitud  $\ell$ , como en la figura 27.6. Una diferencia de potencial  $V_a - V_b$  mantenida a través del alambre, crea un campo eléctrico en el alambre y una corriente. Si se supone que el campo eléctrico en el alambre es uniforme, la diferencia de potencial  $V = V_a - V_b$  se relaciona con el campo eléctrico a través de la relación<sup>3</sup>

$$V = E\ell$$

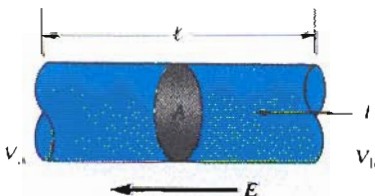


Figura 27.6 Conductor uniforme de longitud  $\ell$  y área de sección transversal  $A$ . Una diferencia de potencial  $V_b - V_a$  se mantiene a través del conductor creando un campo eléctrico  $E$  en el conductor y este campo produce una corriente  $I$ .

<sup>2</sup> No confunda la conductividad  $\sigma$  con la densidad de carga superficial, aun cuando se use el mismo símbolo.

<sup>3</sup> Este resultado se encuentra de la definición de diferencia de potencial:

$$V_b - V_a = - \int_a^b E \cdot ds = E \int_0^\ell dx = E\ell$$



Por lo tanto, se puede expresar la magnitud de la densidad de corriente en el alambre como

$$J = \sigma E = \sigma \frac{V}{\ell}$$

Como  $J = I/A$ , la diferencia de potencial puede escribirse

$$V = \frac{\ell}{\sigma} J = \left( \frac{\ell}{\sigma A} \right) I$$

La cantidad  $\ell/\sigma A$  se llama la **resistencia**  $R$  del conductor:

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} = \frac{V}{I} \quad (27.8)$$

De este resultado se ve que la resistencia tiene unidades en el SI de volts por ampere. Un volt por un ampere se define como un ohm ( $\Omega$ ):

$$1 \Omega \equiv 1 \text{ V/A}$$

Es decir, si una diferencia de potencial de 1 volt a través de un conductor produce una corriente de 1 A, la resistencia del conductor es 1  $\Omega$ . Por ejemplo, si un aparato eléctrico conectado a 120 V lleva corriente de 6 A, su resistencia es de 20  $\Omega$ .

El inverso de la conductividad de un material se le llama **resistividad**  $\rho$ :

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} \quad (27.9)$$

Utilizando esta definición y la ecuación 27.8, la resistencia puede expresarse como

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (27.10)$$

donde  $\rho$  tiene las unidades ohm-metro ( $\Omega \cdot \text{m}$ ). (El símbolo  $\rho$  para la resistividad no debe confundirse con el mismo símbolo utilizado en el texto para la densidad de masa o la densidad de carga.) Todos los materiales óhmicos tienen una resistividad característica, un parámetro que depende de las propiedades del material y de la temperatura. Por otro lado, se puede ver de la ecuación 27.10, que la resistencia de una sustancia depende de su geometría así como de la resistividad de la sustancia. Los buenos conductores eléctricos tienen muy baja resistividad (o alta conductividad), y un buen aislante tiene alta resistividad (baja conductividad). La tabla 27.1 da las resistividades de varios materiales a 20°C.

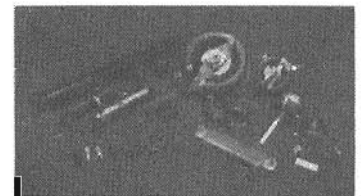
La ecuación 27.10 muestra que la resistencia de un conductor cilíndrico dado es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al área de su sección transversal. Si la longitud del alambre se duplica, su resistencia se duplica. Además, si el área de su sección transversal se duplica, su resistencia decrece a la mitad. La situación es análoga a la del flujo de líquido a través de un tubo. Cuando la longitud del tubo se incrementa, la resistencia al flujo aumenta. Si el área de su sección transversal se incrementa, el tubo puede transportar más fácil el líquido.

Todos los aparatos eléctricos, como el tostador, hornos y focos tienen una resistencia determinada. La mayor parte de circuitos eléctricos utilizan dispositivos llamados **resistores** para controlar el nivel de la corriente en varias partes del circuito. Dos tipos comunes de resistores son el resistor "compuesto" que contiene

### Resistencia de un conductor

### Resistividad

### Resistencia de un conductor uniforme



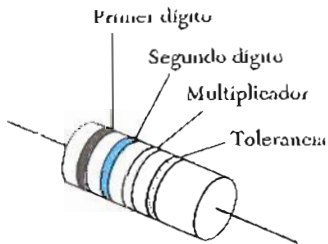
Un grupo de resistores usados en varias aplicaciones de circuitos electrónicos. (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

**TABLA 27.1 Resistividades y coeficientes de temperatura para varios materiales**

Material	Resistividad <sup>a</sup> ( $\Omega \cdot m$ )	Coefficiente de temperatura $\alpha$ [ $^{\circ}C^{-1}$ ]
Plata	$1.59 \times 10^{-8}$	$3.8 \times 10^{-3}$
Cobre	$1.7 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Oro	$2.44 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2.82 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$5.6 \times 10^{-8}$	$4.5 \times 10^{-3}$
Hierro	$10 \times 10^{-8}$	$5.0 \times 10^{-3}$
Platino	$11 \times 10^{-8}$	$3.92 \times 10^{-3}$
Plomo	$22 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Nicromo <sup>b</sup>	$1.50 \times 10^{-6}$	$0.4 \times 10^{-3}$
Carbón	$3.5 \times 10^{-5}$	$-0.5 \times 10^{-3}$
Germanio	0.46	$-48 \times 10^{-3}$
Silicio	640	$-75 \times 10^{-3}$
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Caucho duro	$\approx 10^{13}$	
Azufre	$10^{15}$	
Cuarzo (fundido)	$75 \times 10^{16}$	

<sup>a</sup> Todos los valores están a 20°C.

<sup>b</sup> Aleación de níquel-cromo comúnmente utilizado en elementos calefactores.



**Figura 27.7** Las bandas de colores en un resistor representan un código que representa el valor de la resistencia. Los primeros dos colores dan los dos primeros dígitos del valor de la resistencia el tercer color es el exponente en potencias de diez de multiplicar el valor de la resistencia. El último color es la tolerancia del valor de la resistencia. Por ejemplo, si los colores son naranja, azul, amarillo y oro, el valor de la resistencia es  $36 \times 10^4 \Omega$  o bien 360 K $\Omega$ , con una tolerancia de 18 K $\Omega$  (5%).

carbón que es un semiconductor, y el resistor de “alambre enrollado” que consiste en una bobina de alambre. Los conductores normalmente se codifican con colores para dar su valor en ohms, como se muestra en la figura 27.7. La tabla 27.2 permite trasladar del código de colores al valor específico de la resistencia.

Materiales óhmicos, como el cobre, tienen una relación lineal del voltaje y la corriente sobre un amplio espectro de valores de voltaje aplicado (Fig. 27.8a). La pendiente de la curva  $I$  contra  $V$  en la región lineal suministra un valor de  $R$ . Materiales no óhmicos no tienen la linealidad en la relación corriente-voltaje. Un dispositivo semiconductor común que no tiene linealidad en  $I$  contra  $V$  es característico del diodo (Fig. 27.8b). La resistencia efectiva de este dispositivo (inversamente proporcional a la pendiente en la curva  $I$  contra  $V$ ) es pequeña para corrientes en una dirección ( $V$  positivo) y grande para corrientes en dirección inversa ( $V$  negativo). De hecho, los dispositivos electrónicos, como el transistor,

**TABLA 27.2 Código de colores para resistores**

Color	Número	Multiplicador	Tolerancia (%)
Negro	0	1	
Café	1	$10^1$	
Rojo	2	$10^2$	
Naranja	3	$10^3$	
Amarillo	4	$10^4$	
Verde	5	$10^5$	
Azul	6	$10^6$	
Violeta	7	$10^7$	
Gris	8	$10^8$	
Blanco	9	$10^9$	
Oro		$10^{-1}$	5%
Plata		$10^{-2}$	10%
Sin color			20%

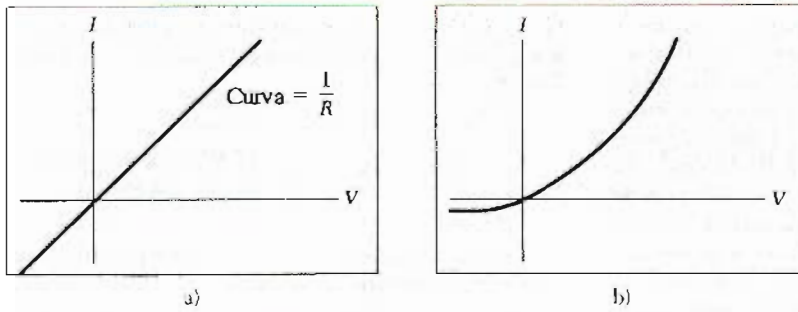


Figura 27.8 a) Curva de corriente-voltaje para un material ohmico. La curva es lineal y la pendiente proporciona la resistencia del conductor. b) Curva no lineal de corriente voltaje para un diodo semiconductor. Este dispositivo no obedece la ley de Ohm.

tienen relaciones de voltaje corriente no lineales; sus propiedades de operación dependen en particular de la forma que violen la ley de Ohm.

### EJEMPLO 27.2 La resistencia de un conductor

Calcúlese la resistencia de una pieza de aluminio de 10 cm de longitud que tiene un área de sección transversal de  $10^{-4} \text{ m}^2$ . Repítase el cálculo para una pieza de vidrio de resistividad  $10^{10} \Omega \cdot \text{m}$ .

**Solución** A partir de la ecuación 27.10 y de la tabla 27.1, se puede calcular la resistencia de la barra de aluminio:

$$R = \rho \frac{L}{A} = (2.82 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) \left( \frac{0.1 \text{ m}}{10^{-4} \text{ m}^2} \right) = 2.82 \times 10^{-5} \Omega$$

Del mismo modo, para el vidrio se encuentra que

$$R = \rho \frac{L}{A} = (10^{10} \Omega \cdot \text{m}) \left( \frac{0.1 \text{ m}}{10^{-4} \text{ m}^2} \right) = 10^{13} \Omega$$

Como era de esperarse, el aluminio tiene una resistencia mucho menor que el vidrio. Por esta razón el aluminio es buen conductor y el vidrio es un muy mal conductor.

### EJEMPLO 27.3 La resistencia de un alambre de nicromo

a) Calcúlese la resistencia por unidad de longitud de un alambre de nicromo calibre 22 de radio 0.321 mm.

**Solución** El área de la sección transversal de este alambre es

$$A = \pi r^2 = \pi (0.321 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 3.24 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

La resistividad del nicromo es  $1.5 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$  (Tabla 27.1). Por lo tanto, utilizando la ecuación 27.10 se encuentra que la resistencia por unidad de longitud es

$$\frac{R}{\ell} = \frac{\rho}{A} = \frac{1.5 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}}{3.24 \times 10^{-7} \text{ m}^2} = 4.6 \Omega/\text{m}$$

b) Si una diferencia de potencial de 10 V se mantiene a través de un metro de longitud de alambre de nicromo, ¿cuál es la corriente en el alambre?

**Solución** Como 1 m de longitud de este alambre tiene una resistencia de  $4.6 \Omega$ , de la ley de Ohm se obtiene

$$I = \frac{V}{R} = \frac{10 \text{ V}}{4.6 \Omega} = 2.2 \text{ A}$$

Nótese que la resistencia del alambre de nicromo es unas 100 veces mayor que la del alambre de cobre. Por lo tanto, un alambre de cobre del mismo radio debería tener una resistencia por unidad de longitud de sólo  $0.052 \Omega/\text{m}$ . Un alambre de cobre de 1 m de longitud del mismo radio llevaría la misma corriente (2.2 A) con un voltaje aplicado de sólo 0.11 V.

Debido a su alta resistividad y a su resistencia a la oxidación, el alambre de nicromo frecuentemente se utiliza como elemento calentador en los tostadores, hornos y calentadores eléctricos.

**Ejercicio 1** ¿Cuál es la resistencia de un alambre de nicromo calibre 22 de 6 m de longitud? ¿Cuánta corriente llevará cuando se conecta a una fuente de 120 V?

**Respuesta**  $28 \Omega$ , 4.3 A.

**Ejercicio 2** Calcúlese la densidad de corriente y el campo eléctrico en el alambre suponiendo que lleva una corriente de 2.2 A.

**Respuesta**  $6.7 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ , 10 N/C.

### EJEMPLO 27.4 Resistencia de un tubo coaxial □

El espacio entre un par de tubos coaxiales se llena completamente con silicón como en la figura 27.9a. El radio interior del tubo es  $a = 0.500 \text{ cm}$ , el radio exterior  $b = 1.75 \text{ cm}$  y su longitud  $L = 15.0 \text{ cm}$ . Calcúlese la resistencia total del silicón cuando es medida entre el tubo interior y el exterior.

**Solución** La resistividad del cobre es pequeña comparada con la del silicón, así que su resistencia puede ser despreciada. En este tipo de problemas, debe dividirse el conductor en pequeños elementos de espesor infinitesimal sobre el cual el área pueda ser considerada constante. Podemos empezar utilizando la forma diferencial de la ecuación 27.10, la cual es  $dR = \rho dl/A$ , donde  $dR$  es la resistencia de la sección del conductor de espesor  $dl$  y de área  $A$ . En este ejemplo, se tomará como elemento un cascarón de espesor  $dr$  y longitud  $L$  como en la figura 27.9b. Cualquier corriente que pase entre los tubos interior y exterior debe pasar radialmente a través de dicho elemento, y el área a través de la cual pasa es  $A = 2\pi rL$ . (Ésta será el área de la superficie de nuestro cascarón cilíndrico despreciando el área de sus extremos.) Por lo tanto, puede escribir la resistencia para el cascarón cilíndrico como

$$dR = \frac{\rho}{2\pi rL} dr$$

Como se desea conocer la resistencia total del silicón, debe integrarse esta expresión sobre  $dr$  desde  $r = a$  hasta  $r = b$ . Esto da

$$R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Si sustituye los valores dados y se utiliza  $\rho = 640 \Omega \cdot m$  para el silicón, se obtiene

$$R = \frac{640 \Omega \cdot m}{2\pi(0.150 m)} \ln\left(\frac{1.75 \text{ cm}}{0.500 \text{ cm}}\right) = 851 \Omega$$

**Ejercicio 3** Si una diferencia de potencial de 12.0 V se aplica entre los tubos de cobre interior y exterior, calcúlese la corriente que pasa a través de ellos.

**Respuesta** 14.1 mA.

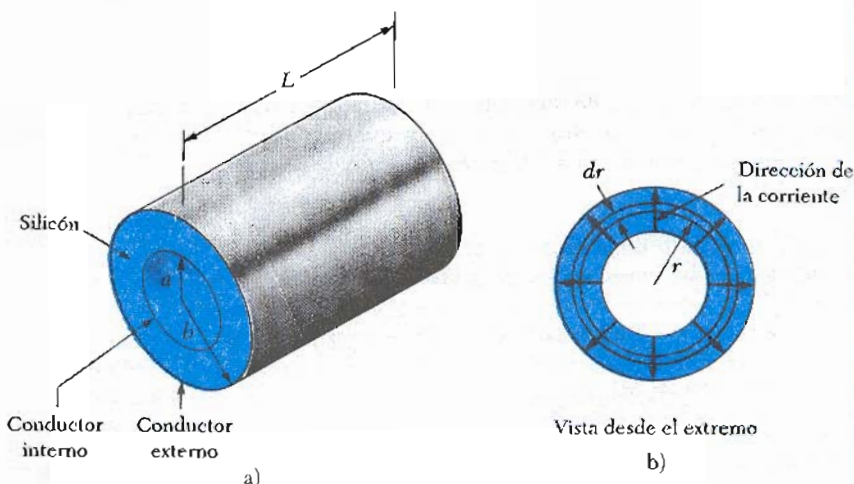


Figura 27.9 (Ejemplo 27.4.)

### 27.4 RESISTIVIDAD DE CONDUCTORES DIFERENTES

La resistividad depende de cierto número de factores, uno de los cuales es la temperatura. Para la mayor parte de los metales, la resistividad se incrementa al aumentar la temperatura. La resistividad de un conductor varía casi lineal con la temperatura sobre un limitado rango de temperaturas de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \tag{27.11}$$

donde  $\rho$  es la resistividad a alguna temperatura  $T$  (en  $^{\circ}C$ ),  $\rho_0$  es la resistividad a una temperatura de referencia  $T_0$ . (usualmente se toma como de  $20^{\circ}C$ ) y  $\alpha$  se llama **coeficiente de temperatura de la resistividad**. De la ecuación 27.11 se ve que el coeficiente de temperatura de la resistividad puede también ser expresado como

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \tag{27.12}$$

donde  $\Delta\rho = \rho - \rho_0$  es el cambio en la resistividad en un intervalo de temperatura  $\Delta T = T - T_0$ .

Variación de la  $\rho$  con la temperatura

Coeficiente de temperatura de la resistividad

La resistividad y el coeficiente de temperatura para varios materiales se dan en la tabla 27.1. Nótese la enorme gama de resistividades, desde valores muy pequeños para buenos conductores, como el cobre y la plata, hasta valores muy grandes para buenos aisladores, como el vidrio y el caucho. Un conductor ideal o perfecto tendría resistividad cero, y un aislante ideal tendría resistividad infinita.

Como la resistencia de un conductor es proporcional a la resistividad de acuerdo con la ecuación 27.10, la variación de resistencia con la temperatura puede escribirse como

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (27.13)$$

Medidas muy precisas de temperaturas suelen realizarse utilizando esta propiedad, como se mostrará en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 27.5 Termómetro de resistencia de platino

Un termómetro de resistencia hecho de platino tiene una resistencia de  $50 \, \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$ . Cuando lo sumergimos en un recipiente que tiene indio en punto de fusión, su resistencia aumenta hasta  $76.8 \, \Omega$ . Con esta información, encuentre el punto de fusión del indio. Para el platino,  $\alpha = 3.92 \times 10^{-3} \, (\text{C}^\circ)^{-1}$ .

**Solución** Utilizando la ecuación 27.13 y despejando  $\Delta T$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = \frac{76.8 \, \Omega - 50.0 \, \Omega}{[3.92 \times 10^{-3} \, (\text{C}^\circ)^{-1}](50.0 \, \Omega)} \\ &= 137 \, \text{C}^\circ \end{aligned}$$

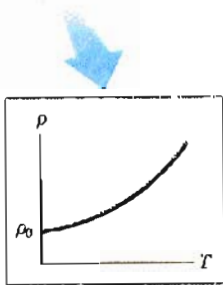
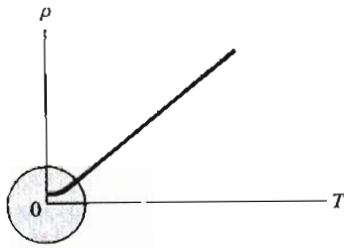
Como  $\Delta T = T - T_0$  y  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , se encuentra que  $T = 157^\circ\text{C}$ .

Como se mencionó antes, algunos materiales óhmicos tienen resistividades que aumentan linealmente con el aumento en la temperatura, como se muestra en la figura 27.10. Sin embargo, en realidad siempre existe una región no lineal a temperaturas muy bajas, y por lo general la resistividad tiende a un valor finito cerca del cero absoluto (véase la ampliación insertada en la figura 27.10). Esta resistividad residual cerca del cero absoluto es debida principalmente a las colisiones de electrones con las impurezas e imperfecciones en el metal. En contraste, la resistividad a altas temperaturas (región lineal) es dominada por colisiones de electrones con los átomos del metal. Se verá una descripción más detallada de este proceso en la sección 27.6.

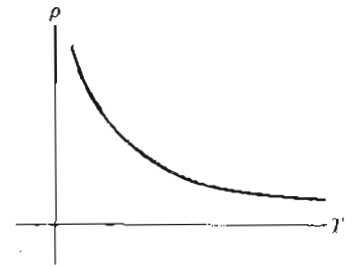
Semiconductores como el silicio y el germanio tienen valores intermedios de resistividad. La resistividad de los semiconductores generalmente disminuye con el aumento de la temperatura, correspondiéndoles un coeficiente de temperatura de resistividad negativo (Fig. 27.11). Esto se debe al incremento de portadores de carga a altas temperaturas. Como los portadores de carga en un semiconductor están con frecuencia asociados con los átomos de impurezas, la resistividad es muy sensible al tipo y la concentración de tales impurezas. El **termistor** es un termómetro de semiconductor que hace uso de sus grandes cambios en su resistividad con la temperatura. Se retomará el estudio de los semiconductores en una versión extensa en este texto, en el capítulo 43.

## 27.5 SUPERCONDUCTORES

Existe una clase de metales y compuestos cuya resistencia virtualmente va hasta *cero* al llegar a cierta temperatura,  $T_c$ , llamada temperatura crítica. A éstos



**Figura 27.10** Resistividad contra temperatura para un metal normal, como el cobre. La curva es lineal en un ancho margen de temperaturas, así que aumentará  $\rho$  al aumentar la temperatura. Cuando la temperatura tiende al cero absoluto (amplificación) la resistividad tiende a un valor finito  $\rho_0$ .



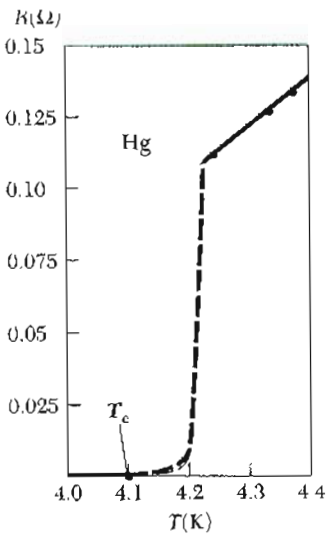
**Figura 27.11** Resistividad contra temperatura para un semiconductor puro como el silicio o el germanio.

materiales se les conoce como **superconductores**. La gráfica de resistencia-temperatura para un superconductor sigue la de un metal normal por arriba de  $T_c$  (Fig. 27.12). Cuando la temperatura es  $T_c$  o menor, la resistividad cae súbitamente hasta cero. Este fenómeno fue descubierto en 1911 por el físico alemán H. Kamerlingh-Onnes cuando trabajaba con mercurio, el cual es superconductor por debajo de 4.2 K. Medidas recientes han demostrado que la resistividad de un superconductor por debajo de la  $T_c$  son menores que  $4 \times 10^{-25} \Omega \cdot m$ , lo cual es unas  $10^{17}$  veces más pequeña que la resistividad del cobre y puede ser considerada como cero en la práctica.

Hoy en día existen miles de superconductores conocidos. Metales comunes como aluminio, estaño, plomo, zinc e indio son superconductores. La tabla 27.3 lista las temperaturas críticas de algunos superconductores. El valor de  $T_c$  es sensible a la composición química, a la presión y a la estructura cristalina. Es interesante hacer notar que el cobre, la plata y el oro, los cuales son excelentes conductores, no muestran superconductividad.

Uno de los hechos que verdaderamente resalta de los superconductores es que cuando una corriente se coloca en ellos, permanecerá *sin aplicarle voltaje* (ya que  $R = 0$ ). En efecto, se ha podido observar que hay corrientes estacionarias que persisten en una espira superconductora por varios años sin que aparentemente decrezcan!

Uno de los más importantes desarrollos en física que ha creado mucha expectación en la comunidad científica ha sido el descubrimiento de los superconductores basados en óxidos de cobre de altas temperatura. La conmoción empieza en 1986 con la publicación de George Bednorz y K. Alex Müller, dos científicos que trabajan para el IBM Zurich Research Laboratory en Suiza, quienes reportaron evidencias de superconductividad a temperaturas cercanas a 30 K en un óxido de bario, lantano y cobre. Bednorz y Müller recibieron el Premio Nobel en 1987 en reconocimiento a su importante descubrimiento. Rápido y en corto plazo, una nueva familia de compuestos fue abierta para la investigación, y la actividad experimental en el campo de superconductores se realiza vigorosamente. A principios de 1987, grupos de la Universidad de Alabama en Huntsville y de la Universidad de Houston anuncian el descubrimiento de superconductividad alrededor de 92 K en óxido de ytrio, bario y cobre ( $YBa_2Cu_3O_7$ ). Más tarde, en 1987, equipos de científicos de Japón y de Estados Unidos informan superconductividad a 105 K en óxidos de bismuto, estroncio, calcio y cobre. En fechas más recientes, científicos han reportado superconductividad alta a 125 K en óxidos que



**Figura 27.12** Resistividad contra temperatura para el mercurio. La gráfica sigue el comportamiento de un metal normal sobre la temperatura crítica  $T_c$ . La resistencia cae a cero a la temperatura crítica, la cual para el mercurio es de 4.15 K.

contienen talio. Hasta este momento, no existe regla alguna que impida tener superconductividad a temperatura ambiente, y la investigación en nuevos materiales superconductores continúa. Estos desarrollos son muy importantes y alentadores tanto por motivos científicos como para la aplicación práctica ya que cada vez se eleva más la temperatura crítica.

Una importante y útil aplicación de la superconductividad ha sido la construcción de imanes superconductores en los cuales la intensidad del campo magnético es diez veces mayor que la correspondiente a los mejores electroimanes normales. Dichos imanes se están considerando como un medio de almacenar energía. La idea de utilizar superconductores en líneas de potencia para la transmisión de energía eléctrica con excelente rendimiento ha sido también recientemente considerada. Se han construido dispositivos electrónicos modernos que constan de dos películas delgadas superconductoras separadas por un aislante delgado. Estos dispositivos se utilizan en los magnetómetros (aparato para medir un campo eléctrico) y en varios aparatos de microondas.

En el capítulo 44 de la versión ampliada de este texto se retomará el estudio de la superconductividad para profundizar más. Este material también se encuentra como suplemento de la versión estándar de esta obra.

## 27.6 MODELO DE CONDUCCIÓN ELÉCTRICA

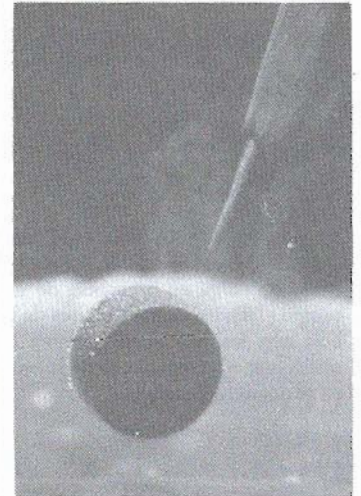
En esta sección se describirá un modelo clásico de la conducción eléctrica en metales. Este modelo lleva a la ley de Ohm y muestra que la resistividad puede ser relacionada con el movimiento de los electrones en el metal.

Considérese un conductor como un arreglo regular de átomos que contiene electrones libres (algunas veces llamados electrones de *conducción*). Estos electrones son libres de moverse a través del conductor y en número son aproximadamente igual al número de átomos. En ausencia de un campo eléctrico, los electrones se mueven en direcciones aleatorias a través del conductor con una velocidad promedio del orden de  $10^6$  m/s. (Estas velocidades se pueden calcular en forma apropiada sólo si se utiliza la descripción de la mecánica cuántica). La situación es similar al movimiento de las moléculas de un gas confinado en un envase. De hecho, algunos científicos se refieren a los electrones de conducción en un metal como un *gas de electrones*. Los electrones de conducción no son totalmente libres ya que están confinados al interior del conductor y sufren frecuentes colisiones con el arreglo de átomos. Estas colisiones son el mecanismo predominante para la resistencia de un metal a temperaturas normales. Obsérvese que no existe corriente a través de un conductor en ausencia de un campo eléctrico ya que la *velocidad promedio* de los electrones libres es cero. Es decir, en promedio, la misma cantidad de electrones se mueven en una dirección que en la dirección opuesta, y por lo tanto el flujo neto de carga es cero.

La situación se modifica cuando un campo eléctrico se aplica al metal. Además del movimiento aleatorio térmico descrito antes, los electrones libres derivan lentamente en dirección opuesta al campo eléctrico, con una velocidad de deriva  $v_d$ , la cual es mucho más pequeña (del orden de  $10^{-4}$  m/s) que la velocidad promedio entre colisiones (del orden de  $10^6$  m/s). La figura 27.13 da una descripción del movimiento de los electrones libres en un conductor. En ausencia de un campo eléctrico, no existe desplazamiento neto después de varias colisiones (Fig. 27.13a). Un campo eléctrico  $E$  modifica el movimiento aleatorio y ocasiona que los electrones deriven en dirección opuesta al campo  $E$  (Fig. 27.13b). La ligera curvatura de las trayectorias en la figura 27.13b es resultado de la aceleración de los electrones entre colisiones, causada por el campo aplicado. Un sistema mecánico análogo a esta situación es una bola rodando hacia abajo de un plano inclinado a través de un arreglo de clavos espaciados en el plano (Fig. 27.14). La bola representa un electrón de conducción, los clavos los defectos en el arreglo del

TABLA 27.3 Temperaturas críticas para varios semiconductores

Material	$T_c$ (K)
Nb <sub>3</sub> Ge	23.2
Nb <sub>3</sub> Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88
YBa <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7-<math>\delta</math></sub>	92
Bi-Sr-Ca-Cu-O	105
Tl-Ba-Ca-Cu-O	125



Fotografía de un pequeño imán permanente levitado arriba de un disco del superconductor YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7- $\delta$</sub> , el cual está en 77 K. (Cortesía de IBM Research)

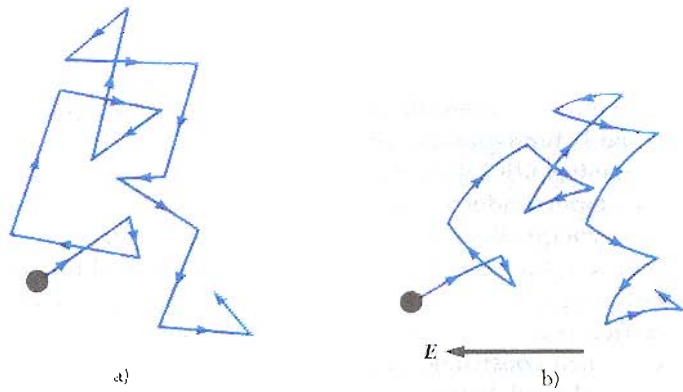


Figura 27.13 a) Diagrama esquemático del movimiento aleatorio de un portador de carga en un conductor en ausencia de un campo eléctrico. Obsérvese que la velocidad de deriva es cero. b) Movimiento de un portador de carga en un conductor en presencia de un campo eléctrico. Obsérvese que el movimiento aleatorio es modificado por el campo y el portador de carga tiene velocidad de deriva.

cristal, y la componente de la fuerza de gravedad a lo largo del plano representa la fuerza eléctrica  $eE$ .

En el modelo, se supone que el exceso de energía adquirido por los electrones en el campo eléctrico se pierde en el conductor en el proceso de las colisiones. La energía dada a los átomos en las colisiones aumenta su energía vibracional, ocasionando que el conductor se caliente. El modelo también supone que el movimiento de un electrón antes de la colisión es independiente de su movimiento después de la colisión.

Ahora se está en posición de obtener una expresión para la velocidad de deriva. Cuando una partícula cargada móvil de masa  $m$  y carga  $q$  está sujeta a un campo eléctrico  $E$ , experimenta una fuerza  $qE$ . Como  $F = ma$ , se concluye que la aceleración de la partícula está dada por

$$a = \frac{qE}{m} \tag{27.14}$$

Esta aceleración, que sólo actúa un corto tiempo entre las colisiones, permite al electrón que adquiera una pequeña velocidad de deriva. Si  $t$  es el tiempo que transcurre entre colisiones y  $v_0$  es la velocidad inicial, entonces la velocidad del electrón después de un tiempo  $t$  está dada por

$$v = v_0 + at = v_0 + \frac{qE}{m} t \tag{27.15}$$

Ahora tómese el valor promedio de  $v$  sobre todos los posibles valores de tiempos  $t$  y todos los valores de  $v_0$ . Si las velocidades iniciales se supone que están distribuidas aleatoriamente en el espacio, se observa que el valor promedio de  $v_0$  es cero. El término  $(qE/m)t$  es la velocidad añadida por el campo en el extremo de su viaje entre los átomos. Si el electrón comienza con velocidad cero, el valor promedio del segundo término de la ecuación 27.15 es  $(qE/m)\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo promedio entre colisiones. Como la velocidad promedio es igual a la velocidad de deriva,<sup>4</sup> se tiene

$$v_d = \frac{qE}{m} \tau \tag{27.16}$$

<sup>4</sup> Ya que las colisiones son procesos aleatorios, cada colisión es un evento independiente de lo que sucedió en el anterior. Esto es análogo al proceso aleatorio de tirar un dado. La probabilidad de sacar un número al tirar es independiente del resultado de la tirada anterior. En promedio se tiene una sexta parte de probabilidad de sacar un número al empezar o en cualquier tiempo.

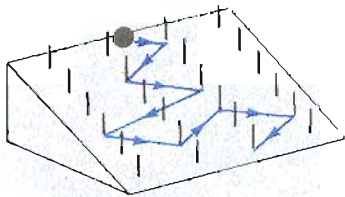


Figura 27.14 Sistema mecánico análogo al movimiento de los portadores de carga en presencia de un campo eléctrico. Las colisiones de la bola con los clavos representan la resistencia al movimiento de la bola en el plano inclinado.

Velocidad de deriva



Sustituyendo este resultado en la ecuación 27.6, se encuentra que la magnitud de la densidad de corriente está dada por

$$J = nqv_d = \frac{nq^2E}{m} \tau \quad (27.17)$$

Densidad de corriente

Comparando esta expresión con la ley de Ohm,  $J = \sigma E$ , se obtiene la siguiente relación para la conductividad y resistividad

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (27.18)$$

Conductividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{nq^2\tau} \quad (27.19)$$

Resistividad

El tiempo promedio entre colisiones está relacionado con la distancia promedio entre colisiones  $\ell$  (recorrido medio libre) y la velocidad térmica promedio  $\bar{v}$  a través de la expresión<sup>3</sup>

$$\tau = \frac{\ell}{\bar{v}} \quad (27.20)$$

De acuerdo con este modelo clásico, la conductividad y la resistividad no dependen del campo eléctrico. Este hecho es característico de los conductores que obedecen la ley de Ohm. El modelo muestra que la conductividad puede calcularse si se conocen la densidad de los portadores de carga, su carga y su masa, y el tiempo promedio entre las colisiones.

<sup>3</sup> Recuerde que la velocidad térmica es la velocidad que tiene una partícula en consecuencia de la temperatura de sus alrededores (Cap. 20).

### EJEMPLO 27.6 Colisión de electrones en el cobre

Utilizando los datos y los resultados del ejemplo 27.1 y el modelo clásico del electrón de conducción, estimese el tiempo promedio entre colisiones para electrones en cobre a 20°C.

**Solución** Con base en la ecuación 27.19 se ve que

$$\tau = \frac{m}{nq^2\rho}$$

donde  $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  para el cobre y la densidad de portadores de carga  $n = 8.48 \times 10^{28}$  electrones/ $\text{m}^3$  para el alambre descrito en el ejemplo 27.1. Sustituyendo estos valores dentro de la expresión anterior

$$\tau = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})}{(8.48 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2(1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2.5 \times 10^{-14} \text{ s}$$

b) Supóngase que la velocidad térmica media para los electrones en el cobre es  $1.6 \times 10^6$  m/s y usando el resultado del inciso a) calcúlese el recorrido medio libre para los electrones en el cobre.

$$\begin{aligned} \ell &= \bar{v}\tau = (1.6 \times 10^6 \text{ m/s})(2.5 \times 10^{-14} \text{ s}) \\ &= 4.0 \times 10^{-8} \text{ m} \end{aligned}$$

la cual es equivalente a 40 nm (comparada con los espacios atómicos que son del orden de 0.2 nm). Por lo tanto, aun cuando el tiempo entre colisiones es muy corto, los electrones viajan alrededor de 200 distancias atómicas antes de chocar con un átomo.

Aun cuando este modelo clásico de conducción es consecuente con la ley de Ohm, no es satisfactorio para explicar algunos importantes fenómenos. Por

ejemplo, cálculos clásicos para  $\bar{v}$  utilizando un modelo de gas ideal son unas 10 veces menores que los valores reales. Además, de acuerdo con las ecuaciones 27.17 y 27.18, se predice que la variación de temperatura es proporcional a la variación de  $\bar{v}$ , de acuerdo con el modelo del gas ideal (Cap. 21), es proporcional a  $\sqrt{T}$ . Esto no concuerda con la variación lineal de la resistividad con la temperatura para metales puros (Fig. 27.8). Sólo es posible explicar estas observaciones si se utiliza el modelo de mecánica cuántica, el cual se describirá brevemente.

De acuerdo con la mecánica cuántica, los electrones tienen propiedades ondulatorias. Si el arreglo de átomos está regularmente espaciado (es decir, periódica), el carácter ondulatorio de los electrones hace posible que ellos se muevan libremente a través del conductor y resulta improbable una colisión con un átomo. Para un conductor ideal, no podría haber colisiones, el recorrido medio libre sería infinito y la resistividad sería cero. Las ondas del electrón serán dispersadas sólo si el arreglo atómico es irregular (no periódico), por ejemplo, defectos estructurales o impurezas. A bajas temperaturas, la resistividad es dominada por la dispersión causada por colisiones entre electrones y las impurezas. A altas temperaturas la resistividad está dominada por la dispersión causada por las colisiones de los electrones con los átomos del conductor, los cuales están continuamente descolocados como resultado de la agitación térmica. El movimiento térmico de los átomos ocasiona irregularidades en la estructura (comparada con el arreglo en reposo), lo que reduce en consecuencia el recorrido medio libre del electrón.

## 27.7 ENERGÍA ELÉCTRICA Y POTENCIA

Si una batería se utiliza para establecer una corriente eléctrica en un conductor, existe una transformación continua de energía química almacenada en la batería a energía cinética de los portadores de carga. Esta energía cinética se pierde rápido como resultado de las colisiones de los portadores de carga con el arreglo de iones, ocasionando un aumento en la temperatura del conductor. Por lo tanto, se ve que la energía química almacenada en la batería es continuamente transformada en energía térmica.

Considérese un circuito simple que consista de una batería cuyas terminales estén conectadas a una resistencia  $R$ , como en la figura 27.15. El símbolo  $\text{---}|$  se usa para designar a la batería (o a cualquier otra fuente de corriente directa), y los resistores se designan con el símbolo  $\text{---}\text{---}\text{---}$ . La terminal positiva de la batería (la placa más larga) está al mayor potencial, mientras que la terminal negativa (la placa más corta) está en el potencial más bajo. Ahora imagínese que se sigue una cantidad de carga positiva  $\Delta Q$  moviéndose alrededor del circuito desde el punto  $a$  a través de la batería y de la resistencia, y de regreso hasta el punto  $a$ . El punto  $a$  es el punto de referencia que está aterrizado (el símbolo de tierra es  $\text{---}\text{---}\text{---}$ ) y su potencial se ha tomado como cero. Como la carga se mueve desde  $a$  hasta  $b$  a través de la batería, su energía potencial eléctrica *aumenta* en una cantidad  $V \Delta Q$  (donde  $V$  es el potencial en  $b$ ) mientras que la energía potencial química en la batería *disminuye* por la misma cantidad. (Recuérdese del capítulo 25 que  $\Delta U = q \Delta V$ .) Sin embargo, como la carga se mueve desde  $c$  hasta  $d$  a través de la resistencia, *pierde* esta energía potencial eléctrica por las colisiones con los átomos en la resistencia, lo que produce energía térmica. Obsérvese que si se desprecia la resistencia de los alambres interconectores no existe pérdida en la energía en las trayectorias  $bc$  y  $da$ . Cuando la carga regresa al punto  $a$ , debe tener la misma energía potencial (cero) que tenía al empezar.<sup>6</sup>

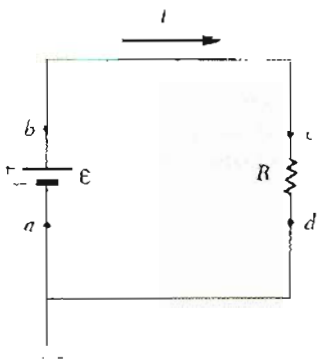


Figura 27.15 Un circuito consta de una batería o fem  $\mathcal{E}$  y de una resistencia  $R$ . La carga positiva fluye en la dirección de las manecillas del reloj, desde la terminal negativa hasta la positiva de la batería. Los puntos  $a$  y  $d$  están aterrizados.

<sup>6</sup> Obsérvese que cuando la corriente encuentra su estado estacionario, no existen cambios en la energía cinética asociada con la corriente.

La rapidez con la cual la carga  $\Delta Q$  pierde energía potencial cuando pasa a través de la resistencia está dada por

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V = IV$$

donde  $I$  es la corriente en el circuito. Es cierto que la carga vuelve a ganar esta energía cuando pasa a través de la batería. Como la rapidez con la cual la carga pierde la energía es igual a la potencia perdida en la resistencia, tenemos

$$P = IV \quad (27.21)$$

Potencia

En este caso, la potencia se suministra a la resistencia por la batería. Sin embargo, la ecuación 27.21 puede ser utilizada para determinar la potencia transferida a cualquier dispositivo que lleve una corriente  $I$ , y tenga una diferencia de potencial  $V$  entre sus terminales.

Utilizando la ecuación 27.21 y el hecho de que  $V = IR$  para una resistencia, se puede expresar la potencia disipada en las formas alternativas:

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (27.22)$$

Potencia perdida en un conductor

Cuando  $I$  está en amperes,  $V$  en volts, y  $R$  en ohms, la unidad de potencia en el SI es el watt (W). La potencia perdida como calor en un conductor de resistencia  $R$  se llama *calor joule*<sup>7</sup>; sin embargo, es frecuentemente referido como una *perdida  $I^2 R$* .

Una batería o cualquier dispositivo que produzca energía eléctrica se llama *fuerza electromotriz*, por lo general referida como *fem*. El concepto de fem será discutido con más detalle en el capítulo 28. (La frase *fuerza electromotriz* no es muy afortunada, ya que en realidad no describe una fuerza sino, de hecho, se refiere a una diferencia de potencial en volts.) *Despreciando la resistencia interna de la batería, la diferencia de potencial entre los puntos a y b es igual a la fem  $\mathcal{E}$  de la batería.* Es decir,  $V = V_b - V_a = \mathcal{E}$ , y la corriente en el circuito está dada por  $I = V/R = \mathcal{E}/R$ . Como  $V = \mathcal{E}$ , la potencia suministrada por la fem se puede expresar como  $P = I\mathcal{E}$ , lo cual por supuesto es igual a la potencia perdida  $I^2 R$ .

<sup>7</sup> Es llamado calentamiento-joule aunque sus dimensiones son de *energía por unidad de tiempo*, las cuales son dimensiones de potencia.

### EJEMPLO 27.7 Potencia en un calentador eléctrico

Se construye un calentador eléctrico aplicando una diferencia de potencial de 110 V a un alambre de nicromo cuya resistencia total es de 8  $\Omega$ . Encuéntrese la corriente en el alambre y la potencia nominal del calentador.

**Solución** Como  $V = IR$ , se tiene

$$I = \frac{V}{R} = \frac{110 \text{ V}}{8 \Omega} = 13.8 \text{ A}$$

Se puede encontrar la potencia nominal utilizando  $P = I^2 R$ :

$$P = I^2 R = (13.8 \text{ A})^2 (8 \Omega) = 1.52 \text{ kW}$$

Si se duplicara el voltaje aplicado, la corriente se duplicaría pero la potencia se cuadruplicaría.

### EJEMPLO 27.8 Nominación eléctrica de un foco

Un bombilla (foco) está nominado como 120 V/75 W. Es

decir, el voltaje de operación es 120 V y su potencia nominal es de 75 W. Se suministra la potencia al foco por medio de una fuente de corriente continua de 120 V. Encuéntrese la corriente en el foco y su resistencia.

**Solución** Como la potencia nominal del foco es 75 W y el voltaje de operación es 120 V, se puede utilizar  $P = IV$  para encontrar la corriente

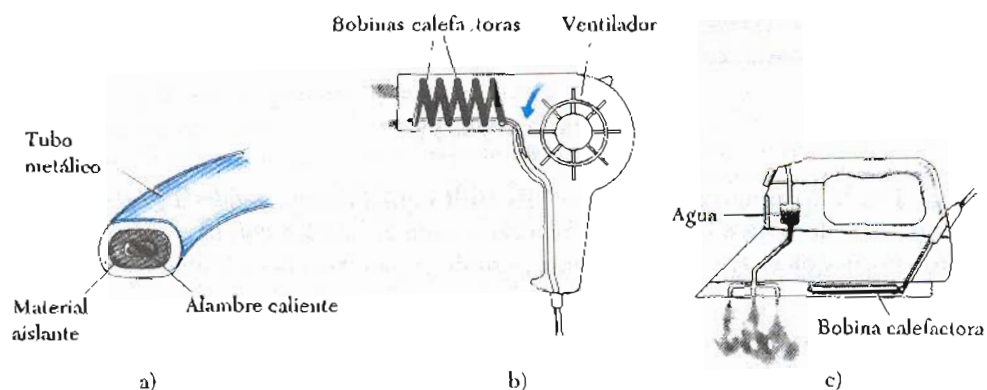
$$I = \frac{P}{V} = \frac{75 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 0.625 \text{ A}$$

Utilizando la ley de Ohm,  $V = IR$ , la resistencia debe ser:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120 \text{ V}}{0.625 \text{ A}} = 192 \Omega$$

**Ejercicio 4** ¿Cuál debería ser la resistencia en un foco nominado como de 120 V y 100 W?

**Respuesta** 144  $\Omega$ .



**Figura 27.16** a) Sección transversal de un elemento calefactor de una estufa eléctrica. b) En una secadora de pelo, el aire caliente se produce al circular aire con un ventilador a través de bobinas calefactoras. c) En una plancha de vapor el agua se convierte en vapor al calentarse desde la bobina calefactora.

### \*27.8 CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN APARATOS ELÉCTRICOS DEL HOGAR

Cuando la corriente pasa a través de un material resistivo el calor generado se utiliza en muchos dispositivos comunes. Una vista transversal de un elemento de calentador espiral de una estufa eléctrica se muestra en la figura 27.16a. El material a través del cual pasa la corriente se rodea por una sustancia aislante para prevenir que la corriente fluya a través de la cocina hasta la tierra cuando él o ella toque el sartén. Un material que sea un buen conductor de calor rodea al aislante.

La figura 27.16b muestra un secador de pelo común, en el cual un ventilador fuerza al aire a pasar por las bobinas calentadoras. En este caso, el aire caliente puede ser utilizado para secar el pelo, pero guardando las proporciones este mismo principio se utiliza para secar la ropa y calentar los edificios.

Un ejemplo final de utensilios del hogar que utiliza el efecto de calentamiento de la corriente eléctrica es la plancha de vapor que se ve en la figura 27.16c. Una bobina calentadora eleva la temperatura de la plancha y simultáneamente cambia el agua en vapor, el cual se esparce en forma de chorros por la parte de abajo de la plancha.

La unidad de energía que utiliza la compañía eléctrica para calcular el consumo de energía, el **kilowatt-hora**, está definida en términos de la unidad de potencia. Un kilowatt-hora (kWh) es la energía convertida o consumida en 1 h a una rapidez constante de 1 kW. El valor numérico de 1 kWh es

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3.6 \times 10^6 \text{ J} \quad (27.23)$$

En su recibo eléctrico, la cantidad de electricidad utilizada es comúnmente establecida en múltiplos de kWh.

#### EJEMPLO 27.9 Costo de operación de un foco

¿Cuál es el costo de encender durante 24 h un foco de 100 W si el costo de la electricidad es de ocho centavos (dólar) por kilowatt-hora?

**Solución** Un foco de 100 W es equivalente a un foco de 0.1 kW. Como la energía consumida es igual a la potencia  $\times$  tiempo, la cantidad de energía que se debe pagar por esto expresada en kWh es:

$$\text{Energía} = (0.10 \text{ kW})(24 \text{ h}) = 2.4 \text{ kWh}$$

Si la energía se cobra a ocho centavos (dólar) por kWh, el costo es

$$\text{Costo} = (2.4 \text{ kWh})(\$0.08/\text{kWh}) = \$0.19$$

Es decir, costará 19 centavos tener encendido un foco un día. Ésta es una pequeña cantidad, pero cuando mayores y

más complejos son los aparatos utilizados, el costo sube rápidamente.

La demanda del suministro de energía hace necesario que cuidemos los requerimientos en nuestros aparatos eléctricos. Esto es verdad no sólo porque con ello vendría a hacer más costosa la operación sino también porque con el consumo del carbón y las fuentes de petróleo que últimamente se suplen con energía eléctrica, aumentan los requerimientos de conservación que son necesarios. En todas los aparatos eléctricos hay una etiqueta que contiene la información que se necesita para calcular la potencia requerida en el aparato. La potencia de consumo en watts

se establece frecuentemente en forma directa, como en los focos. En otros casos, se da la cantidad de corriente utilizada por el dispositivo y el voltaje de operación. Esta información y la ecuación 27.21 son suficientes para calcular el costo de operación de cualquier dispositivo eléctrico.

**Ejercicio 5** Si el costo de la electricidad es de ocho centavos (dólar) por kilowatt-hora, ¿cuál es el costo cuando opera 5 h un horno eléctrico, el cual funciona con 20 A y 220 V?

**Respuesta** \$1.76.

## RESUMEN

La **corriente eléctrica**  $I$  en un conductor se define como

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} \quad (27.2)$$

donde  $dQ$  es la carga que pasa a través de una sección transversal del conductor en un tiempo  $dt$ . La unidad de corriente en el SI es el amperio (A), donde  $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$ .

La corriente en un conductor se relaciona con el movimiento de los portadores de carga a través de la relación

$$I = nqv_d A \quad (27.4)$$

donde  $n$  es la densidad de portadores de carga,  $q$  es su carga,  $v_d$  es la velocidad de deriva y  $A$  es el área de la sección transversal del conductor.

La **densidad de corriente**  $\mathbf{J}$  en un conductor se define como la corriente por unidad de área:

$$\mathbf{J} = nqv_d \quad (27.6)$$

La densidad de corriente en un conductor es proporcional al campo eléctrico de acuerdo con la expresión

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (27.7)$$

La constante  $\sigma$  se llama **conductividad** del material. El inverso de  $\sigma$  es la **resistividad**,  $\rho$ . Esto es,  $\rho = 1/\sigma$ .

Se dice que un material obedece la ley de Ohm si su conductividad es independiente del campo aplicado.

La **resistencia**  $R$  de un conductor se define como la razón de la diferencia de potencial a través del conductor a la corriente:

$$R \equiv \frac{V}{I} \quad (27.8)$$

Si la resistencia es independiente del voltaje aplicado, el conductor obedece la ley de Ohm.

Si el conductor tiene un área uniforme de sección transversal  $A$  y una longitud  $\ell$ , su resistencia está dada por

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} = \rho \frac{\ell}{A} \quad (27.10)$$

### Corriente eléctrica

### Corriente en un conductor

### Ley de Ohm

### Resistencia de un conductor

### Resistencia de un conductor uniforme

### Variación de $\rho$ con la temperatura

La unidad de resistencia en el SI es volt sobre ampere, la cual se define como 1 ohm ( $\Omega$ ). Esto es,  $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ .

La resistividad de un conductor varía con la temperatura en una forma aproximadamente lineal, es decir,

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (27.11)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de temperatura de la resistividad y  $\rho_0$  es la resistividad a alguna temperatura de referencia  $T_0$ .

En un modelo clásico de conducción electrónica en un metal, los electrones se tratan como moléculas de un gas. En ausencia de campo eléctrico, la velocidad promedio de los electrones es cero. Cuando un campo eléctrico es aplicado, los electrones se mueven (en promedio) con una **velocidad de deriva**  $v_d$ , la cual es opuesta al campo eléctrico. La velocidad de deriva está dada por

$$v_d = \frac{qE}{m} \tau \quad (27.16)$$

donde  $\tau$  es el tiempo promedio entre colisiones con los átomos del metal. La resistividad de un material de acuerdo a este modelo está dada por

$$\rho = \frac{m}{nq^2\tau} \quad (27.19)$$

donde  $n$  es el número de electrones libres por unidad de volumen.

Si una diferencia de potencial  $V$  se mantiene a través de una resistencia, la **potencia**, o rapidez a la cual la energía se suministra a la resistencia, está dada por

$$P = IV \quad (27.21)$$

Como la diferencia de potencial a través de la resistencia está dada por  $V = IR$ , se puede expresar la potencia disipada en una resistencia en la forma

$$P = I^2R = \frac{V^2}{R} \quad (27.22)$$

La energía eléctrica suministrada a una resistencia aparece en forma de energía interna (energía térmica) en la resistencia.

### Velocidad de deriva

### Resistividad

### Potencia

### Potencia perdida en una resistencia

## PREGUNTAS

1. Explique la química implicada en la operación de una "pila seca".
2. En una analogía en el flujo de tráfico de automóviles y la corriente eléctrica, ¿qué correspondería a la carga  $Q$ ? ¿Qué correspondería a la corriente  $I$ ?
3. ¿Cuáles son los factores que afectan la resistencia de un conductor?
4. ¿Cuál es la diferencia entre resistencia y resistividad?
5. Se ha visto que debe existir un campo eléctrico en el interior de un conductor que lleva una corriente. ¿Es posible esto en virtud del hecho de que en *electrostática* se concluyó que  $E$  debe ser cero en el interior de un conductor?
6. Dos alambres A y B de sección transversal circular están hechos del mismo metal y tienen igual longitud, pero la resistencia del alambre A es tres veces mayor que la del alambre B. ¿Cuál es la razón de las áreas de sus secciones transversales? ¿Cuál es la relación que existe entre sus radios?
7. ¿Qué se requiere para mantener una corriente constante en un conductor?
8. ¿Todos los conductores obedecen la ley de Ohm? Dé ejemplos que justifiquen su respuesta.
9. Cuando el voltaje a través de cierto conductor se duplica, la corriente observada aumenta por un factor de 3. ¿Qué puede concluir acerca del conductor?

10. En una analogía del agua con el circuito eléctrico, ¿a qué corresponde la fuente de potencia, la resistencia, la carga y la diferencia de potencial?
11. ¿Por qué razón un buen conductor eléctrico también es un buen conductor térmico?
12. Utilice la teoría atómica de la materia para explicar por qué la resistencia de un material aumentaría si su temperatura aumentara.
13. ¿Cómo cambia la resistencia con la temperatura para el cobre y el silicio? ¿Por qué hay diferencias?
14. Explique cómo una corriente puede persistir en un superconductor sin que se aplique voltaje.
15. ¿Qué simple requisito experimental hace que los dispositivos superconductor tengan una operación costosa?
16. ¿Qué sucedería a la velocidad de deriva de los electrones en un alambre y la corriente en el alambre si los electrones pudieran moverse libremente sin resistencia a través del alambre?
17. Si las cargas fluyen lentamente a través del metal, ¿por qué no se requieren horas para que un foco encienda después de cerrar el interruptor?
18. En un conductor, el campo eléctrico que dirige los electrones a través del conductor se propaga con una velocidad cercana a la de la luz, aun cuando la velocidad de deriva de los electrones es muy pequeña. Explique cómo pueden ser verdad ambas afirmaciones. ¿Es el

- misimo electrón el que se mueve de un extremo al otro del conductor?
19. Dos conductores de la misma longitud y radio se conectan a través de la misma diferencia de potencial. Un conductor tiene el doble de la resistencia del otro. ¿Cuál conductor disipará más potencia?
20. Cuando una lámpara incandescente se enciende, esto se hace justo después de cerrar el interruptor. ¿Por qué?
21. Si se fuera a diseñar un calentador eléctrico utilizando alambre de nicromo como elemento calefactor, ¿qué parámetros del alambre podrían hacerse variar para satisfacer una salida específica de potencia, digamos de 1000 W?
22. Dos focos operan a 110 V, pero uno tiene una potencia nominal de 25 W y el otro de 100 W. ¿Cuál foco tiene mayor resistencia? ¿Cuál foco lleva mayor corriente?
23. La estructura de una tarifa típica mensual presenta esto. \$1.60 por los primeros 16 kWh, 7.05 centavos/kWh por los siguientes 34 kWh utilizados, 5.02 centavos/kWh por los siguientes 100 kWh, 2.95 centavos/kWh por los siguientes 200 kWh, 2.35 centavos/kWh por todo en exceso de 400 kWh. Basado en estas tarifas, ¿cuál sería el cargo por 327 kWh? Desde el punto de vista de la conservación de la energía, ¿cuál es el error con este método de asignación de precios?

**PROBLEMAS**

**Sección 27.2 Corriente eléctrica**

1. Calcule la corriente en el caso para el cual  $3 \times 10^{12}$  electrones pasan por la sección transversal dada de un conductor cada segundo.
2. En un tubo de rayos catódicos, se mide una corriente de haz de  $30 \mu\text{A}$ . ¿Cuántos electrones golpean la pantalla del tubo en 40 s?
3. Una pequeña esfera que tiene una carga de 8 nC se pone a girar atada al extremo de un hilo aislante. La frecuencia de rotación es  $100 \pi \text{ rad/s}$ . ¿Cuál es la corriente promedio debida a la rotación de la carga?
4. La cantidad de carga  $q$  (en C) que pasa a través de una superficie de área  $2 \text{ cm}^2$  varía con el tiempo como  $q = 4t^3 + 5t + 6$ , donde  $t$  está en s. a) ¿Cuál es la corriente instantánea a través de la superficie en  $t = 1 \text{ s}$ ? b) ¿Cuál es el valor de la densidad de corriente?
5. La corriente  $I$  (en A) en un conductor depende del tiempo como  $I = 2t^2 - 3t + 7$ , donde  $t$  está en s. ¿Qué cantidad de carga pasa a través de una sección del conductor durante el intervalo  $t = 2 \text{ s}$  a  $t = 4 \text{ s}$ ?
6. Suponga que la corriente a través de un conductor decrece exponencialmente con el tiempo de acuerdo con:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

donde  $I_0$  es la corriente inicial (en  $t = 0$ ) y  $\tau$  es una constante que tiene dimensiones de tiempo. Considere que se realiza una observación en un punto interno del

- conductor. a) ¿Cuánta carga pasa por ese punto entre  $t = 0$  y  $t = \tau$ ? b) Cuánta carga pasa entre  $t = 0$  y  $t = 10\tau$ ? c) ¿Cuánta carga pasa entre  $t = 0$  y  $t = \infty$ ?
7. Calcule el número de electrones libres por metro cúbico para el oro, suponiendo un electrón libre por átomo.
8. Calcule la velocidad de deriva de los electrones en un conductor que tiene un área de sección transversal de  $8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  y lleva una corriente de 8 A. Tome la concentración de electrones libres como  $5 \times 10^{28}$  electrones/ $\text{m}^3$ .
9. Una barra de cobre tiene una sección transversal de  $5 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  y lleva una densidad de corriente de  $2000 \text{ A/m}^2$ . a) ¿Cuál es la corriente total en la barra? b) ¿Qué cantidad de carga pasa un punto dado en la barra por hora?
10. La figura 27.17 presenta una sección de un conductor circular no uniforme que lleva una corriente de 5 A. El radio de la sección transversal  $A_1$  es 0.4 cm. a) ¿Cuál es la densidad de corriente en  $A_1$ ? b) Si la densidad de corriente en  $A_2$  es la cuarta parte de valor en  $A_1$ , ¿cuál es el radio del conductor en  $A_2$ ?

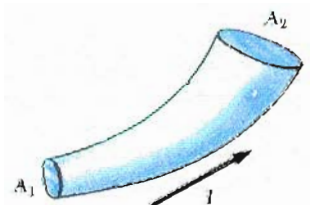


Figura 27.17 (Problema 10).

11. Un conductor coaxial con una longitud de 20 m consta de un cilindro interior de radio 3.0 mm y un tubo cilíndrico concéntrico con radio interno de 9.0 mm. Una corriente de fuga uniformemente distribuida de  $10 \mu\text{A}$  fluye entre los dos conductores. Determine la densidad de la corriente de fuga (en  $\text{A}/\text{m}^2$ ) a través de una superficie cilíndrica concéntrica con los conductores, que tenga un radio de 6.0 mm.

### Sección 27.3 Resistencia y ley de Ohm

12. Un conductor con radio uniforme de 1.2 cm lleva una corriente de 3 A producida por un campo eléctrico de 120 V/m. ¿Cuál es la resistividad del material?
13. Un campo eléctrico de 2100 V/m se aplica a un elemento de plata de sección transversal uniforme. Calcule la densidad de corriente resultante si el elemento está a una temperatura de  $20^\circ\text{C}$ .
14. Si la densidad de corriente en un alambre de cobre es igual  $5.8 \times 10^6 \text{ A}/\text{m}^2$ , determine la velocidad de deriva de los electrones libres en el alambre.
15. Encuentre la resistencia a  $20^\circ\text{C}$  de 40 m de longitud de un alambre de plata que tiene una área de sección transversal de  $0.4 \text{ mm}^2$ .
16. Un alambre calibre 18 tiene un diámetro de 1.024 mm. Determine la resistencia de 15 m de alambre de cobre calibre 18 a  $20^\circ\text{C}$ .
17. Un alambre de 2.4 m de longitud con sección transversal de  $0.031 \text{ cm}^2$  tiene una resistencia de  $0.24 \Omega$ . Calcule la conductividad del conductor.
18. ¿Cuál es la resistencia de un filamento de tungsteno de 15 cm de longitud y 0.002 cm de diámetro a  $20^\circ\text{C}$ ?
19. ¿Cuál es el diámetro de un alambre de cobre que tiene una resistencia por unidad de longitud de  $3.28 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$  a  $20^\circ\text{C}$ ?
20. Determine la resistencia a  $20^\circ\text{C}$  de un alambre de platino de 1.5 m de longitud que tiene un diámetro de 0.10 mm.
21. Suponga que un alambre uniforme de resistencia  $R$  es estirado uniformemente hasta tres veces su longitud original. ¿Cuál será su nueva resistencia, suponiendo que su densidad y resistividad permanecen constantes?
22. Se encuentra que alambres de aluminio y cobre de igual longitud tienen la misma resistencia. ¿Cuál es la razón de sus radios?
23. Suponga que se desea fabricar un alambre uniforme con 1 g de cobre. Si el alambre debe tener una resistencia  $R = 5 \Omega$  y todo el cobre debe ser utilizado, ¿cuál será: a) la longitud y b) el diámetro de este alambre?
24. ¿Cuál es la resistencia de un dispositivo que opera con una corriente de 7 A cuando se le aplica un voltaje de 110 V?
25. Una diferencia de potencial de 0.9 V se mantiene a través de un alambre de tungsteno de 1.5 m de longitud que tiene un área de sección transversal de  $0.6 \text{ mm}^2$ . ¿Cuál es la corriente en el alambre?
26. Un alambre calibre 22 tiene un diámetro de 0.644 mm. Determine la caída de voltaje a través de un alambre de

- aluminio calibre 22 cuando lleva una corriente de 0.5 A.
27. Una fuente de 22 V se conecta a una resistencia de  $4.4 \Omega$  de forma cilíndrica de 2 cm de longitud y 0.8 cm de diámetro. Calcule: a) la corriente en la resistencia y b) el campo eléctrico en la resistencia. c) ¿Qué le sucede a estos dos valores si la resistencia de  $4.4 \Omega$  se reemplaza por una resistencia de  $2.2 \Omega$  con las mismas dimensiones?
28. Se encuentra que una diferencia de potencial de 6 V produce una corriente de 0.14 A en un conductor de 2.6 m de longitud que tiene un radio uniforme de 0.3 cm. a) Determine la resistividad del material. b) ¿Cuál es la resistencia del conductor?

### Sección 27.4 Resistividad de conductores diferentes

29. Un alambre de aluminio de 0.1 mm de diámetro tiene impuesto un campo eléctrico uniforme de 0.2 V/m a lo largo de su longitud. La temperatura del alambre es de  $50^\circ\text{C}$ . Suponga un electrón libre por átomo. a) Use la información de la tabla 27.1 y determine la resistividad del material. b) ¿Cuál es la densidad de corriente en el alambre? c) ¿Cuál es la corriente total en el alambre? d) ¿Cuál es la velocidad de deriva de los electrones de conducción? e) ¿Qué diferencia de potencial debe existir entre los extremos del alambre de 2 m de longitud para establecer un campo eléctrico de esa intensidad?
30. Calcule el porcentaje de cambio en la resistencia de un filamento de carbón cuando es calentado desde la temperatura ambiente hasta  $160^\circ\text{C}$ .
31. ¿Cuál es la fracción de cambio en la resistencia de un filamento de hierro cuando su temperatura cambia de  $25^\circ\text{C}$  hasta  $50^\circ\text{C}$ ?
32. Suponiendo que la ecuación 27.23 es válida sobre un amplio rango de temperaturas (lo cual no es cierto), calcule la temperatura a la cual el cobre no tendría resistencia. ¿Por qué la resistencia del cobre no es cero a temperaturas muy bajas?
33. Si un alambre de cobre tiene una resistencia de  $18 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$ , ¿qué resistencia tendrá a  $60^\circ\text{C}$ ? (desprecie los cambios de longitud o de área en la sección transversal debidos al cambio de temperatura).
34. Un alambre de 3 m de longitud y  $0.45 \text{ mm}^2$  de área en su sección transversal tiene una resistencia de  $41 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$ . Si la resistencia del alambre aumenta a  $41.4 \Omega$  a  $29^\circ\text{C}$ , ¿cuál es el coeficiente de temperatura de la resistividad?
35. ¿A qué temperatura tendrá el tungsteno una resistividad de cuatro veces la de cobre? (Suponga que el cobre está a  $20^\circ\text{C}$ .)
36. Un segmento de alambre de nicromo está inicialmente a  $20^\circ\text{C}$ . Utilizando los datos de la tabla 27.1, calcule la temperatura del alambre a la cual debe ser calentado para duplicar su resistencia.
37. A  $45^\circ\text{C}$  la resistencia de un segmento de alambre de oro es  $85 \Omega$ . Cuando el alambre se coloca en un recipiente que contiene un líquido, la resistencia disminuye a  $80 \Omega$ . ¿Cuál es la temperatura del líquido?



38. Determine la resistividad del cobre con los siguientes datos: una diferencia de potencial produce una corriente de 3.4 A en un alambre de cobre de 125 m de longitud que tiene un diámetro de 0.30 cm y está a una temperatura de 20°C.

### Sección 27.6 Modelo para la conducción eléctrica

39. Calcule la densidad de corriente en un alambre de oro en el cual existe un campo eléctrico de 0.74 V/m.
40. Si la velocidad de deriva de los electrones libres en un alambre de cobre es  $7.84 \times 10^{-4}$  m/s, calcule el campo eléctrico en el conductor.
41. Use los datos de la tabla 27.6 para calcular el recorrido medio libre entre colisiones de los electrones del cobre si la velocidad térmica promedio de los electrones de conducción es  $8.6 \times 10^5$  m/s.
42. Si la corriente a través de un conductor dado se duplica, ¿qué sucede con: a) la densidad de portadores de carga, b) la densidad de corriente, c) la velocidad de deriva del electrón, d) el tiempo promedio entre colisiones?

### Sección 27.7 Energía eléctrica y potencia

43. Una batería de 10 V se conecta a una resistencia de 120  $\Omega$ . Despreciando la resistencia interna de la batería, calcule la potencia disipada en la resistencia.
44. ¿Cuánta corriente suministra un generador de 200 V que entrega 100 kW de potencia?
45. Suponga que una fuente de voltaje produce 140 V por un momento. Suponiendo que la resistencia de un foco de 120 V, 100 W, no cambia, ¿en qué porcentaje aumentaría su potencia?
46. Un tipo especial de acumulador de automóvil se caracteriza como de "360 ampere-hora, 12 V". ¿Cuánta energía total puede entregar el acumulador?
47. Si una resistencia de 45  $\Omega$  se etiqueta a 125 W (máxima potencia permitida), ¿cuál es el máximo voltaje de operación que soportaría?
48. En una instalación hidroeléctrica, una turbina entrega 1500 hp al generador, el cual a su vez convierte 80% de la energía mecánica en energía eléctrica. En estas condiciones, ¿qué corriente entregaría el generador a una terminal con una diferencia de potencial de 2000 V?
49. Dos conductores hechos del mismo material están conectados a través de una diferencia de potencial común. El conductor A tiene el doble de diámetro y el doble de longitud que el conductor B. ¿Cuál es la razón de las potencias entregadas por los dos conductores?
50. Una corriente de 0.9 A se mantiene en una resistencia de 160  $\Omega$  por 3 h. Determine la energía calorífica desarrollada por la resistencia. Dé su respuesta en J y en cal.

### Sección 27.8 Conservación de energía en aparatos eléctricos del hogar

51. ¿Cuál es la resistencia de un calentador de inversión que debe aumentar la temperatura de 1.5 kg de agua desde 10°C hasta 50°C en 10 min mientras opera con un voltaje de 110 V?
52. Si una estufa eléctrica es capaz de calentar 500 cm<sup>3</sup> de agua de la temperatura ambiente hasta el punto de ebullición en 10 minutos, ¿cuál es la potencia nominal de la estufa? Suponga una eficiencia de 50 %
53. Calcule el costo por día al funcionar una lámpara que requiere 1.7 A de una línea de 110 V si el costo de la energía eléctrica es 6 centavos (dólar)/kWh.
54. Un calentador eléctrico que opera a su máxima potencia consume una corriente de 8 A de un circuito de 110 V. a) ¿Cuál es la resistencia del calentador? b) Suponiendo R constante, ¿cuánta corriente debe consumir el calentador para disipar 750 W?
55. Un motor a 110 V produce 2.5 hp de potencia mecánica. Si este motor tiene una eficiencia de 90% en convertir potencia eléctrica en potencia mecánica, encuentre: a) la corriente que consume el motor, b) la energía total usada por el motor después de trabajar una hora. c) Si el costo de la energía eléctrica es de 8 centavos (dólar)/kWh, ¿cuánto costó trabajar esa hora al motor?

### PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

56. Muchos problemas del capítulo 27 tratan con resistores de diversas formas y tamaños. Para verificar los resultados experimentalmente, un voltaje debe ser aplicado en las superficies indicadas y la corriente resultante debe ser medida. La resistencia podría entonces ser calculada por la ley de Ohm. Describa un método para asegurar que el potencial aplicado será uniforme sobre la superficie.
57. La diferencia de potencial a través del filamento de una lámpara se mantiene a un nivel constante mientras alcanza la temperatura de equilibrio. Se observa que la corriente en estado estacionario en la lámpara sólo es un décimo de la que consume al encenderse la lámpara. Si el coeficiente de temperatura de resistividad de la lámpara a 20°C es de  $0.0045$  (°C)<sup>-1</sup>, y si la resistencia aumenta linealmente con la temperatura, ¿cuál es la temperatura final de operación del filamento?
58. La corriente en una resistencia disminuye 3 A cuando el voltaje aplicado a través de la resistencia disminuye de 12 V hasta 6 V. Encuentre la resistencia de la resistencia.
59. a) Una masa de 115 g de aluminio se conforma de un cilindro recto cuyo diámetro es igual a su altura. Calcule la resistencia entre las caras superior e inferior del cilindro a 20°C. b) Calcule la resistencia entre caras opuestas si la misma masa de aluminio se conformara en un cubo

60. a) Una placa de cobre ( $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ) tiene un espesor de 2 mm y las dimensiones de su superficie son  $8 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ . Si se unen los bordes largos para formar un tubo de 24 cm de longitud, ¿cuál es la resistencia entre los extremos? b) ¿Qué masa de cobre se requeriría para fabricar un carrete de cable de cobre de 1500 m y teniendo una resistencia total de  $4.5 \Omega$ ?
61. Un puente de Wheatstone puede ser utilizado para medir el estiramiento de un alambre ( $\Delta L/L_0$ ) (Véase la sección 12.4), donde  $L_0$  es la longitud antes del estiramiento,  $L$  es la longitud después del estiramiento y  $\Delta L = L - L_0$ . Sea  $\alpha = \Delta L/L_0$ . Demuestre que la resistencia es  $R = R_0(1 + 2\alpha + \alpha^2)$  para cualquier longitud donde  $R_0 = \frac{\rho L_0}{A_0}$ . Suponga la resistividad y el volumen del alambre permaneces constantes.
62. Un cilindro conductor de tungsteno tiene una longitud inicial  $L_1$  y un área de sección transversal  $A_1$ . El metal se lleva uniformemente hasta una longitud final  $L_2 = 10L_1$  y entonces es templado. Si la resistencia del nuevo conductor es  $75 \Omega$ , ¿cuál es el valor inicial de  $R$ ?
63. Se construye una resistencia con un material de resistividad  $\rho$  y con la forma de un cilindro hueco de longitud  $L$  cuyos radios interior y exterior son  $r_a$  y  $r_b$ , respectivamente (Fig. 27.18). Al usarlo, se aplica una diferencia de potencial entre los extremos del cilindro produciendo una corriente paralela al eje. a) Encuentre una expresión general para la resistencia del dispositivo en términos de  $L$ ,  $\rho$ ,  $r_a$  y  $r_b$ . b) Obtenga un valor numérico para  $R$  cuando  $L = 4 \text{ cm}$ ,  $r_a = 0.5 \text{ cm}$ ,  $r_b = 1.2 \text{ cm}$  y la resistividad  $\rho = 3.5 \times 10^5 \Omega \cdot \text{m}$ .

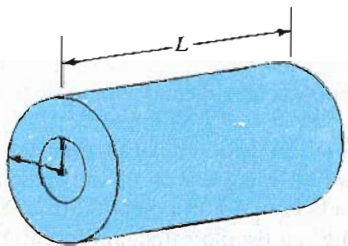


Figura 27.18 (Problemas 63 y 64).

64. Considere el dispositivo descrito en el problema 63. Suponga ahora que la diferencia de potencial es aplicada entre la superficie interna y la externa así que la corriente resultante fluye radialmente hacia afuera. a) Encuentre la expresión general para la resistencia en términos de  $L$ ,  $\rho$ ,  $r_a$  y  $r_b$ . b) Calcule el valor de  $R$  utilizando los valores de los parámetros dados en b) del problema 63.
65. El cable coaxial tipo 58u consta de un conductor interno cilíndrico de radio 0.81 mm rodeado por un aislante de polietileno de radio externo 2.95 mm con un conductor externo formando una malla alrededor del aislante. De-

termine la corriente de fuga entre los conductores para un cable coaxial de 10 m de longitud si la diferencia de potencial es de 1000 V. Tome la resistividad del polietileno como  $1.6 \times 10^{11} \Omega \cdot \text{m}$ .

66. Dos cascarones esféricos concéntricos con radios interno y externo  $r_a$  y  $r_b$ , respectivamente, forman un elemento resistivo cuando la región entre las dos superficies contiene un material de resistividad  $\rho$ . Demuestre que la resistencia del dispositivo está dada por

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

67. Se conforma un material de resistividad uniforme en el cuerpo que se muestra en la figura 27.19. Demuestre que la resistencia entre la cara A y la cara B de este cuerpo está dada por

$$R = \rho \frac{L}{w(y_2 - y_1)} \ln \left( \frac{y_2}{y_1} \right)$$

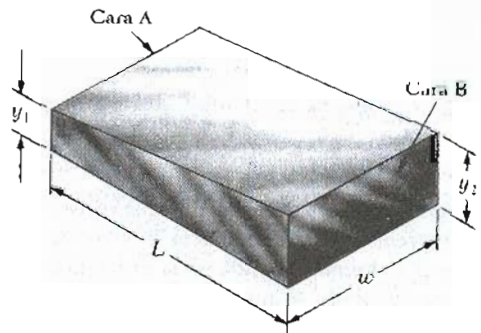


Figura 27.19 (Problema 67).

68. Encuentre la resistencia entre la cara A y la cara D del cuarto de anillo que tiene un área de sección transversal rectangular como la que se aprecia en la figura 27.20. El radio interior es  $b$ , el radio exterior es  $a$  y el espesor es  $t$ . El material tiene una resistividad  $\rho$ .

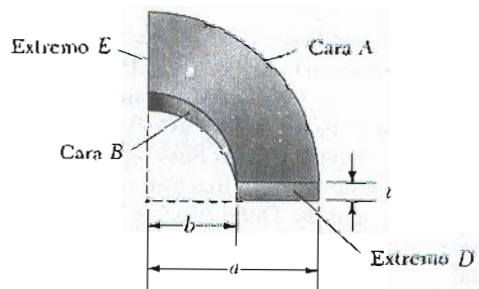


Figura 27.20 (Problemas 68 y 69).

69. Encuentre la resistencia entre los extremos  $D$  y  $E$  del cuarto de anillo que se ve en la figura 27.20 y descrito en el problema 68.
70. A un material de resistividad  $\rho$  se le da la forma de un cono truncado de altura  $h$  como en la figura 27.21. El extremo inferior tiene un radio  $b$  y el extremo superior tiene un radio  $a$ . Suponiendo una densidad de corriente uniforme a través de cualquier sección transversal circular del cono, demuestre que la resistencia entre los dos extremos es

$$R = \frac{\rho}{\pi} \left( \frac{h}{ab} \right)$$

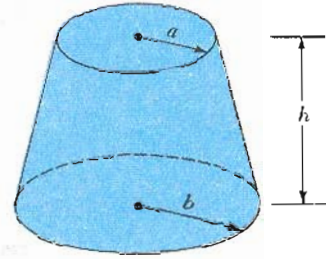
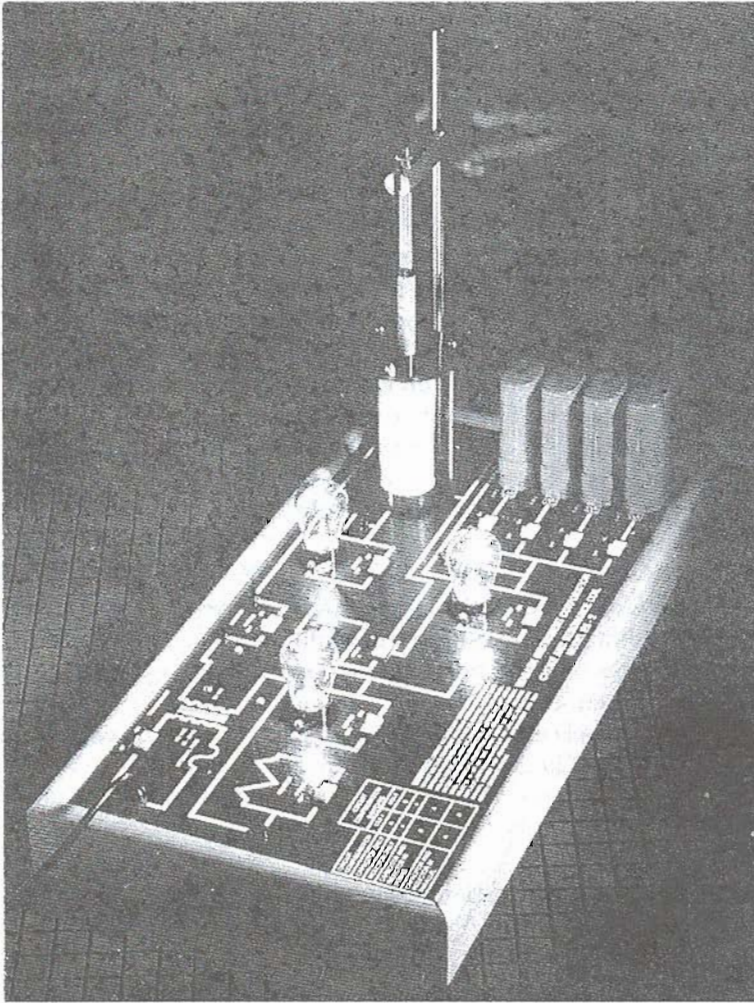


Figura 27.21 (Problema 70).

# 28

## Circuitos de corriente directa



*Este versátil circuito permite al experimentador examinar las propiedades de los elementos de circuitos tales como condensadores y resistencias y sus efectos en el comportamiento del circuito. (Cortesía de CENCO)*

**E**ste capítulo se avoca al análisis de algunos circuitos simples cuyos elementos incluyen baterías, resistencias y condensadores en varias combinaciones. El análisis de estos circuitos se simplifica utilizando las *reglas de Kirchhoff*. Estas reglas se siguen de las leyes de conservación de la energía y de la carga. La mayor parte de los circuitos analizados se supone se encuentran en un *estado estacionario*. En una sección especial se discutirán los circuitos que tienen resistencias y condensadores, para los cuales la corriente varía con el tiempo. Finalmente, un número de dispositivos eléctricos y técnicas se describirán para mediciones de corriente, de diferencia de potencial, de resistencia y de fems.

28.1 FUERZA ELECTROMOTRIZ

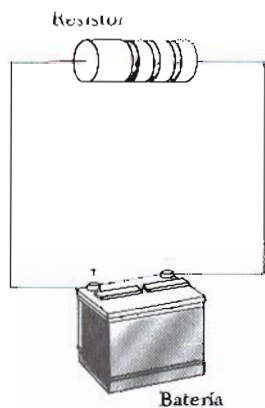
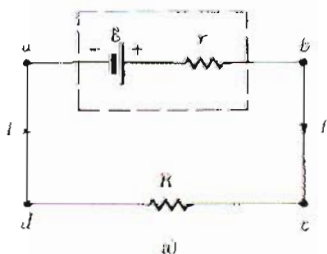


Figura 28.1 Un circuito que consta de una resistencia conectada a las terminales de una batería.

En el capítulo anterior se encontró que una corriente constante puede ser mantenida en un circuito cerrado a través del uso de una fuente de energía, llamada **fuerza electromotriz** (abreviada *fem*). Una fuente de fem es cualquier dispositivo (como una batería o generador) que aumenta la energía potencial de las cargas que circulan en el circuito. Se puede pensar en una fuente de fem como una "bomba de carga" que fuerza a los electrones a moverse en dirección opuesta al campo electrostático interno de la fuente. La fem  $\mathcal{E}$  de una fuente describe el trabajo realizado por unidad de carga, y por lo tanto la unidad en el SI de la fem es el volt.

Considérese el circuito de la figura 28.1, el cual consta de una batería conectada a una resistencia. Se supondrá que los alambres de conexión no tienen resistencia. La terminal positiva de la batería está a un potencial más alto que la terminal negativa. Si se despreciara la resistencia interna de la batería, entonces la diferencia de potencial a través de la batería (voltaje de terminales) sería igual a la fem de la batería. Sin embargo, como las baterías reales siempre tienen alguna resistencia interna  $r$ , el voltaje de terminales no es igual a la fem de la batería. El circuito de la figura 28.1 puede ser descrito por el diagrama de circuito de la figura 28.2a. La batería que se encuentra en el rectángulo punteado representa la fuente de fem,  $\mathcal{E}$ , en serie con la resistencia interna,  $r$ . Ahora imagínese una carga positiva que se mueve de  $a$  a  $b$  en la figura 28.2a. Como la carga pasa de la terminal negativa a la positiva, su potencial aumenta en  $\mathcal{E}$ . Sin embargo, como se mueve a través de  $r$ , su potencial decrece en  $Ir$ , donde  $I$  es la corriente en el circuito. Por lo tanto, el voltaje en las terminales de la batería,  $V = V_b - V_a$ , está dado por<sup>1</sup>

$$V = \mathcal{E} - Ir \tag{28.1}$$



De esta expresión obsérvese que la  $\mathcal{E}$  es equivalente al **voltaje a circuito abierto**, es decir, *el voltaje en las terminales cuando la corriente es cero*. La figura 28.2b es la representación gráfica de los cambios de potencial en el circuito cuando se recorre en la dirección de las manecillas del reloj. Al inspeccionar la figura 28.2a se ve que el voltaje en las terminales  $V$  debe ser igual a la diferencia de potencial a través de la resistencia externa  $R$ , frecuentemente llamado **resistencia de carga**. Es decir,  $V = IR$ . Combinando esto con la ecuación 28.1, se ve que

$$\mathcal{E} = IR + Ir \tag{28.2}$$

Despejando la corriente se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \tag{28.3}$$

Esto demuestra que la corriente en este circuito simple depende de ambas resistencias, la externa y la interna, de la batería. Si la resistencia de carga  $R$ , es mucho mayor que la resistencia interna  $r$ , puede despreciarse  $r$  en el análisis. En varios circuitos se ignorará esta resistencia interna.

Si se multiplica la ecuación 28.2 por la corriente  $I$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r \tag{28.4}$$

<sup>1</sup> El voltaje en las terminales en este caso es menor que la fem por una cantidad  $Ir$ . En algunas situaciones, el voltaje en las terminales puede exceder la fem por una cantidad  $Ir$ . Esto sucede cuando la dirección de la corriente es opuesta a la de la fem, como en el caso de cargar una batería con otra fuente de fem.

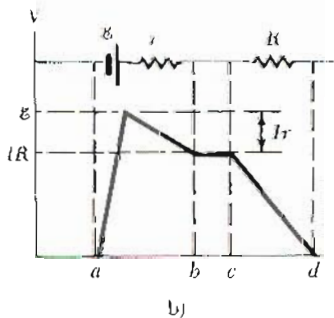


Figura 28.2 a) Diagrama del circuito de una fuente de fem  $\mathcal{E}$  de resistencia interna  $r$  conectada a una resistencia externa  $R$ . b) Representación gráfica que muestra cómo cambia el potencial en el circuito en serie de  $a$  la parte  $a$  recorrido en dirección de las manecillas del reloj.

Esta ecuación dice que la potencia extraída de la fuente de fem,  $I\mathcal{E}$  se convierte en la potencia disipada como calor-joule en la resistencia de carga,  $I^2R$ , más la potencia disipada en la resistencia interna,  $I^2r$ . De nuevo si  $r \ll R$ , entonces toda la potencia entregada por la batería es transferida a la resistencia de carga.

### EJEMPLO 28.1 Voltaje en las terminales de una batería

Una batería tiene una fem de 12 V y una resistencia interna de 0.05  $\Omega$ . Sus terminales se conectan a una resistencia de carga de 3  $\Omega$ . a) Encuéntrese la corriente en el circuito y el voltaje en las terminales de la batería.

**Solución** Utilizando las ecuaciones 28.1 y 28.3 se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12 \text{ V}}{3.05 \Omega} = 3.93 \text{ A}$$

$$V = \mathcal{E} - Ir = 12 \text{ V} - (3.93 \text{ A})(0.05 \Omega) = 11.8 \text{ V}$$

Para probar este resultado, se puede calcular el voltaje de caída a través de la resistencia de carga  $R$ . Esto da

$$V = IR = (3.93 \text{ A})(3 \Omega) = 11.8 \text{ V}$$

b) Calcule la potencia disipada por la resistencia de carga, la potencia disipada por la resistencia interna de la batería y la potencia entregada por la batería.

La potencia disipada por la resistencia de carga es

$$P_R = I^2R = (3.93 \text{ A})^2(3 \Omega) = 46.3 \text{ W}$$

La potencia disipada por la resistencia interna es

$$P_r = I^2r = (3.93 \text{ A})^2(0.05 \Omega) = 0.772 \text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia entregada por la batería es la suma de estas dos cantidades, o 47.1 W. Esto puede ser verificado utilizando la expresión  $P = I\mathcal{E}$ .

### EJEMPLO 28.2 Igualando la carga

Demuéstrese que la máxima potencia perdida en la resistencia de carga  $R$  en la figura 28.2a ocurre cuando  $R = r$ , es decir, cuando la resistencia de carga *igual* la resistencia interna.

**Solución** La potencia disipada en la resistencia de carga es igual a  $I^2R$ , donde  $I$  está dada por la ecuación 28.3:

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}$$

Cuando se grafica  $P$  contra  $R$  como en la figura 28.3, se encuentra que  $P$  alcanza su valor máximo en  $\mathcal{E}^2/4r$  cuando  $R = r$ . Esto puede probarse al diferenciar  $P$  respecto de  $R$ , igualando a cero el resultado y despejando  $R$ . Los detalles se dejan como problema (Probl. 79).

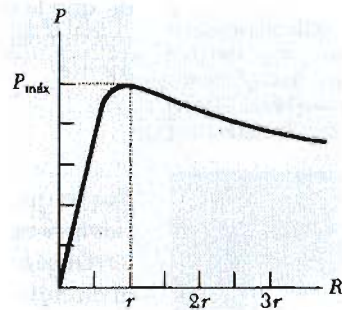


Figura 28.3 Gráfica de la potencia  $P$  disipada en una resistencia de carga en función de  $R$ . Obsérvese que la potencia en  $R$  es máxima cuando  $R$  es igual a  $r$ , la resistencia interna de la batería.

## 28.2 RESISTENCIAS EN SERIE Y EN PARALELO

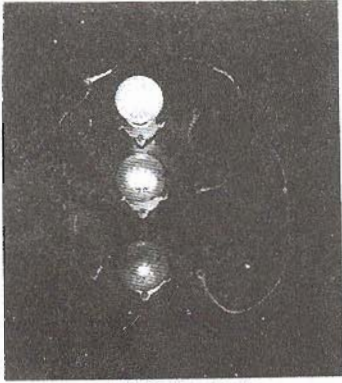
Cuando dos o más resistencias se conectan juntas de tal forma que sólo tienen un punto en común, se dice que están conectadas en serie. La figura 28.4 muestra dos resistencias conectadas en serie. Obsérvese que:

la corriente es la misma en cada resistencia que toda la carga que fluye a través de  $R_1$  debe ser igual a la carga que fluye a través de  $R_2$ .

Como la caída de potencial de  $a$  a  $b$  en la figura 28.4b es igual  $IR_1$ , y la caída de potencial de  $b$  a  $c$  es igual  $IR_2$ , la caída de potencial de  $a$  a  $c$  está dada por

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

Para una conexión en serie de resistencias, la corriente es la misma en cada resistencia



Tres lámparas conectadas en serie, todas etiquetadas a 120 V, con potencias de 60 W, 75 W y 150 W. ¿Por qué las intensidades de las lámparas son diferentes? ¿Cuál lámpara tiene la mayor resistencia? ¿Cómo serían sus intensidades relativas si fueran conectadas en paralelo? (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

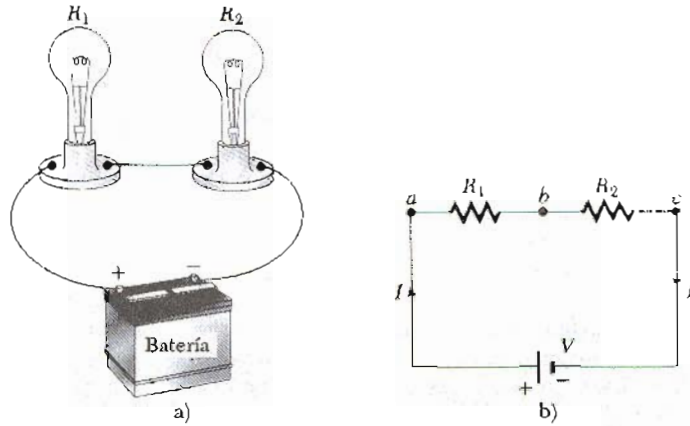


Figura 28.4 Conexión de dos resistencias en serie,  $R_1$  y  $R_2$ . La corriente es la misma en cada resistencia.

Por lo tanto, se pueden reemplazar las dos resistencias en serie por uno solo de *resistencia equivalente*  $R_{eq}$  cuyo valor es la *suma* de las resistencias individuales:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{28.5}$$

La resistencia  $R_{eq}$  es equivalente a la combinación en serie  $R_1 + R_2$  en el sentido de que la corriente en el circuito no cambia cuando  $R_{eq}$  reemplaza a  $R_1 + R_2$ . La resistencia equivalente de tres o más resistencias conectadas en serie es simplemente

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \tag{28.6}$$

Por lo que, *la resistencia equivalente de una conexión en serie de resistencias es siempre mayor que cualquiera de las resistencias individuales.*

Obsérvese que si el filamento de un foco en la figura 28.4 se rompe o se funde, el circuito no podría ser completado (condición de circuito abierto) y el segundo foco estaría apagado también. Algunas luces navideñas (especialmente las más viejas) están conectadas de este modo, y es una muy mala experiencia tratar de determinar cuál es el foco fundido. Una frustrante experiencia como ésta muestra cuán inconveniente sería tener todos los aparatos eléctricos del hogar conectados en serie. En algunos circuitos, se utilizan fusibles en serie con otro elemento del circuito como protección. El conductor en el fusible se diseña para derretirse y abrir el circuito a alguna corriente máxima cuyo valor depende de la naturaleza del circuito. Si el fusible no se utiliza, una corriente excesiva podría dañar un elemento del circuito, sobrecalentar los cables y hasta ocasionar un incendio. En la construcción moderna de casas, los interruptores de circuito se utilizan en lugar de fusibles. Cuando la corriente del circuito excede algún valor (por lo común 15 A), el interruptor de circuito actúa y abre el circuito.

Ahora considérense dos resistencias conectadas en *paralelo* como se muestra en la figura 28.5.

**En este caso, existe la misma diferencia de potencial a través de cada resistencia.**

Sin embargo, la corriente en cada resistencia por lo general no es la misma. Cuando la corriente  $I$  encuentra el punto  $a$  (llamado una *unión* o *nodo*), se abre en dos partes,  $I_1$  va a través de  $R_1$  e  $I_2$  va a través de  $R_2$ . Si  $R_1$  es mayor que  $R_2$ ,

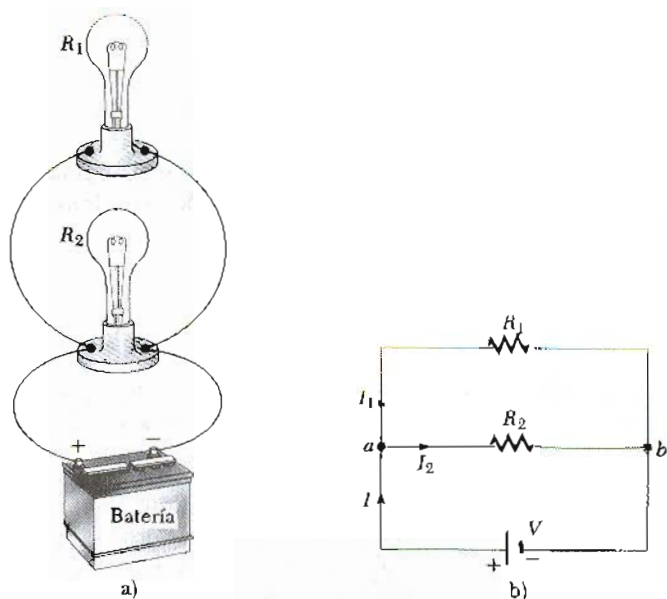


Figura 28.5 Conexión de dos resistencias en paralelo,  $R_1$  y  $R_2$ . La diferencia de potencial a través de cada resistencia es la misma, y la resistencia equivalente de la combinación está dada por  $R_{eq} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

entonces  $I_1$  será menor que  $I_2$ . Es decir, la carga tiende a tomar la trayectoria de menor resistencia. Ciertamente, como la carga debe conservarse, la corriente  $I$  que entra en el punto  $a$  debe ser igual a la corriente total que sale de este punto,  $I_1 + I_2$ :

$$I = I_1 + I_2$$

Como la caída de potencial en cada resistencia debe ser la misma, la ley de Ohm da:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R_{eq}}$$

De este resultado, se ve que la resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo está dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (28.7)$$

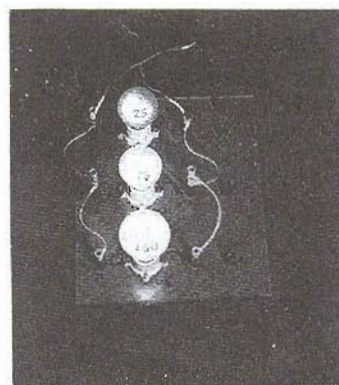
Esto puede arreglarse para dar

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Una extensión de este análisis a tres o más resistencias en paralelo da la siguiente expresión general:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (28.8)$$

Se puede observar de esta expresión que la resistencia equivalente de dos o más resistencias conectadas en paralelo siempre es *menor* que la más pequeña de las resistencias del grupo.



Tres lámparas incandescentes con potencias de 25 W, 75 W y 150 W, conectadas en paralelo a una fuente de voltaje de 100 V. Todas las lámparas están etiquetadas al mismo voltaje. ¿Por qué la intensidad de las lámparas es diferente? ¿Cuál es la lámpara que consume mayor corriente? ¿Cuál tiene la menor resistencia? (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)



Georg Simon Ohm (1787-1854), físico alemán. (Cortesía de AIP Biblioteca Niels Bohr, Colección de E. Scott Barr)

### Varias resistencias en paralelo



Los circuitos del hogar son siempre cableados de tal forma que los focos (o los aparatos eléctricos, etc.) estén conectados en paralelo, como en la figura 28.5a. De esta manera, cada dispositivo opera independientemente de los otros, así que si uno está apagado, los otros pueden estar encendidos. Es igual de importante el hecho de que todos operan con el mismo voltaje.

Por último, es interesante hacer notar que las resistencias en paralelo se combinan en la misma forma en que se combinan los condensadores en serie y viceversa.

**EJEMPLO 28.3 Determinación de la resistencia equivalente**

Cuatro resistencias se conectan como se muestra en la figura 28.6a. a) Encuéntrese la resistencia equivalente entre *a* y *c*.

**Solución** El circuito puede ser reducido por pasos como se muestra en la figura 28.6. Las resistencias de 8 Ω y 4 Ω están en serie, por lo que la resistencia equivalente entre *a* y *b* es 12 Ω (Ec. 28.5). Las resistencias 6 Ω y 3 Ω están en paralelo, y de la ecuación 28.7 se encuentra que la resistencia equivalente entre *b* y *c* es de 2 Ω. Por lo tanto, la resistencia equivalente entre *a* y *c* es 14 Ω.

b) ¿Cuál es la corriente en cada resistencia si una diferencia de potencial de 42 V se mantiene entre *a* y *b*?

**Solución** La corriente *I* en las resistencias de 8 Ω y 4 Ω es la misma ya que están en serie. Utilizando la ley de Ohm y el resultado del inciso a, se obtiene

$$I = \frac{V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{42 \text{ V}}{14 \Omega} = 3 \text{ A}$$

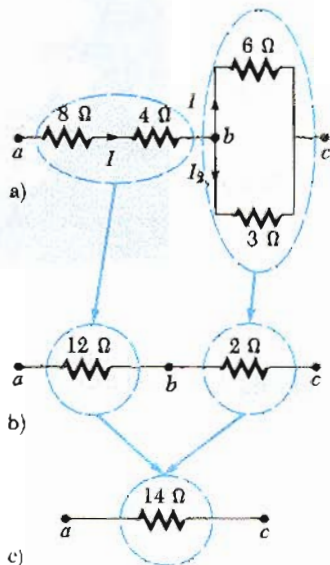


Figura 28.6 (Ejemplo 28.3) La resistencia equivalente de las cuatro resistencias que se muestran en el parte *a* puede reducirse por pasos hasta una resistencia equivalente de 14 Ω.

Cuando la corriente llega a la unión en *b*, se divide y parte de la corriente pasa a través de la resistencia de 6 Ω (*I*<sub>1</sub>) y parte pasa por la resistencia de 3 Ω (*I*<sub>2</sub>). Como la diferencia de potencial a través de estas resistencias, *V*<sub>bc</sub>, es la misma (están en paralelo), se ve que 6*I*<sub>1</sub> = 3*I*<sub>2</sub> o bien *I*<sub>2</sub> = 2*I*<sub>1</sub>. Utilizando este resultado y el hecho de que *I*<sub>1</sub> + *I*<sub>2</sub> = 3 A, se encuentra que *I*<sub>1</sub> = 1 A e *I*<sub>2</sub> = 2 A. Se podría haber sugerido esto desde el principio al observar que la corriente a través de la resistencia de 3 Ω tiene que ser el doble de la corriente a través de resistencia de 6 Ω en vista de sus resistencias relativas y del hecho de que el mismo voltaje se aplica en cada una de ellas.

Como prueba final, obsérvese que *V*<sub>bc</sub> = 6*I*<sub>1</sub> = 3*I*<sub>2</sub> = 6 V y *V*<sub>ab</sub> = 12*I* = 36 V; por lo que *V*<sub>ac</sub> = *V*<sub>ab</sub> + *V*<sub>bc</sub> = 42 V, como debe ser.

**EJEMPLO 28.4 Tres resistencias en paralelo**

Tres resistencias están conectadas en paralelo como en la figura 28.7. Una diferencia de potencial de 18 V se mantiene entre los puntos *a* y *b*. a) Encuéntrese la corriente en cada resistencia.

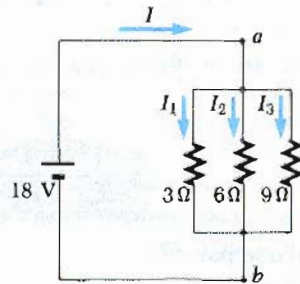


Figura 28.7 (Ejemplo 28.4) Tres resistencias conectadas en paralelo. El voltaje a través de cada resistencia es de 18 V.

**Solución** Las resistencias están en paralelo y la diferencia de potencial a través de cada una es 18 V. Aplicando *V* = *IR* para cada resistencia se tiene

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{18 \text{ V}}{3 \Omega} = 6 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{18 \text{ V}}{6 \Omega} = 3 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{18 \text{ V}}{9 \Omega} = 2 \text{ A}$$

b) Calcúlese la potencia disipada en cada resistencia y la potencia total disipada por las tres resistencias.

**Solución** Aplicando  $P = I^2R$  para cada resistencia se obtiene

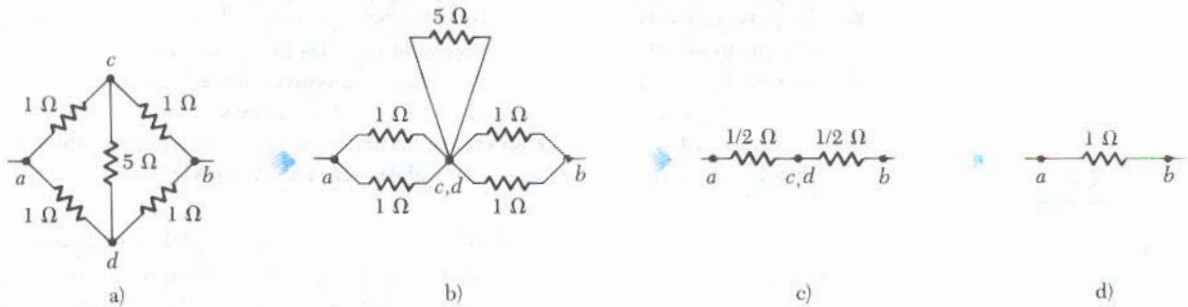
$$3 \Omega: P_1 = I_1^2 R_1 = (6 \text{ A})^2 (3 \Omega) = 108 \text{ W}$$

$$6 \Omega: P_2 = I_2^2 R_2 = (3 \text{ A})^2 (6 \Omega) = 54 \text{ W}$$

$$9 \Omega: P_3 = I_3^2 R_3 = (2 \text{ A})^2 (9 \Omega) = 36 \text{ W}$$

Esto muestra que la resistencia más pequeña disipa la mayor potencia ya que lleva la mayor corriente. (Obsérvese que también puede utilizarse  $P = V^2/R$  para calcular la potencia disipada por cada resistencia.) Sumando las tres cantidades obtenidas dan una potencia total de 198 W.

c) Calcúlese la resistencia equivalente de las tres resistencias y de este resultado determine la potencia total disipada.



**Figura 28.8** (Ejemplo 28.5) Debido a la simetría del circuito, la resistencia de  $5 \Omega$  no contribuye a la resistencia entre los puntos  $a$  y  $b$  y puede ser descartado.

## 28.3 REGLAS DE KIRCHHOFF

Como se vio en la sección previa, un circuito simple puede analizarse utilizando la ley de Ohm y las reglas de combinaciones en serie y en paralelo de resistencias. Muchas veces no es posible reducirlo a un circuito de un simple lazo. El procedimiento para analizar un circuito más complejo se simplifica enormemente al utilizar dos sencillas reglas llamadas **reglas de Kirchhoff**:

1. La suma de las corrientes que entren en una unión debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de la unión. (Una **unión** es cualquier punto del circuito donde la corriente se puede dividir.)

**Solución** Podemos utilizar la ecuación 28.7 para encontrar  $R_{eq}$ :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$$

$$R_{eq} = \frac{18}{11} \Omega$$

**Ejercicio 1** Utilice el resultado para  $R_{eq}$  a fin de calcular la potencia total disipada en el circuito.

**Respuesta:** 198 W.

### EJEMPLO 28.5 Determinación de $R_{eq}$ aplicando argumento de simetría

Considérense cinco resistencias conectadas como se muestra en la figura 28.8a. Determínese la resistencia equivalente de la combinación de las resistencias entre los puntos  $a$  y  $b$ .

**Solución** En este tipo de problemas, es conveniente suponer una corriente que entre al punto  $a$  y entonces aplicar argumentos de simetría. Debido a la simetría en el circuito (todas las resistencias de la malla de afuera son de  $1 \Omega$ ), la corriente en las ramas  $ac$  y  $ad$  debe ser igual. Como  $V_c = V_d$ , los puntos  $c$  y  $d$  pueden unirse sin que afecte el circuito, como en la figura 28.8b. Entonces, la resistencia de  $5 \Omega$  puede quitarse del circuito y este último quedar reducido al de la figura 28.8c y 28.8d. De esta reducción, se ve que la resistencia equivalente de la combinación es  $1 \Omega$ . Obsérvese que el resultado es  $1 \Omega$  independientemente del valor de la resistencia que se conecte entre  $c$  y  $d$ .

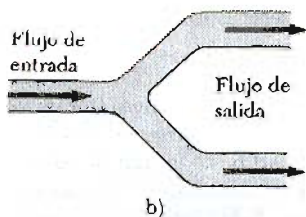
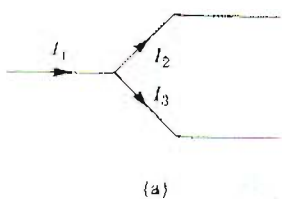


Figura 28.9 a) Diagrama esquemático para mostrar la regla del nodo (unión) de Kirchhoff. La conservación de la carga requiere que la corriente que llega a la unión debe ser igual a la que sale de la unión. Por lo tanto, en este caso  $I_1 = I_2 + I_3$ . b) Una analogía mecánica de la regla del nodo: el flujo de salida debe ser igual al flujo que entra.

2. La suma algebraica de los cambios de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier trayectoria cerrada en el circuito debe ser cero.

La primera regla se establece de la **conservación de la carga**. Es decir, cuanto corriente entre en un punto dado del circuito debe salir de ese punto, ya que la carga no puede perderse en ese punto. Si se aplica esta regla a la unión que se ve en la figura 28.9a, se obtiene

$$I_1 = I_2 + I_3$$

La figura 28.9b representa una analogía mecánica de esta situación, en la que fluye el agua y no hay fugas. El gasto que sale del tubo es igual al gasto que sale de las dos ramas.

La segunda regla se deduce de la **conservación de la energía**. Es decir, cualquier carga que se mueve en torno a cualquier circuito cerrado (sale de un punto y llega al mismo punto) debe ganar tanta energía como la que pierde. Su energía puede decrecer en forma de caída de potencial  $-IR$ , a través de una resistencia o bien como resultado de tener una carga en dirección inversa a través de una fuente de fem. En una aplicación práctica de este último caso, la energía eléctrica se convierte en energía química al cargar una batería; de manera similar, la energía eléctrica puede convertirse en energía mecánica al hacer funcionar un motor.

Como una ayuda al aplicar la segunda regla, deben observarse las siguientes indicaciones, las cuales se resumen en la figura 28.10.

1. Si se recorre la resistencia en la dirección de la corriente, el cambio en el potencial a través de la resistencia es  $-IR$  (Fig. 28.10a).
2. Si la resistencia se recorre en dirección opuesta a la corriente, el cambio en el potencial a través de la resistencia es  $+IR$  (Fig. 28.10b).
3. Si una fuente de fem se recorre en la dirección de la fem (de la terminal  $-$  a la  $+$ ), el cambio en el potencial es  $+\mathcal{E}$  (Fig. 28.10c).
4. Si una fuente de fem se recorre en la dirección opuesta a la fem (de la terminal  $+$  a la  $-$ ), el cambio en el potencial es  $-\mathcal{E}$  (Fig. 28.10d).

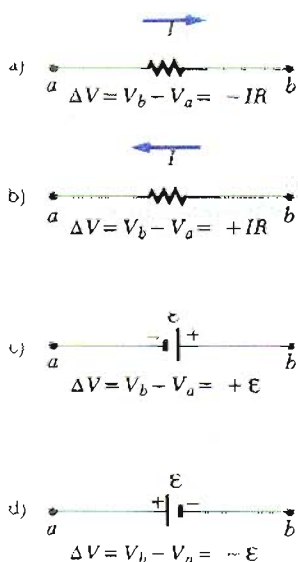


Figura 28.10 Reglas para determinar los cambios de potencial a través de una resistencia y una batería, suponiendo que la batería no tiene resistencia interna.

Existen limitaciones sobre el número de veces que pueden utilizarse la regla de nodos y la de mallas. La regla de nodos puede utilizarse siempre que sea necesario pero considerando que, al escribir una ecuación, se incluya una corriente que no haya sido utilizada previamente en alguna ecuación de la regla de nodos. En general, el número de veces que puede ser utilizada la regla de nodos es uno menos que el número de uniones (nodos) que tenga el circuito. La regla de malla puede ser utilizada siempre que sea necesario en tanto que un nuevo elemento de circuito (resistencia o batería) o una nueva corriente aparezca en cada nueva ecuación. En general, *el número de ecuaciones independientes que se necesiten debe ser al menos igual al número de incógnitas para tener una solución al problema de un circuito particular.*

Circuitos complejos con varias mallas y uniones generan un gran número de ecuaciones linealmente independientes que corresponden a un gran número de incógnitas. Tales situaciones deben ser manejadas formalmente utilizando álgebra matricial. Se pueden hacer programas en computadora para determinar los valores de las incógnitas.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de la reglas de Kirchhoff en el análisis de circuitos. En todos los casos, se supone que el circuito ha alcanzado condiciones de estado estacionario, es decir, las corrientes en las diversas ramas son constantes. Si un capacitor se incluye como elemento en una de las ramas, *actúa como circuito*

abierto, es decir, la corriente en la rama que contiene al capacitor será cero en condiciones de estado estacionario.

### ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS: REGLAS DE KIRCHHOFF

1. Primero, dibújese el diagrama del circuito y asígnense etiquetas y símbolos a todas las cantidades conocidas y desconocidas. Se debe asignar una *dirección* a la corriente en cada parte del circuito. No debe preocupar que no se asigne correctamente la dirección de la corriente; el resultado tendrá signo negativo, pero *la magnitud será la correcta*. Aun cuando la asignación de la corriente es arbitraria, debe respetarse *rigurosamente* la dirección asignada cuando se apliquen las reglas de Kirchhoff.
2. Aplíquese la regla de nodos (primera regla de Kirchhoff) a todas las uniones en el circuito en las cuales se obtengan relaciones entre varias corrientes. ¡Este paso es fácil!
3. Ahora aplíquese la segunda regla de Kirchhoff a tantas mallas en el circuito como sean necesarias para determinar las incógnitas. Al aplicar esta regla, deben identificarse correctamente los cambios de potencial de cada elemento al recorrer la malla (ya sea en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario). ¡Cuidado con los signos! Se sugiere se sigan las reglas listadas y resumidas en la figura 28.10.
4. Por último, deben resolverse las ecuaciones simultáneamente para las cantidades desconocidas. Es necesario ser cuidadoso en los pasos algebraicos y verificar que las respuestas numéricas sean congruentes.

#### EJEMPLO 28.6 Circuito de una malla

El circuito de una malla contiene dos resistencias y dos fuentes de fem como se muestra en la figura 28.11. Las resistencias internas de las baterías se han despreciado. a) Determínese la corriente del circuito.

**Solución** No existen uniones (nodos) en un circuito de una malla, y la corriente es la misma en todos los elementos. Supóngase que la corriente está en la dirección de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 28.11. Recorriendo el circuito en la dirección de las manecillas del reloj, comenzando en el punto *a*, se ve que  $a \rightarrow b$  representa un aumento de potencial de  $+\mathcal{E}_1$ , de  $b \rightarrow c$

$$\sum_i \Delta V_i = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

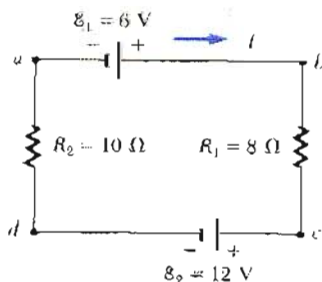


Figura 28.11 (Ejemplo 28.6) Un circuito en serie que consta de dos resistencias y dos baterías, donde las polaridades de las baterías están opuestas una de la otra.

representa una disminución de potencial de  $-IR_1$ , de  $c \rightarrow d$  representa una disminución de potencial de  $-\mathcal{E}_2$ , y de  $d \rightarrow a$  representa una caída de potencial de  $-IR_2$ . Aplicando la segunda regla de Kirchhoff se tiene la ecuación anterior.

Despejando  $I$  y utilizando los valores dados en la figura 28.11, queda

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \text{ V} - 12 \text{ V}}{8 \Omega + 10 \Omega} = -\frac{1}{3} \text{ A}$$

El signo negativo indica que la dirección de la corriente es *opuesta* a la dirección que se supuso, o *en contra de las manecillas del reloj*.

b) ¿Cuál es la potencia perdida en cada resistencia?

$$P_1 = I^2 R_1 = \left(\frac{1}{3} \text{ A}\right)^2 (8 \Omega) = \frac{8}{9} \text{ W}$$

$$P_2 = I^2 R_2 = \left(\frac{1}{3} \text{ A}\right)^2 (10 \Omega) = \frac{10}{9} \text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia total perdida es  $P_1 + P_2 = 2 \text{ W}$ . Obsérvese que la batería de 12 V entrega una potencia  $I\mathcal{E}_2 = 4 \text{ W}$ . La mitad de su potencia se libera en las resistencias externas. La otra mitad se libera en la batería de 6 V, la cual está siendo cargada por la batería de 12 V. Si se hubieran incluido las resistencias internas de las baterías, alguna potencia sería disipada como calor en las baterías, y entonces sería *menor* la potencia entregada a la batería de 6 V.

#### EJEMPLO 28.7 Aplicando las reglas de Kirchhoff

Determínense las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  en el circuito de la figura 28.12.

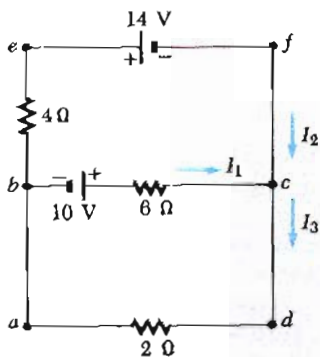


Figura 28.12 (Ejemplo 28.7) Circuito que consta de tres mallas.

Se escogerán las direcciones de las corrientes como se muestran en la figura 28.12. Aplicando la primera regla de Kirchhoff para el nodo *c* se obtiene

$$(1) \quad I_1 + I_2 = I_3$$

Existen tres mallas en el circuito, *abcd*, *befcb* y *aefda* (la malla externa). Sólo se necesitan dos ecuaciones de mallas para determinar las corrientes desconocidas. La tercera ecuación de malla no daría nueva información. Aplicando la segunda regla de Kirchhoff a las mallas *abcd* y *befcb* y recorriendo estas mallas en la dirección de las manecillas del reloj, se obtienen las siguientes expresiones:

$$(2) \text{ Malla } abcd: 10 \text{ V} - (6 \Omega)I_1 - (2 \Omega)I_3 = 0$$

$$(3) \text{ Malla } befcb: -14 \text{ V} - 10 \text{ V} + (6 \Omega)I_1 - (4 \Omega)I_2 = 0$$

Obsérvese que en la malla *befcb*, el signo positivo que se obtiene al recorrer la resistencia de 6 Ω se debe a que la dirección de la trayectoria es opuesta a la dirección de la corriente *I*<sub>1</sub>. La tercera malla *aefda* da la ecuación  $-14 = 2I_3 + 4I_2$ , la cual es precisamente la suma de las ecuaciones (2) y (3). Las expresiones (1), (2) y (3) son tres ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas. El problema puede resolverse como sigue: sustituyendo (1) en (2) se tiene

$$10 - 6I_1 - 2(I_1 + I_2) = 0$$

$$(4) \quad 10 = 8I_1 + 2I_2$$

Dividiendo cada término en (3) por 2 y reagrupando la ecuación da

$$(5) \quad -12 = -3I_1 + 2I_2$$

Restando (5) de (4) se elimina *I*<sub>2</sub>, obteniéndose

$$22 = 11I_1$$

$$I_1 = 2 \text{ A}$$

Utilizando este valor de *I*<sub>1</sub> en (5) se obtiene el valor de *I*<sub>2</sub>.

$$2I_2 = 3I_1 - 12 = 3(2) - 12 = -6$$

$$I_2 = -3 \text{ A}$$

Finalmente,  $I_3 = I_1 + I_2 = -1 \text{ A}$ . Por lo tanto, las corrientes tienen los valores

$$I_1 = 2 \text{ A} \quad I_2 = -3 \text{ A} \quad I_3 = -1 \text{ A}$$

El hecho de que *I*<sub>2</sub> e *I*<sub>3</sub> sean negativas sólo indica que se escogieron las direcciones equivocadas de estas corrientes. Sin embargo, los valores numéricos son correctos.

**Ejercicio 2** Determine la diferencia de potencial entre *b* y *c*.

**Respuesta**  $V_b - V_c = 2 \text{ V}$ .

**EJEMPLO 28.8** Circuito de múltiples mallas

El circuito de múltiples mallas en la figura 28.13 contiene tres resistencias, tres baterías y un capacitor. a) Determinense las corrientes desconocidas, en condiciones de estado estacionario.

**Solución** Primero obsérvese que el capacitor representa un circuito abierto y por lo tanto no circula corriente a lo largo de la trayectoria *ghab* en condiciones de estado estacionario. Por lo que,  $I_{gh} = I_1$ . Etiquetando las corrientes como se indica en la figura 28.13 y aplicando la primera regla de Kirchhoff al nodo *c*, se obtiene

$$(1) \quad I_1 + I_2 = I_3$$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff a la malla *defcd* y *cfgbc* se obtiene

$$2) \text{ Malla } defcd: 4 \text{ V} - (3 \Omega)I_2 - (5 \Omega)I_3 = 0$$

$$3) \text{ Malla } cfgbc: 8 \text{ V} - (5 \Omega)I_1 + (3 \Omega)I_2 = 0$$

De (1) se ve que  $I_1 = I_3 - I_2$ , lo cual al ser sustituido en (3) da

$$(4) \quad 8 \text{ V} - (5 \Omega)I_3 + (8 \Omega)I_2 = 0$$

Restando (4) de (2), se elimina *I*<sub>3</sub> y se encuentra que

$$I_2 = -\frac{4}{11} \text{ A} = -0.364 \text{ A}$$

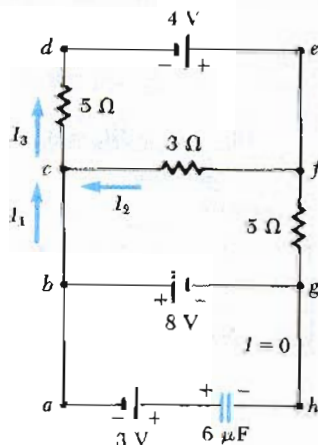


Figura 28.13 (Ejemplo 28.8) Circuito de multimallas. Obsérvese que la regla de malla puede ser aplicada a cualquier malla cerrada, incluyendo una que contenga al capacitor.

Como  $I_2$  es negativa, concluimos que  $I_2$  va de  $c$  a  $f$  a través de la resistencia de  $3\ \Omega$ . Utilizando este valor de  $I_2$  en (3) y (1) dan los siguientes valores para  $I_1$  e  $I_3$ :

$$I_1 = 1.38\ \text{A} \quad I_3 = 1.02\ \text{A}$$

En condiciones de equilibrio, el capacitor representa un circuito abierto, y no existe corriente en la rama  $ghab$ .

b) ¿Cuál es la carga en el capacitor?

Se puede aplicar la segunda regla de Kirchhoff a la malla  $abgha$  (o a cualquier malla que contenga al capacitor) para determinar la diferencia de potencial  $V_c$  a través del capacitor:

$$-8\ \text{V} + V_c - 3\ \text{V} = 0$$

$$V_c = 11.0\ \text{V}$$

Como  $Q = CV_c$ , se encuentra que la carga en el capacitor es igual a:

$$Q = (6\ \mu\text{F})(11.0\ \text{V}) = 66.0\ \mu\text{C}$$

¿Por qué el lado izquierdo del capacitor está cargado positivamente?

**Ejercicio 3** Determinése el voltaje a través del capacitor al recorrer cualquier otra malla, tal como la malla externa.

**Respuesta** 11.0 V.

## 28.4 CIRCUITOS RC

Hasta ahora se han considerado circuitos con corriente constante, o sea los llamados *circuitos de estado estacionario*. Ahora se estudiarán circuitos que contienen condensadores, en los cuales la corriente puede variar con el tiempo. Cuando una diferencia de potencial se aplica por vez primera a un capacitor, la rapidez con que se carga depende de su capacitancia y de la resistencia del circuito.

### Carga de un capacitor

Considérese el circuito en serie de la figura 28.14. Supóngase que el capacitor está inicialmente descargado. No existe corriente cuando el interruptor  $S$  está abierto (Fig. 28.14b). Si el interruptor se cierra al  $t = 0$ , la carga comenzará a fluir, produciendo una corriente en el circuito, y el capacitor comenzará a cargarse (Fig. 28.14c). Obsérvese que durante el proceso de carga, las cargas no saltan a través de las placas del capacitor ya que el espacio entre las placas representa un circuito abierto. Por el contrario, la carga se trasfiere de una placa a la otra a través de la resistencia, el interruptor y la batería hasta que el capacitor está totalmente cargado. El valor de la carga máxima depende de la fem de la batería. Una vez que se alcanza la carga máxima, la corriente en el circuito es cero.

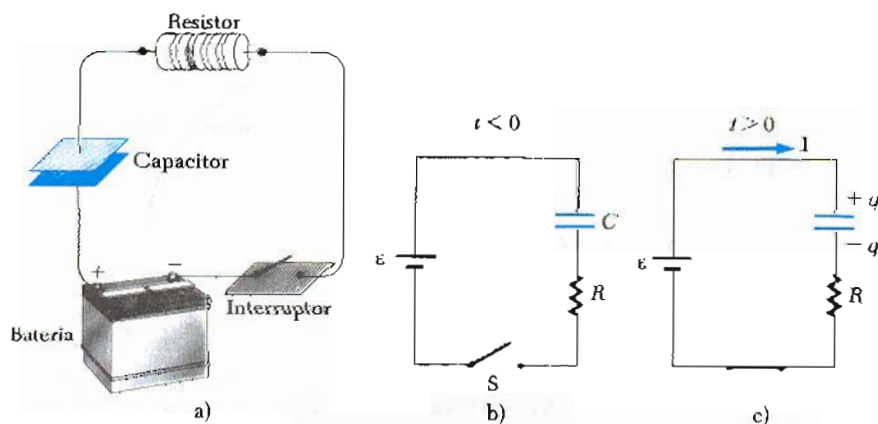


Figura 28.14 a) Un capacitor en serie con una resistencia, una batería y un interruptor. b) Diagrama representativo de este circuito antes de cerrar el interruptor,  $t < 0$ . c) Diagrama del circuito después de cerrar el interruptor,  $t > 0$ .

Para establecer esta discusión sobre una base cuantitativa, se aplica la segunda regla de Kirchhoff al circuito *después* de que el interruptor es cerrado. Esto da

$$\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0 \quad (28.9)$$

donde  $IR$  es la caída de potencial a través de la resistencia y  $q/C$  es la caída de potencial a través del capacitor. Obsérvese que  $q$  e  $I$  son valores *instantáneos* de la carga y la corriente, respectivamente, cuando el capacitor está siendo cargado.

Se puede utilizar la ecuación 28.9 para determinar la corriente inicial en el circuito y la máxima carga en el capacitor. Al  $t = 0$ , cuando el interruptor es cerrado, la carga en el capacitor es cero, y de la ecuación 28.9 se encuentra que la corriente inicial en el circuito,  $I_0$ , es máxima e igual a

#### Corriente máxima

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (\text{para corriente } t = 0) \quad (28.10)$$

A este tiempo, *la caída de potencial es íntegramente a través de la resistencia*. Después, cuando el capacitor está cargado a su máxima carga  $Q$ , las cargas cesan de fluir y la carga en el circuito es cero y *la caída de potencial es enteramente a través del capacitor*. Sustituyendo  $I = 0$  en la ecuación 28.9 se obtiene la siguiente expresión para  $Q$

#### Carga máxima en el capacitor

$$Q = C\mathcal{E} \quad (\text{carga máxima}) \quad (28.11)$$

Para determinar una expresión analítica para la dependencia del tiempo de carga y la corriente, se debe resolver la ecuación 28.9, una ecuación que contiene las variables  $q$  e  $I$ . Para hacer esto, se deriva la ecuación 28.9 con respecto al tiempo. Como es constante,  $d\mathcal{E}/dt = 0$  y se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR \right) = 0 - \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} - R \frac{dI}{dt} = 0$$

Recordando que  $I = dq/dt$ , se puede expresar esta ecuación en la forma

$$\begin{aligned} R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} &= 0 \\ \frac{dI}{I} &= -\frac{1}{RC} dt \end{aligned} \quad (28.12)$$

Como  $R$  y  $C$  son constantes, esto puede ser integrado utilizando las condiciones iniciales de que para  $t = 0$ ,  $I = I_0$ :

$$\begin{aligned} \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \\ \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) &= -\frac{t}{RC} \end{aligned}$$

#### Corriente contra tiempo

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad (28.13)$$

donde  $e$  es la base de los logaritmos naturales e  $I_0 = \mathcal{E}/R$  es la corriente inicial.

Para determinar la carga en el capacitor como función del tiempo, se puede sustituir  $I = dq/dt$  en la ecuación 28.13 e integrar una vez más:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

$$dq = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} dt$$

Al integrar esta expresión puede utilizarse la condición de que  $q = 0$  para  $t = 0$ :

$$\int_0^q dq = \frac{\mathcal{E}}{R} \int_0^t e^{-t/RC} dt$$

Al integrar el lado derecho de la expresión, se utiliza el hecho de que  $\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$ . El resultado de la integración da

$$q(t) = C\mathcal{E}[1 - e^{-t/RC}] = Q[1 - e^{-t/RC}] \quad (28.14)$$

donde  $Q = C\mathcal{E}$  es la *máxima* carga en el capacitor.

Las gráficas de las ecuaciones 28.13 y 28.14 se muestran en la figura 28.15. Obsérvese que la carga es cero para  $t = 0$  y que tiende al valor máximo  $C\mathcal{E}$  para  $t \rightarrow \infty$  (Fig. 28.15a). Por otro lado, la corriente tiene su valor máximo  $I_0 = \mathcal{E}/R$  para  $t = 0$  y decae exponencialmente hasta cero cuando  $t \rightarrow \infty$  (Fig. 28.15b). La cantidad  $RC$ , que aparece en el exponencial de la ecuación 28.13 y 28.14, se llama la **constante de tiempo**,  $\tau$ , del circuito. Ésta representa el tiempo que tomará la corriente para decrecer hasta  $1/e$  de su valor inicial, es decir, en un tiempo  $\tau$ ,  $I = e^{-1}I_0 = 0.37I_0$ . En un tiempo  $2\tau$ ,  $I = e^{-2}I_0 = 0.135I_0$ , y así sucesivamente. Del mismo modo, en un tiempo  $\tau$  la carga aumentará desde cero hasta  $C\mathcal{E}[1 - e^{-1}] = 0.63 C\mathcal{E}$ .

El siguiente análisis dimensional demuestra que  $\tau$  tiene unidades de tiempo:

$$[\tau] = [RC] = \left[ \frac{V}{I} \times \frac{Q}{V} \right] = \left[ \frac{Q}{Q/T} \right] = [T]$$

Carga contra tiempo para un capacitor que está siendo cargado

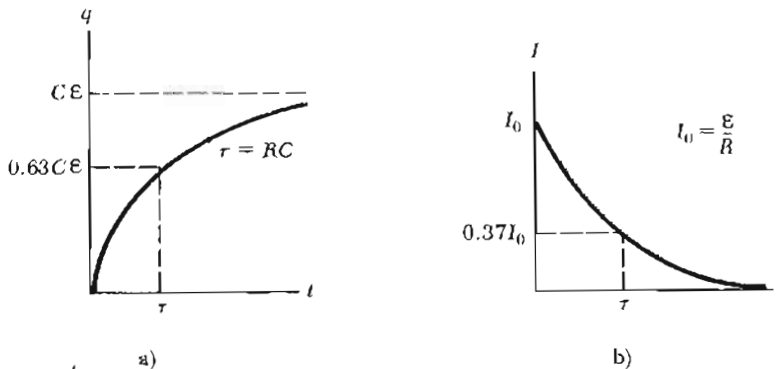
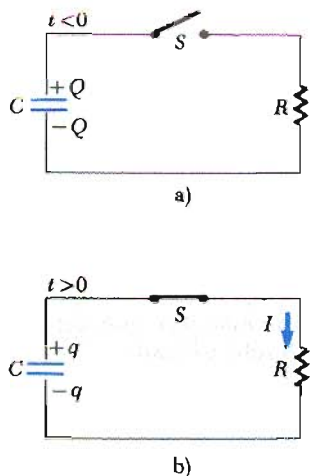


Figura 28.15 a) Gráfica de la carga del capacitor contra el tiempo para el circuito de la figura 28.14. Después de una constante de tiempo,  $\tau$ , la carga es 63% del valor máximo,  $C\mathcal{E}$ . La carga se aproxima a este valor cuando el tiempo tiende al infinito. b) Gráfica de la corriente contra el tiempo para el circuito RC de la figura 28.14. La corriente tiene su valor máximo,  $I_0 = \mathcal{E}/R$ , para  $t = 0$  y decrece hasta cero exponencialmente cuando  $t$  tiende al infinito. Después de una constante de tiempo,  $\tau$ , la corriente decrece hasta 37% de su valor inicial.



El trabajo realizado por la batería durante el proceso de carga es  $Q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$ . Después de que el capacitor está totalmente cargado, la energía almacenada en el capacitor es  $\frac{1}{2}Q\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$ , la que es justo la mitad del trabajo realizado por la batería. Se deja como problema demostrar que la otra mitad de la energía suministrada por la batería se transforma en calor joule en la resistencia (Probl. 82).



### Descarga de un capacitor

Ahora considérese el circuito de la figura 28.16, que consta de un capacitor con una carga inicial  $Q$ , una resistencia y un interruptor. Cuando el interruptor está abierto (Fig. 28.16a), existe una diferencia de potencial  $Q/C$  a través del capacitor y una diferencia de potencial cero a través de la resistencia ya que  $I = 0$ . Si el interruptor se cierra al tiempo  $t = 0$ , el capacitor comienza a descargarse a través de la resistencia. En algún tiempo durante la descarga, la corriente en el circuito es  $I$  y la carga en el capacitor es  $q$  (Fig. 28.16b). De la segunda regla de Kirchhoff, se ve que la caída de potencial a través de la resistencia,  $IR$ , debe ser igual a la diferencia de potencial a través del capacitor,  $q/C$ :

$$IR = \frac{q}{C} \tag{28.15}$$

Figura 28.16 a) Capacitor cargado conectado a una resistencia y a un interruptor abierto para  $t < 0$ . b) Después de que el interruptor se cierra, una corriente no estable circula por el circuito en la dirección que se muestra y la carga del capacitor decrece exponencialmente con el tiempo.

Sin embargo, la corriente en el circuito debe ser igual a la rapidez de *decrecimiento* de la carga en el capacitor. Es decir,  $I = -dq/dt$ , y así la ecuación 28.15 viene a dar

$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt \tag{28.16}$$

Integrando esta expresión y utilizando el hecho de que  $q = Q$  para  $t = 0$  se obtiene:

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Q e^{-t/RC} \tag{28.17}$$

### Carga contra el tiempo para un capacitor que se descarga.

Diferenciando la ecuación 28.17 con respecto al tiempo se tiene la corriente como función del tiempo:

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \tag{28.18}$$

donde la corriente inicial  $I_0 = Q/RC$ . Por lo tanto, se ve que la carga del capacitor y la corriente decaen exponencialmente a una rapidez caracterizada por la constante de tiempo  $\tau = RC$ .

**EJEMPLO 28.9** Carga de un capacitor en un circuito RC

Un capacitor descargado y una resistencia se conectan en serie con una batería como se muestra en la figura 28.17. Si  $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ ,  $C = 5 \mu\text{F}$  y  $R = 8 \times 10^3 \Omega$ , determínese la constante de tiempo del circuito, la máxima carga en el capacitor, la máxima corriente en el circuito y la carga y la corriente como función del tiempo.

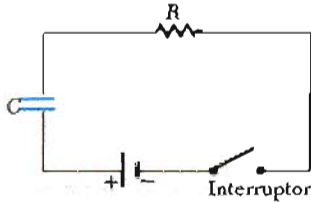


Figura 28.17 (Ejemplo 28.9) El interruptor de este circuito serie RC se cierra al  $t = 0$

**Solución** La constante de tiempo del circuito es  $\gamma = RC = (8 \times 10^3 \Omega)(5 \times 10^{-6} \text{ F}) = 4 \text{ s}$ . La máxima carga en el capacitor es  $Q = C\mathcal{E} = (5 \times 10^{-6} \text{ F})(12 \text{ V}) = 60 \mu\text{C}$ . La máxima corriente en el circuito es  $I_0 = \mathcal{E}/R = (12 \text{ V})/(8 \times 10^3 \Omega) = 15 \mu\text{A}$ . Utilizando estos valores y las ecuaciones 28.13 y 28.14, se encuentra que

$$q(t) = 60[1 - e^{-t/4}] \mu\text{C}$$

$$I(t) = 15 e^{-t/4} \mu\text{A}$$

Las gráficas de estas funciones se dan en la figura 28.18.

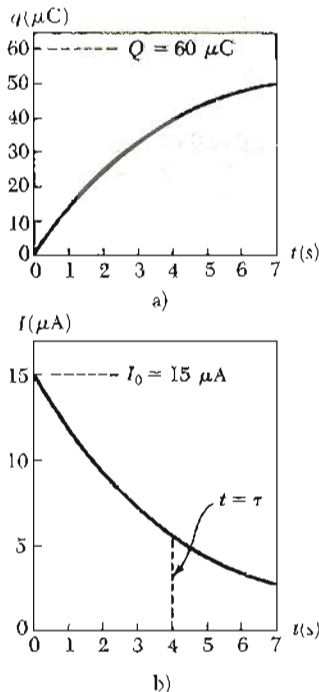


Figura 28.18 (Ejemplo 28.9) Gráficas de: a) carga contra tiempo y b) corriente contra tiempo para el circuito de la figura 28.17, con  $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ ,  $R = 8 \times 10^3 \Omega$  y  $C = 5 \mu\text{F}$ .

**Ejercicio 4** Calcúlese la carga en el capacitor y la corriente en el circuito después de que ha transcurrido una constante de tiempo.

**Respuesta**  $37.9 \mu\text{F}$ ,  $5.52 \mu\text{A}$ .

**EJEMPLO 28.10** Descarga de un capacitor en un circuito RC

Considérese el capacitor  $C$  descargándose a través de la resistencia  $R$  como en la figura 28.16. a) ¿Después de cuántas constantes de tiempo la carga en el capacitor será la cuarta parte de su valor inicial?

**Solución** La carga en el capacitor varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación 28.17,

$$q(t) = Qe^{-t/RC}$$

donde  $Q$  es la carga inicial en el capacitor. Para determinar el tiempo que tomaría la carga en caer hasta una cuarta parte de su valor inicial, se sustituye  $q(t) = Q/4$  en esta expresión y se despeja para  $t$ :

$$\frac{1}{4}Q = Qe^{-t/RC}$$

o

$$\frac{1}{4} = e^{-t/RC}$$

Tomando logaritmos de ambos lados, se encuentra que

$$-\ln 4 = -\frac{t}{RC}$$

o

$$t = RC \ln 4 = 1.39RC$$

b) La energía almacenada en el capacitor decrece con el tiempo cuando se está descargando. ¿Después de cuántas constantes de tiempo la energía almacenada se reduciría la cuarta parte de su valor inicial?

**Solución** Utilizando las ecuaciones 28.12 y 28.17 se puede expresar la energía almacenada en el capacitor en cualquier tiempo como

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-2t/RC} = U_0 e^{-2t/RC}$$

donde  $U_0$  es la energía inicial almacenada en el capacitor. Como en el inciso a), ahora considérese  $U = U_0/4$  y despéjese  $t$ :

$$\frac{1}{4}U_0 = U_0 e^{-2t/RC}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-2t/RC}$$

Nuevamente, tomando logaritmos de ambos lados y despejando  $t$  se obtiene

$$t = \frac{1}{2}RC \ln 4 = 0.693RC$$

**Ejercicio 5** ¿Después de cuántas constantes de tiempo la corriente en un circuito RC caerá hasta la mitad de su valor inicial?

**Respuesta**  $0.693RC$

**EJEMPLO 28.11 Calor perdido en una resistencia**

Un capacitor de  $5 \mu\text{F}$  se carga a una diferencia de potencial de  $800 \text{ V}$  y entonces se descarga a través de una resistencia de  $25 \text{ k}\Omega$ , como en la figura 28.16. ¿Cuál es la energía total que se pierde como calor joule en la resistencia cuando el capacitor es totalmente descargado?

**Solución** Se resolverá este problema en dos formas. El primer método, que es el más simple, es observar que la energía inicial del sistema es igual a la energía almacenada en el capacitor, y está dada por  $C\mathcal{E}^2/2$ . Cuando el capacitor está totalmente descargado, la energía almacenada en él es cero. Como la energía se conserva, la energía inicialmente almacenada en el capacitor se transforma en energía térmica disipada en la resistencia. Utilizando los valores dados para  $C$  y  $\mathcal{E}$ , se encuentra que:

$$\text{Energía} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}(5 \times 10^{-6} \text{ F})(800 \text{ V})^2 = 1.60 \text{ J}$$

El segundo método, que es más difícil pero más instructivo, es observar que como el capacitor se descarga a través de la resistencia, la rapidez a la cual el calor se genera en la resistencia (o la potencia perdida) está dada por  $RI^2$ , donde  $I$  es la corriente instantánea dada por la ecuación

28.18. Como la potencia está definida por rapidez de cambio de energía, se concluye que la energía perdida en la resistencia en forma de calor debe ser igual a la integral respecto del tiempo de  $RI^2 dt$ . Es decir

$$\text{Energía} = \int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty R(I_0 e^{-t/RC})^2 dt$$

Al evaluar esta integral, se observa que la corriente inicial  $I_0 = \mathcal{E}/R$ , y todos los parámetros son constantes excepto  $t$ . Entonces, se encuentra que

$$\text{Energía} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt$$

La integral sobre esta expresión tiene el valor de  $RC/2$ , de donde se tiene

$$\text{Energía} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

la cual concuerda con la obtenida por el método más simple, como debe ser. Obsérvese que este segundo método puede usarse para determinar la energía perdida como calor en cualquier tiempo después de cerrar el interruptor, reemplazando simplemente el límite superior en la integral por el valor de tiempo específico  $t$ .

**Ejercicio 6** Muéstrase que la integral dada en este ejemplo tiene un valor de  $RC/2$ .

**28.5 INSTRUMENTOS ELÉCTRICOS**

**Amperímetro**

La corriente es una de las más importantes cantidades que uno debe medir en un circuito eléctrico. El dispositivo que mide la corriente se llama **amperímetro**. La corriente debe ser medida al pasar directamente en el amperímetro, así que éste debe estar en serie con la corriente que se va a medir, como en la figura 28.19. Los alambres deben cortarse de manera que hagan conexiones hacia el amperímetro. Cuando se utiliza un amperímetro para medir corriente directa, debe asegurarse que la corriente entre por la terminal positiva del instrumento y salga por la terminal negativa. **Idealmente, un amperímetro debería tener resistencia cero para no alterar la corriente que va a medirse.** En el circuito de la figura 28.19, esta condición se cumple si la resistencia del amperímetro es pequeña comparada con  $R_1 + R_2$ . Como cualquier amperímetro siempre tiene alguna resistencia, su presencia en el circuito reducirá ligeramente la corriente del valor que tuviera cuando el amperímetro no está presente.

**Voltímetro**

El dispositivo que mide las diferencias de potencial se llama **voltímetro**. La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en un circuito puede medirse simplemente colocando las terminales del voltímetro en estos dos puntos sin cortar el circuito, como en la figura 8.20. La diferencia de potencial a través

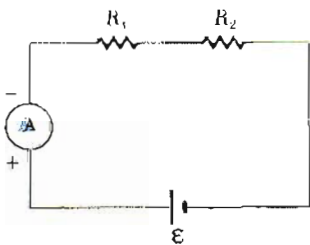


Figura 28.19 La corriente en el circuito puede medirse con un amperímetro conectado en serie con la resistencia y la batería. Un amperímetro ideal tiene resistencia cero.

de la resistencia  $R_2$  se mide conectando el voltímetro en paralelo con  $R_2$ . De nuevo, es necesario observar la polaridad del instrumento. La terminal positiva del voltímetro debe ser conectada en el extremo de la resistencia de mayor potencial, y la terminal negativa al extremo de la resistencia de menor potencial. Un voltímetro ideal tiene resistencia infinita así que no hay corriente pasando a través de él. En la figura 28.20, esta condición se cumple si la resistencia del voltímetro es muy grande comparada con  $R_2$ . En la práctica, si esta condición no se cumple, uno puede hacer las correcciones necesarias si se conoce la resistencia del voltímetro.

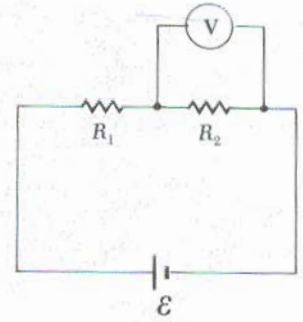


Figura 28.20 La diferencia de potencial a través de la resistencia puede ser medida con un voltímetro conectado en paralelo con la resistencia. Un voltímetro ideal tiene resistencia infinita y no afecta al circuito.

### Galvanómetro

El galvanómetro es el principal componente utilizado en la construcción de los amperímetros y voltímetros. La estructura esencial del tipo más común, llamado *galvanómetro de D'Arsonval*, se muestra en la figura 28.21. Éste consta de una bobina de alambre montada de tal forma que está libre para rotar sobre un pivote en un campo magnético proporcionado por un imán permanente. La operación básica del galvanómetro hace uso del hecho de que un momento de una fuerza actúa sobre una espira con corriente en presencia de un campo magnético. (La razón de esto será expuesta con detalle en el capítulo 29.) El momento de una fuerza experimentada por la bobina es proporcional a la corriente que circula por ella. Esto significa que a mayor corriente, el momento de una fuerza será mayor y la bobina tenderá a rotar más hasta que el resorte detenga su rotación. Por lo tanto, la cantidad deflectada es proporcional a la corriente. Si el instrumento está apropiadamente calibrado, puede ser utilizado en unión con otros elementos de circuito para medir corrientes o diferencias de potencial.

Un galvanómetro típico por sí mismo no siempre es susceptible de utilizarse como amperímetro. Una de las principales razones de esto es que un galvanómetro por lo general tiene una resistencia de unos  $60 \Omega$ . La resistencia del amperímetro sería muy grande cuando se colocara en el circuito. Esto es fácil de entender al considerar el siguiente ejemplo. Supóngase que se construye un circuito simple en serie que consta de una batería de  $3 \text{ V}$  y una resistencia de  $3 \Omega$ . La corriente en ese circuito es de  $1 \text{ A}$ . Sin embargo, si se inserta un galvanómetro de  $60 \Omega$  en el circuito para medir la corriente, la resistencia total del circuito sería de  $63 \Omega$  y la corriente se reduciría a  $0.048 \text{ A}$ .

Un segundo factor que limita el uso del galvanómetro como amperímetro es el hecho de que un galvanómetro típico dará una deflexión de escala completa para corrientes muy bajas, del orden de  $1 \text{ mA}$  o menor. En consecuencia, el galvanómetro no puede ser utilizado directamente para medir corrientes mayores que ésta. Sin embargo, uno puede convertir un galvanómetro en un amperímetro al colocar una resistencia,  $R_p$ , en paralelo con el galvanómetro como en la figura

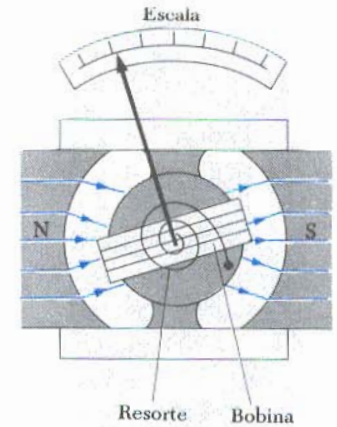


Figura 28.21 Principales componentes de un galvanómetro de D'Arsonval. Cuando una corriente pasa a través de una bobina colocada en un campo magnético, el momento de una fuerza magnética hace que la bobina gire. El ángulo que gira la bobina es proporcional a la corriente que pasa a través de ella, y por lo tanto, al momento de una fuerza sobre el resorte.

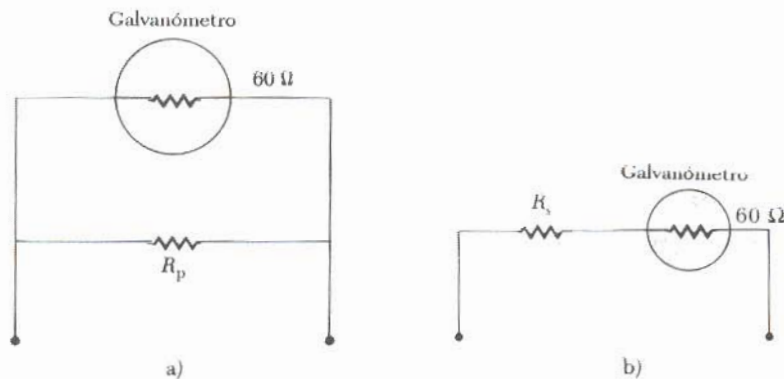
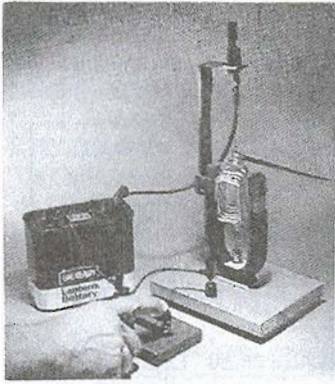


Figura 28.22 a) Cuando un galvanómetro se utiliza como amperímetro, una resistencia  $R_p$  se conecta en paralelo con el galvanómetro. b) Cuando un galvanómetro se utiliza como voltímetro, una resistencia  $R_s$ , se conecta en serie con el galvanómetro.



Modelo a gran escala de un galvanómetro móvil. ¿Por qué la bobina rota alrededor del eje vertical después de cerrar el interruptor? (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

28.22a. El valor de  $R_p$ , a veces llamado **resistencia de derivación**, debe ser muy pequeño comparado con la resistencia del galvanómetro, así que la mayor parte de la corriente que se va a medir pasa a través de la resistencia de derivación. Por ejemplo, si se desea medir una corriente de 2 A con un galvanómetro cuya resistencia es  $60 \Omega$ , la resistencia de derivación debería tener un valor de  $0.03 \Omega$ .

Un galvanómetro también puede ser utilizado como voltímetro al añadirle una resistencia externa,  $R_s$ , en serie con él, como en la figura 28.22b. En este caso, la resistencia externa debe tener un valor mucho mayor comparado con la resistencia del galvanómetro. Esto hará que la presencia del galvanómetro no sea significativa al ser medido el voltaje. Por ejemplo, si se desea medir un voltaje máximo de 100 V con un galvanómetro cuya resistencia es  $60 \Omega$ , la resistencia en serie externa debería tener un valor aproximado de  $10^5 \Omega$ .

Cuando un voltímetro se construye con varios rangos posibles, uno selecciona varios valores de  $R_s$  al utilizar el interruptor que está conectado a un preselector de resistencias. El valor de  $R_s$  aumenta cuando el máximo voltaje a ser medido aumenta.

### \*28.6 EL PUENTE DE WHEATSTONE

No

Es posible medir con exactitud resistencias desconocidas utilizando un dispositivo llamado **puente de Wheatstone** (Fig. 28.23). El circuito consta de una resistencia desconocida  $R_x$ , tres resistencias,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  (donde  $R_1$  es una resistencia calibrada variable), un galvanómetro y una fuente de fem. El principio de su operación es muy simple. La resistencia conocida  $R_1$  se varía hasta que la lectura en el galvanómetro sea cero, es decir, hasta que no exista corriente de  $a$  a  $b$ . En estas condiciones se dice que el puente está balanceado. Como el potencial en el punto  $a$  debe ser igual al potencial en el punto  $b$  cuando el puente está balanceado, la diferencia de potencial a través de  $R_1$  debe ser igual a la diferencia de potencial a través de  $R_2$ . Del mismo modo, la diferencia de potencial a través de  $R_3$  debe ser igual a la diferencia de potencial a través de  $R_x$ . De estas consideraciones, se ve que

$$(1) \quad I_1 R_1 = I_2 R_2$$

$$(2) \quad I_1 R_2 = I_2 R_x$$

Dividiendo (1) entre (2) se eliminan las corrientes, y despejando  $R_x$  se encuentra

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \tag{28.19}$$

Como  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  son cantidades conocidas,  $R_x$  puede ser calculada. Existe un número de aparatos semejantes que aplican la medición nula, como el puente de

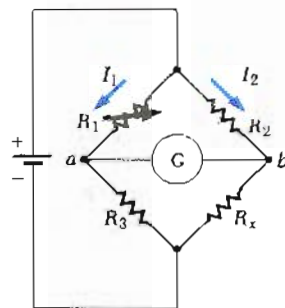
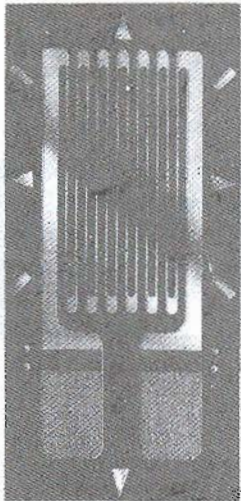


Figura 28.23 Diagrama del circuito del puente de Wheatstone. Este circuito se utiliza a menudo para medir una resistencia desconocida  $R_x$  en términos de las resistencias conocidas  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Cuando el puente de Wheatstone está balanceado no existe corriente en el galvanómetro.



Calibrador de esfuerzos, aparato para análisis experimental de esfuerzos, que consta de una bobina delgada de alambre rodeada de un plástico flexible. Los esfuerzos son medidos al detectar cambios en la resistencia de la bobina cuando las tiras se doblan. La medida de la resistencia se realiza con la calibración de uno de los elementos del puente de Wheatstone. Estos dispositivos son comúnmente utilizados en las modernas balanzas electrónicas para medir la masa de los objetos.

capacitancia (utilizado para medir capacitancias desconocidas). Estos aparatos no requieren el empleo de medidores calibrados y pueden utilizarse con cualquier fuente de fem.

Cuando deben medirse resistencias muy grandes (del orden de  $10^3$ ), el método del puente de Wheatstone se dificulta por razones técnicas. Como resultado de los avances recientes en la tecnología de dispositivos de estado sólido, como el transistor de efecto de campo, los instrumentos electrónicos modernos son capaces de medir resistencias tan elevadas como  $10^{13} \Omega$ . Tales instrumentos están diseñados para tener una resistencia efectiva extremadamente alta entre sus terminales de entrada. Por ejemplo, en la mayoría de los multímetros digitales las resistencias de entrada  $10^{10} \Omega$  son comunes.



Voltajes, corrientes y resistencias son frecuentemente medidos con multímetros digitales como el que se muestra en esta fotografía. (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

## 28.7 POTENCIÓMETRO

Un potenciómetro es un circuito que se utiliza para medir una fem desconocida,  $\mathcal{E}_x$ , comparándola con una fem conocida. La figura 28.24 muestra los componentes esenciales de un potenciómetro. El punto  $d$  representa un contacto deslizante utilizado para variar la resistencia (y por lo tanto, la diferencia de potencial) entre los puntos  $a$  y  $d$ . En una versión común de potenciómetro, llamado **potenciómetro de alambre-deslizable**, la resistencia variable es un alambre con un contacto puntual  $d$  en alguna posición del alambre. Las otras componentes requeridas en este circuito son un galvanómetro, una fuente de poder con una fem  $\mathcal{E}_0$ , una batería de referencia estándar y una fem desconocida  $\mathcal{E}_x$ .

Con las direcciones de las corrientes que se ven en la figura 28.24, se ve de la primera regla de Kirchhoff que la corriente a través de la resistencia  $R_x$  es  $I - I_x$ , donde  $I$  es la corriente en la rama inferior (a través de la batería de fem  $\mathcal{E}_0$ ) e  $I_x$  es la corriente en la rama superior. La segunda regla de Kirchhoff aplicada a la malla  $abcd$  da

$$-\mathcal{E}_x + (I - I_x)R_x = 0$$

donde  $R_x$  es la resistencia entre los puntos  $a$  y  $d$ . El contacto deslizante en  $d$  se ajusta ahora hasta que la lectura en el galvanómetro sea cero (circuito balanceado). En estas condiciones, la corriente en el galvanómetro y en la celda desconocida es **cero** ( $I_x = 0$ ), y la diferencia de potencial entre  $a$  y  $d$  igual al fem  $\mathcal{E}_x$  desconocida. Es decir,

$$\mathcal{E}_x = IR_x$$

Ahora, la celda de fem desconocida se reemplaza por una celda estándar de fem conocida  $\mathcal{E}$ , y se repite el procedimiento. Esto es, se mueve el contacto en  $d$  hasta que el balance sea obtenido. Si  $R_s$  es la resistencia entre  $a$  y  $d$  cuando se alcanza el balance, entonces

$$\mathcal{E}_s = IR_s$$

donde se asume que  $I$  permanece igual.

Combinando esta expresión con la ecuación anterior,  $\mathcal{E}_x = IR_x$ , se ve que

$$\mathcal{E}_x = \frac{R_x}{R_s} \mathcal{E}_s \quad (28.20)$$

Este resultado muestra que la fem desconocida puede ser determinada conociendo la fem de la celda estándar y la razón de las dos resistencias.

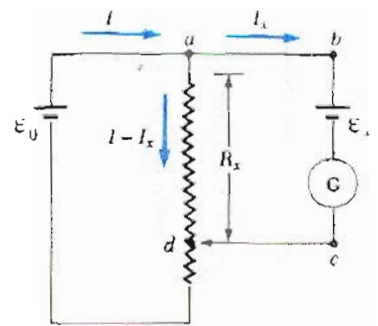


Figura 28.24 Diagrama del circuito para un potenciómetro. El circuito se utiliza para medir una fem desconocida  $\mathcal{E}_x$  en términos de una fem conocida  $\mathcal{E}_s$ , dada por una celda estándar.

Si la resistencia es un alambre de resistividad  $\rho$ , su resistencia puede variarse utilizando el contacto deslizable para variar la longitud del circuito. Al sustituir  $R_x = \rho L_x/A$  y  $R_s = \rho L_s/A$ , la ecuación 28.20 se reduce a

$$\mathcal{E}_x = \frac{L_x}{L_s} \mathcal{E}_s \quad (28.21)$$

De acuerdo con este resultado, la fem desconocida puede obtenerse por la medida de dos longitudes de alambre y la magnitud de una fem estándar.

## No • 28.8 ALAMBRADO DOMÉSTICO Y SEGURIDAD ELÉCTRICA

Los circuitos domésticos representan la aplicación más práctica de las ideas que se han presentado en este capítulo referentes al análisis de circuitos. En nuestro mundo de aparatos eléctricos, resulta útil comprender las necesidades de potencia y las limitaciones de los sistemas eléctricos convencionales, así como las medidas de seguridad que deben ponerse en práctica para evitar accidentes.

En una instalación convencional, la compañía generadora de energía eléctrica, la cual se distribuye a los hogares mediante un par de líneas de potencia. Cada usuario se conecta en paralelo a estas líneas, como se muestra en la figura 28.25. La diferencia de potencial entre estos alambres es de unos 120 V. El voltaje alterna en el tiempo, pero para la presente exposición se supondrá un voltaje de corriente directa estacionaria (cd). (Los voltajes y corrientes alternos se analizarán en el capítulo 33.) Uno de los alambres se conecta a tierra, y el potencial del alambre "vivo" oscila relativo a tierra.<sup>2</sup>

Un medidor y un interruptor automático (o en las instalaciones más antiguas, un fusible) se conecta en serie con el alambre que entra a la casa, como se indica en la figura 28.25. El interruptor automático de circuito es un dispositivo que protege contra una corriente demasiado alta, la cual podría ocasionar sobrecalentamientos e incendios. Cuando la corriente excede cierto valor de seguridad (normalmente de 15 A o 30 A), el interruptor automático desconecta la fuente de voltaje respecto de la carga. Algunos interruptores automáticos aplican el principio de la tira bimetálica que se analizó en el capítulo 19.

El alambre y el interruptor automático se seleccionan con todo cuidado para satisfacer las demandas de corriente del circuito. Si un circuito va a conducir corrientes tan altas como 30 A, deberá seleccionarse un alambre grueso y un interruptor apropiado para que pueda manejarse esta corriente. Otros circuitos separados, que en general se utilizan para dar energía a lámparas y aparatos pequeños, a menudo sólo requieren 15 A. Por lo tanto, cada circuito debe tener su propio interruptor automático para acomodarse a diversas condiciones de carga.

Como ejemplo, considérese un circuito en el que se encuentra un tostador, un horno de microondas y un calefactor (correspondiendo a  $R_1$ ,  $R_2$  . . . en la figura 28.25). Se puede calcular la corriente en cada aplicación utilizando la expresión  $P = IV$ . El tostador etiquetado como de 1000 W, consumiría una corriente de  $1000/120 = 8.33$  A. El horno de microondas, clasificado de 800 W, consumiría una corriente de 6.67 A, y el calefactor eléctrico, etiquetado como de 1300 W, consumiría una corriente de 10.8 A. Si los tres aparatos operan simultáneamente, consumirían una corriente total de 25.8 A. Por lo tanto, el circuito debería alambrarse de modo que pueda soportar al menos esta corriente. Con el fin de absorber una pequeña carga adicional, por ejemplo, una lámpara de 100 W, debe instalarse un circuito a 30 A. De otro modo, uno podría operar el horno de

<sup>2</sup> La frase *alambrado vivo* es común en el argot para los conductores cuyo potencial está por arriba o por abajo del nivel de tierra.

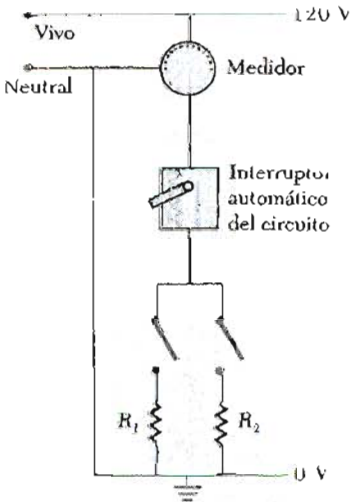


Figura 28.25 Diagrama del alambrado de un circuito doméstico. Las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  representan utensilios u otros aparatos eléctricos, los cuales operan con un voltaje aplicado de 120 V.

microondas y el tostador en un circuito de 20 A y el calentador eléctrico en otro circuito separado de 20 A.

Muchos aparatos de trabajo pesado, como estufas eléctricas y secadores de ropa, requieren 240 V para su operación. La compañía generadora de energía eléctrica proporciona este voltaje, suministrando un tercer cable vivo que se encuentra a 120 V por debajo del potencial de tierra (Fig. 28.26). Como consecuencia, la diferencia de potencial entre los alambres vivos es de 240 V. Un aparato que funciona con esta línea de 240 V requiere la mitad de corriente que necesita uno que funciona con una línea de 120 V. Por lo tanto, en circuitos que pueden utilizar voltajes altos se puede usar alambres más delgados.

### Seguridad eléctrica

Cuando el alambre vivo de una toma de corriente eléctrica se conecta directo a tierra, se cierra el circuito y se presenta una condición de cortocircuito. Si esto sucediera de manera accidental, un interruptor automático de circuitos que funcionara apropiadamente abriría tal circuito. Por otra parte, es posible que una persona se electrocute al tocar un alambre vivo y hacer contacto con tierra, lo cual sucede con no poca frecuencia debido a la existencia de cordones deteriorados o de otros conductores expuestos. Un buen contacto con tierra podría realizarse si la persona está tocando un tubo de agua (que normalmente está al potencial de tierra), o bien si está parada con los pies húmedos, ya que el agua no es buen aislante. Estas situaciones deben evitarse a cualquier costo.

Los toques eléctricos pueden tener por resultado quemaduras fatales o hacer que funcionen mal los músculos de los órganos vitales, como el corazón. El grado del daño que reciba el cuerpo depende de la magnitud de la corriente, del tiempo durante el cual actúe, del lugar del contacto y de la parte del cuerpo por la cual circule. Corrientes de 5 mA o menores pueden dar la sensación de toque, pero por lo común dañan poco o nada. Si la corriente es mayor de 10 mA, los músculos de la mano se contraen y la persona puede quedar incapacitada de soltar el alambre vivo. Si una corriente aproximadamente de 100 mA pasa por el cuerpo durante sólo unos segundos, el resultado puede ser fatal. Corrientes tan altas como estas últimas paralizan los músculos respiratorios y la persona no podría respirar. En algunos casos, corrientes de casi 1 A a través del cuerpo pueden producir quemaduras serias (a veces fatales). En la práctica, no tocar alambres vivos podría ser una medida seria de seguridad.

Muchas tomas de corriente de 120 V están diseñadas para admitir cordones con enchufes trifásicos. (Esta característica se requiere en todas las instalaciones eléctricas nuevas.) Una de estas patas es el alambre vivo y dos están conectadas a tierra. La conexión adicional a tierra se suministra como una característica de seguridad. Muchos aparatos tienen un cordón de energía de 120 V con un enchufe trifásico, con un alambre de tierra conectado en forma directa a la cubierta del aparato. Si el alambre vivo se pone en contacto accidentalmente en cortocircuito con tierra (lo cual ocurre a menudo cuando el aislamiento del alambre está desgastado), la corriente tomará el camino de baja resistencia a través del aparato hasta tierra. En contraste, si es el caso de que el aparato no esté debidamente aterrizado y el corto ocurre, cualquier persona que esté en contacto con el aparato experimentará un toque eléctrico ya que su cuerpo presenta una trayectoria de menor resistencia hacia la tierra.

Contactos especiales llamados interruptores por falta de tierra (GFI) se están instalando en las cocinas, baños, recámaras y estancias de las nuevas casas. Estos dispositivos están diseñados para proteger a las personas de las descargas eléctricas por corrientes pequeñas (de aproximadamente 5 mA) enviándolas a tierra. Cuando un exceso de corriente es detectado, la corriente se corta (se interrumpe) en menos de un milisegundo.

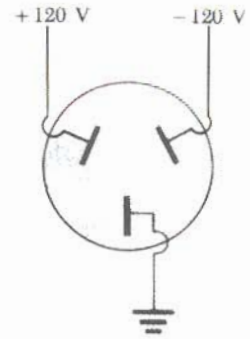


Figura 28.26 Conexiones de potencia para aparatos de 240 V.



## RESUMEN

La **fem** de una batería es igual al voltaje a través de sus terminales cuando la corriente es cero. Es decir, la fem es equivalente al voltaje a circuito abierto de la batería.

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistencias conectadas en **serie** está dada por

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (28.6)$$

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistencias conectadas en **paralelo** está dado por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (28.8)$$

A los circuitos complejos que tienen más de una malla es conveniente analizarlos utilizando dos reglas sencillas llamadas **reglas de Kirchhoff**:

1. La suma de las corrientes que entren en cualquier nodo (unión) debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del nodo (unión).
2. La suma de las diferencias de potencial a través de cada elemento alrededor de cualquier malla (trayectoria de circuito cerrado) debe ser cero.

La primera regla se deduce de la **conservación de la carga**. La segunda regla equivale al establecimiento de la **conservación de la energía**.

Cuando una resistencia se recorre en la dirección de la corriente, el cambio en el potencial,  $\Delta V$ , a través de la resistencia es  $-IR$ . Si la resistencia se recorre en dirección opuesta a la corriente,  $\Delta V = +IR$ .

Si una fuente de fem se recorre en la dirección de la fem (de negativo a positivo) el cambio en el potencial es  $+\mathcal{E}$ . Si se recorre en dirección opuesta a la fem (de positivo a negativo), el cambio en el potencial es  $-\mathcal{E}$ .

Si un capacitor se carga con una batería de fem  $\mathcal{E}$  a través de una resistencia  $R$ , la corriente en el circuito y la carga en el capacitor varían con el tiempo de acuerdo con las expresiones:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad (28.13)$$

$$q(t) = Q[1 - e^{-t/RC}] \quad (28.14)$$

donde  $Q = C\mathcal{E}$  es la carga **máxima** en el capacitor. El producto  $RC$  se llama la **constante de tiempo** del circuito.

Si un capacitor se descarga a través de una resistencia  $R$ , la carga y la corriente decrecen exponencialmente en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Q - e^{-t/RC} \quad (28.17)$$

$$I(t) = I_0 - e^{-t/RC} \quad (28.18)$$

donde  $I_0 = Q/RC$  es la corriente inicial en el circuito y  $Q$  es la carga inicial en el capacitor.

Un **punto de Wheatstone** es un circuito particular que puede utilizarse para medir resistencias desconocidas.

Un **potenciómetro** es un circuito que puede ser utilizado para medir fem desconocidas.

## Resistencias en serie

## Resistencias en paralelo

## Reglas de Kirchhoff

## Corriente contra tiempo

## Carga contra tiempo

## PREGUNTAS

1. Explique la diferencia entre resistencia de carga y resistencia interna para una batería.
2. ¿En qué condiciones la diferencia de potencial a través de las terminales de una batería es igual a la fem? ¿Puede el voltaje de las terminales exceder la fem? Explique.
3. ¿Siempre es la dirección de la corriente a través de la batería desde el negativo hasta el positivo en las terminales? Explique.
4. Se tienen dos juegos de luces navideñas. Para el juego A, cuando un foco se quita (o se funde), los focos restantes permanecen encendidos. Para el juego B, cuando se quita un foco, los focos restantes no operan. Explique la diferencia en el alambrado de los juegos de luces.
5. ¿Cómo conectaría resistencias de tal forma que la resistencia equivalente sea mayor que las resistencias individuales? Dé un ejemplo.
6. ¿Cómo conectaría resistencias de tal forma que la resistencia equivalente sea menor que las resistencias individuales? Dé un ejemplo.
7. Dados tres focos y una batería, dibuje los diferentes circuitos eléctricos que se puedan realizar.
8. Cuando las resistencias están conectadas en serie, ¿qué es lo mismo para cada resistencia: la diferencia de potencial, la corriente o la potencia?
9. Cuando las resistencias están conectadas en paralelo, ¿qué es lo mismo para cada resistencia: la diferencia de potencial, la corriente o la potencia?
10. ¿Qué ventaja representa utilizar dos resistencias idénticas en paralelo conectadas en serie con otro par paralelo idéntico, respecto de utilizar una sola resistencia?
11. ¿Los faros de un automóvil están conectados en serie o en paralelo? ¿Cómo podría explicarlo?
12. Una lámpara incandescente conectada a una fuente de 120 V con un cordón de extensión corto, dará más iluminación que si se conecta a la misma fuente con un cordón de extensión más largo. Dé una explicación.
13. Dos leyes de conservación dan cuerpo a las reglas de Kirchhoff. ¿Cuáles son éstas?
14. ¿Cuándo puede una diferencia de potencial a través de una resistencia ser positiva?
15. Con referencia a la figura 28.13, suponga que el alambre entre  $g$  y  $h$  es reemplazado por una resistencia de  $10 \Omega$ . Explique por qué este cambio no afectaría las corrientes calculadas en el ejemplo 28.8.
16. Con referencia a la figura 28.27, describa qué sucede con el foco después de que el interruptor es cerrado. Suponga que el capacitor tiene una gran capacitancia y que inicialmente está descargado, y suponga que el foco encenderá cuando se conecta directo a través de las terminales de la batería.
17. ¿Cuál debería ser la resistencia interna de un amperímetro y de un voltímetro ideal? ¿Por qué serían estos medidores ideales?
18. ¿Para medir qué, son utilizados el puente de Wheatstone y el potenciómetro?
19. Aun cuando las resistencias internas de la fem desconocida y la conocida fueron despreciadas en el tratamiento

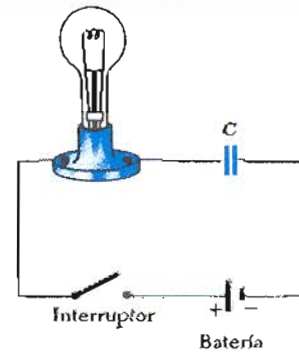
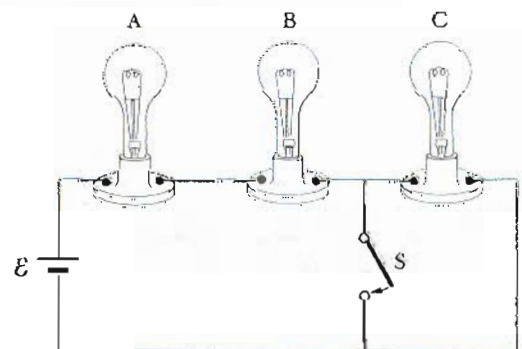


Figura 28.27 (Pregunta 16).

del potenciómetro (Sec. 28.7), en realidad no es necesaria esta suposición. Explique por qué las resistencias internas no intervienen en la medición.

20. ¿Por qué es peligroso accionar el interruptor de un foco cuando se está tocando un tubo de agua?
21. ¿Por qué es posible que un pájaro se pose sobre un cable de alto voltaje sin que se electrocute?
22. Suponga que cae de un edificio y en su trayecto de bajada se toma de un cable de alto voltaje. Suponiendo que el alambre lo sostiene, ¿se electrocutaría? ¿Si el alambre se rompiera, debería continuar agarrado de un extremo del alambre cuando cae?
23. ¿Podría un fusible trabajar para proteger suficientemente un aparato si se conecta en paralelo a éste?
24. ¿Qué ventajas se tienen al operar con 120 V sobre operar con 240 V? ¿Qué desventajas se tienen?
25. Cuando los electricistas trabajan con alambres potencialmente vivos, con frecuencia usan los dorsos de sus manos o las partes posteriores de sus dedos para mover tales alambres. ¿Por qué supone que aplican esa técnica?
26. ¿Qué procedimiento aplicaría para tratar de salvar a una persona que estuviera agarrada de un alambre vivo de alto voltaje sin poner en peligro su propia vida?
27. ¿A qué niveles de corriente se experimenta: a) sensación de toque, b) contracción involuntaria de músculos, c) parálisis del músculo respiratorio y d) serias y posiblemente fatales quemaduras? En la práctica, ¿qué nivel de corriente se considera como seguro?



(Pregunta 30).

28. Si la corriente que fluye a través del cuerpo es la que determina la severidad de los toques, ¿por qué se ven letreros de "peligro: alto voltaje" en lugar de "alta corriente" en lugares cercanos a aparatos eléctricos?
29. Suponga que está volando un cometa cuando éste se estrella con un cable de alto voltaje. ¿Qué factores determinan cuán grande es el toque que recibe?
30. Un circuito en serie consta de tres lámparas idénticas

conectadas a una batería como en el circuito que se muestra en seguida. Cuando el interruptor  $S$  se cierra: a) ¿qué sucede con la intensidad de las lámparas  $A$  y  $B$ ? b) ¿Qué sucede con la intensidad de la lámpara  $C$ ? c) ¿Qué sucede con la corriente en el circuito? d) ¿Qué sucede con la caída de voltaje a través de las tres lámparas? e) ¿La potencia disipada en el circuito aumenta, disminuye o permanece igual?

## PROBLEMAS

### Sección 28.1 Fuerza electromotriz

1. Una batería con una fem de 12 V y una resistencia interna de  $9 \Omega$  se conecta a través de una resistencia de carga  $R$ . Si la corriente en el circuito es de 1.4 A, ¿cuál es el valor de  $R$ ?
2. ¿Qué potencia se disipa en la resistencia interna de la batería en el circuito descrito en el problema 1?
3. a) ¿Cuál es la corriente en una resistencia de  $5.6 \Omega$  conectada a una batería con resistencia interna de  $0.2 \Omega$ , si el voltaje en las terminales de la batería es de 10 V? b) ¿Cuál es la fem de la batería?
4. Si la fem de una batería es de 15 V y una corriente de 60 A se mide cuando la batería se pone en cortocircuito, ¿cuál es la fem de la batería?
5. La corriente en una malla que tiene una resistencia  $R_1$  es de 2 A. La corriente se reduce hasta 1.6 A cuando se añade una resistencia  $R_2 = 3 \Omega$  en serie con la resistencia  $R_1$ . ¿Cuál es el valor de  $R_1$ ?
6. Una batería tiene una fem de 6 V y una resistencia interna de  $0.2 \Omega$ . Cuando sus terminales se conectan a una resistencia de carga, la corriente en el circuito es de 2 A. ¿Cuál es el valor de la resistencia de carga?
7. Una batería tiene una fem de 15 V. El voltaje en las terminales de la batería es de 11.6 V cuando se liberan 20 W de potencia en una resistencia externa  $R$ . a) ¿Cuál es el valor de  $R$ ? b) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?
8. ¿Qué diferencia de potencial será medido a través de una resistencia de carga cuando se conecta a través de una batería de 5 V de fem y  $0.45 \Omega$  de resistencia interna?
9. Cierta batería tiene 42 V de voltaje a circuito abierto. Una resistencia de carga reduce el voltaje en las terminales a 35 V. ¿Cuál es el valor de la resistencia interna de la batería?

### Sección 28.2 Resistencias en serie y en paralelo

10. Dos elementos de circuito cuyas resistencias son  $R_1$  y  $R_2$  se conectan en serie con una batería de 6 V y un interruptor. La resistencia interna de la batería es de  $5 \Omega$ ,  $R_1 = 132 \Omega$ , y  $R_2 = 56 \Omega$ . a) ¿Cuál es la corriente a través de  $R_1$  cuando el interruptor está cerrado? b) ¿cuál es el voltaje a través de  $R_2$  cuando el interruptor está cerrado?
11. Los componentes del problema 10 se reconectan en paralelo a través de la batería. a) ¿Cuál es el voltaje a

- través de  $R_1$  cuando el interruptor está cerrado? b) ¿Cuál es la corriente en cada resistencia?
12. Un técnico tiene una caja llena de resistencias, todas con la misma resistencia  $R$ . ¿Cuántos valores de resistencia equivalente podría hacer el técnico utilizando todas las combinaciones de una a tres resistencias independientes? Exprese la resistencia equivalente de cada combinación en términos de  $R$ .
13. Tres resistencias ( $10 \Omega$ ,  $20 \Omega$  y  $30 \Omega$ ) se conectan en paralelo. La corriente total a través de este conjunto es de 5 A. a) ¿Cuál es la caída de voltaje a través del conjunto? b) ¿Cuál es la corriente en cada resistencia?
14. Determine la resistencia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  en la figura 28.28.

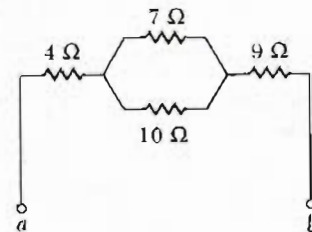


Figura 28.28 (Problemas 14 y 15).

15. Una diferencia de potencial de 34 V se aplica entre los puntos  $a$  y  $b$  en la figura 28.28. Calcule la corriente en cada resistencia.
16. Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  en la figura 28.29.

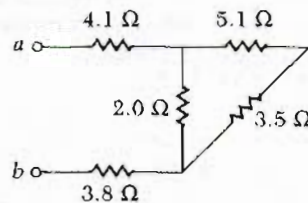


Figura 28.29 (Problema 16).

17. Evalúe la resistencia efectiva del circuito de resistencias ideales de la figura 28.30, considerando que todos tienen una resistencia  $R$ .
18. Sea  $R_1 = 11 \Omega$ ,  $R_2 = 22 \Omega$  y la batería tiene un voltaje en las terminales de 33 V para las figuras 28.4 y 28.5. a) En el circuito en paralelo de la figura 28.5, ¿cuál resis-

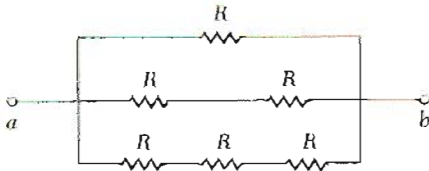


Figura 28.30 (Problema 17).

tencia utiliza mayor potencia? b) Verifique que la suma de las potencias ( $I^2R$ ) usadas por cada resistencia es igual a la potencia suministrada por la batería ( $IV$ ). c) En el circuito en serie, figura 28.4, ¿cuál resistencia utiliza más potencia? d) Verifique que la suma de las potencias ( $I^2R$ ) usada por cada resistencia es igual a la potencia que suministra la batería ( $P = IV$ ). e) ¿Cuál es la configuración de circuito que utiliza más potencia?

19. Calcule la potencia disipada en cada resistencia en el circuito de la figura 28.31.

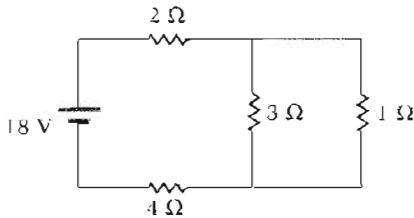


Figura 28.31 (Problema 19).

20. Determine la resistencia equivalente entre las terminales  $a$  y  $b$  para el circuito de la figura 28.32.

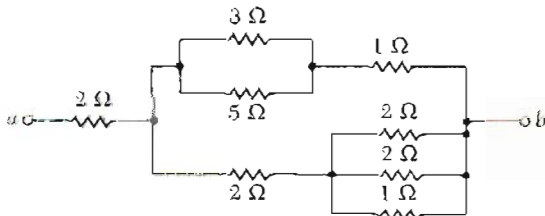


Figura 28.32 (Problema 20).

21. Considere el circuito de la figura 28.33. Encuentre: a) la corriente en la resistencia de  $20 \Omega$  y b) la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ .

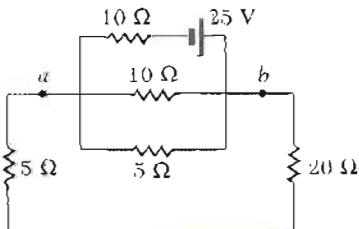


Figura 28.33 (Problema 21).

22. Considere la combinación de resistencias en la figura 28.34. a) Determine la resistencia entre los puntos  $a$  y  $b$ . b) Si la corriente en la resistencia de  $5 \Omega$  es de  $1 \text{ A}$ , ¿cuál es la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ ?

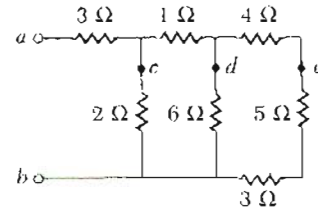


Figura 28.34 (Problemas 22, 23 y 71)

23. En la figura 28.34, conecte los puntos  $c$ ,  $d$  y  $e$  con un conductor y entonces encuentre la resistencia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$ . (Sugerencia: redibuje el circuito.)
24. Tres resistencias de  $100 \Omega$  se conectan como se muestra en la figura 28.35. La máxima potencia que puede ser disipada en cualquiera de las resistencias es  $25 \text{ W}$ . a) ¿Cuál es el máximo voltaje que puede ser aplicado en las terminales  $a$  y  $b$ ? b) Para el voltaje determinado en el inciso a, ¿cuál es la potencia disipada en cada resistencia? ¿Cuál es la potencia total disipada?

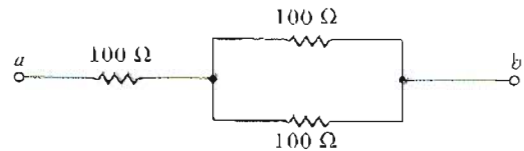


Figura 28.35 (Problema 24).

### Sección 28.3 Reglas de Kirchhoff

Las corrientes no necesariamente están en las direcciones que se muestran en algunos circuitos.

25. Determine la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  en el circuito de la figura 28.36.

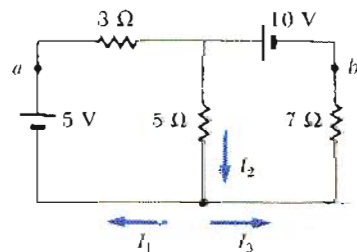


Figura 28.36 (Problemas 25 y 26).

26. Encuentre las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  del circuito de la figura 28.36.  
 27. Determine la corriente en cada una de las ramas de la figura 28.37.

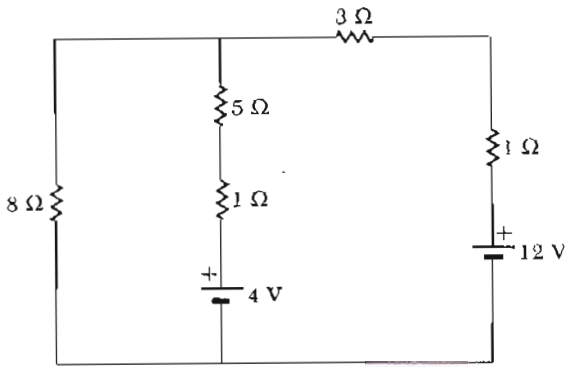


Figura 28.37 (Problema 27).

28. Determine la diferencia de potencial  $V_{ab}$  para el circuito de la figura 28.38.

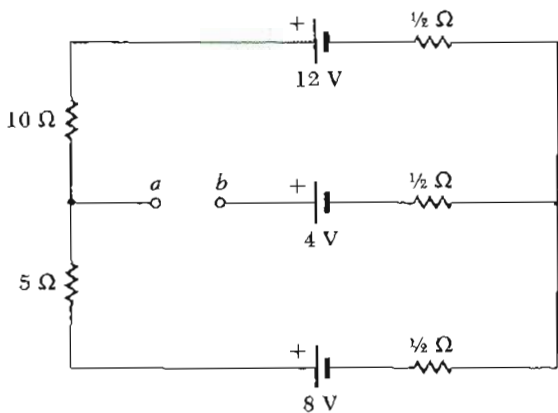


Figura 28.38 (Problema 28).

29. Las dos corrientes en las ramas del circuito de la figura 28.39 son  $I_1 = \frac{1}{3}A$  y  $I_2 = \frac{1}{2}A$ . Determine las fem  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$ .

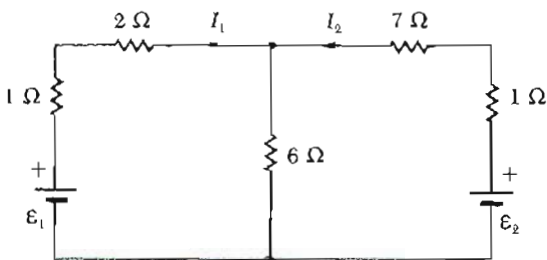


Figura 28.39 (Problema 29).

30. a) Calcule el valor de  $R$  para el circuito de la figura 28.40.  
 b) Determine la corriente en las resistencias de  $6\Omega$  y  $4\Omega$ .

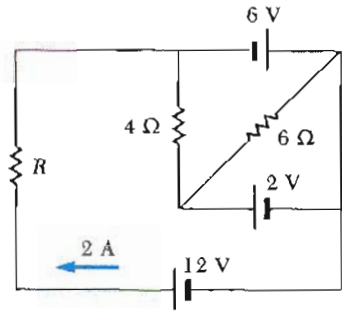


Figura 28.40 (Problema 30).

31. Calcule cada una de las corrientes desconocidas  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  para el circuito de la figura 28.41.

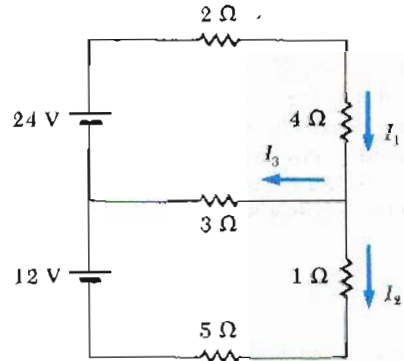


Figura 28.41 (Problema 31).

32. El amperímetro de la figura 28.42 tiene una lectura de  $2A$ . Determine las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  y el valor de  $\mathcal{E}$ .

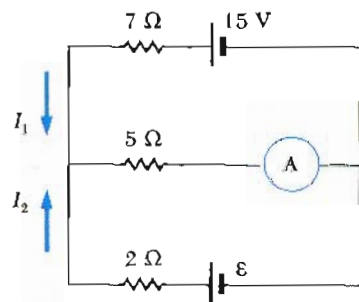


Figura 28.42 (Problema 32).

33. ¿Cuál es la fem  $\mathcal{E}_1$  de la batería en el circuito de la figura 28.43?

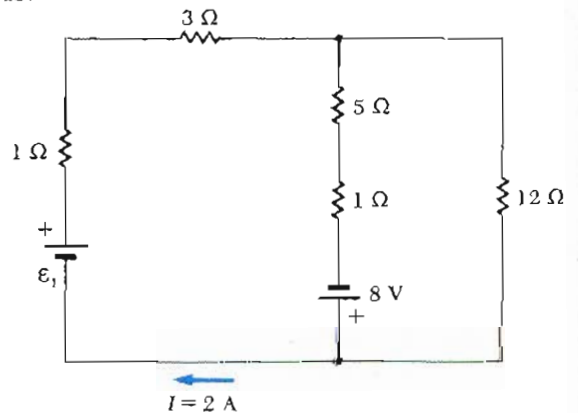


Figura 28.43 (Problema 33).

34. Considere el circuito de la figura 28.44. Encuentre los valores de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .

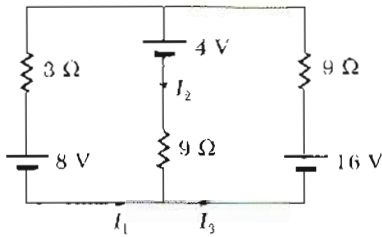


Figura 28.44 (Problemas 34 y 35).

35. a) Determine el valor de  $I_1$  e  $I_3$  en el circuito de la figura 28.44 si la batería de 4 V se reemplaza por un capacitor de  $5 \mu\text{F}$ . b) Encuentre la carga en el capacitor.

36. Determine la corriente que fluye a través de cada una de las baterías en el circuito de la figura 28.45.

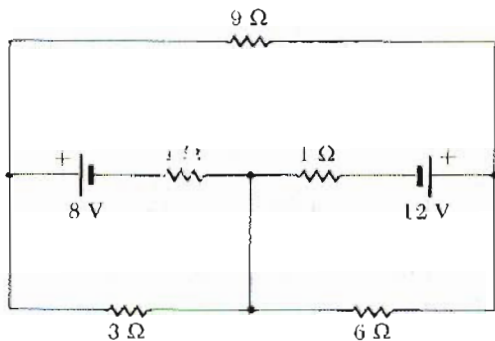


Figura 28.45 (Problema 36).

37. Para el circuito de la figura 28.46, calcule: a) la corriente en la resistencia de  $2 \Omega$  y b) la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ .

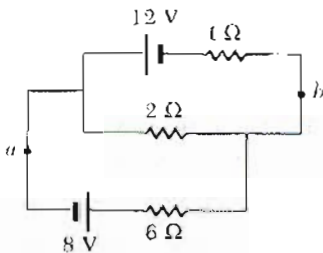


Figura 28.46 (Problema 37).

38. Determine el valor de la corriente en cada una de las cuatro resistencias de la figura 28.47.

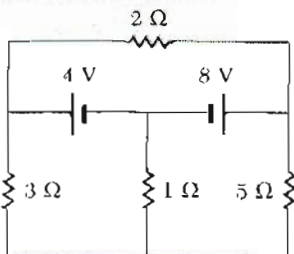


Figura 28.47 (Problema 38).

39. Calcule la potencia disipada en cada resistencia en el circuito de la figura 28.48.

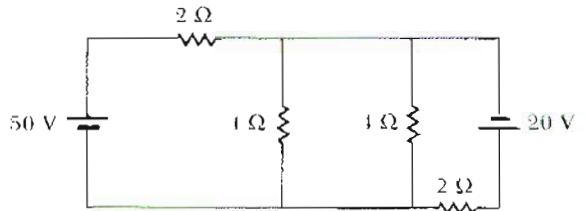


Figura 28.48 (Problema 39).

40. Calcule la potencia en cada resistencia en el circuito de la figura 28.49.

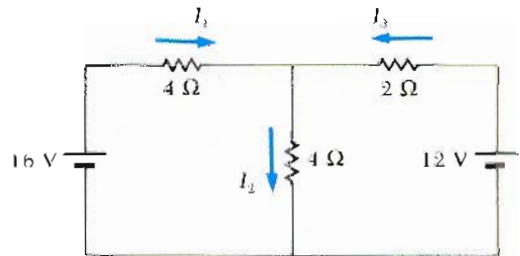


Figura 28.49 (Problema 40).

Sección 28.4 Circuitos RC

- 41. Considere un circuito RC en el cual el capacitor esta siendo cargado por una batería conectada en el circuito. En cinco constantes de tiempo, ¿qué porcentaje de la carga final está en el capacitor?
- 42. Considere un circuito serie RC (Fig. 28.14) para el cual  $R = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $C = 5 \mu\text{F}$  y  $\mathcal{E} = 30 \text{ V}$ . Determine: a) la constante de tiempo del circuito y b) la carga máxima en el capacitor después de que el interruptor se cierra.
- 43. El interruptor en el circuito RC descrito en el problema 42 se cierra en  $t = 0$ . Encuentre la corriente en la resistencia  $R$  10 s después de cerrado el interruptor.
- 44. Al  $t = 0$ , un capacitor descargado de capacitancia  $C$  es conectado a través de una resistencia  $R$  hasta una batería de fem constante  $\mathcal{E}$  (Fig. 28.50). a) ¿Cuánto tiempo le tomará al capacitor llegar a la mitad de su carga final? b) ¿Cuánto tiempo le tomará al capacitor llegar a su carga total?

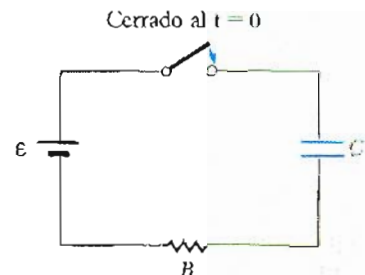


Figura 28.50 (Problema 44).

- 45. Una resistencia de  $4\ \text{M}\Omega$  y un capacitor de  $3\ \mu\text{F}$  se conectan en serie con una fuente de poder de  $12\ \text{V}$ . a) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito? b) Exprese la corriente y la carga en el capacitor como función del tiempo.
- 46. Un capacitor de  $750\ \text{pF}$  tiene una carga inicial de  $6\ \mu\text{C}$ . Si se conecta entonces a una resistencia de  $150\ \text{M}\Omega$  y se deja descargar a través de la resistencia. a) ¿Cuál es la constante de tiempo para el circuito? b) Exprese la corriente y la carga en el capacitor como función del tiempo.
- 47. El circuito ha sido conectado como se muestra en la figura 28.51 hace mucho tiempo. a) ¿Cuál es el voltaje a través del capacitor? b) Si la batería se desconectara, cuánto tiempo le tomaría al capacitor descargarse hasta  $1/10$  de su voltaje inicial?

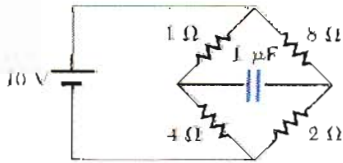


Figura 28.51 (Problema 47).

- 48. Un capacitor de  $2 \times 10^{-3}\ \mu\text{F}$  con una carga inicial de  $5.1\ \mu\text{C}$  se descarga a través de una resistencia de  $1300\ \Omega$ . a) Calcule la corriente a través de la resistencia  $9\ \mu\text{s}$  después de que la resistencia se conecta a través de las terminales del capacitor. b) ¿Qué carga queda en el capacitor después de  $8\ \mu\text{s}$ ? c) ¿Cuál es la máxima corriente a través de la resistencia?
- 49. Considere la combinación capacitor-resistencia descrita en el problema 48. a) ¿Cuánta energía está almacenada inicialmente en el capacitor? b) Si el capacitor se descarga por completo a través de la resistencia, ¿cuánta energía se disipará como calor en la resistencia?
- 50. Un capacitor en un circuito RC se carga hasta 60% de su máximo valor en  $0.9\ \text{s}$ . ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?
- 51. Los materiales dieléctricos utilizados en la fabricación de condensadores se caracterizan por tener una conductividad muy pequeña pero no cero. Por lo tanto, un capacitor cargado perderá lentamente su carga por fuga a través del dieléctrico. Si cierto capacitor de  $3.6\ \mu\text{F}$  fuga carga de tal manera que la diferencia de potencial disminuye hasta la mitad de su valor inicial en  $4\ \text{s}$ , ¿cuál es la resistencia equivalente del dieléctrico?

**Sección 28.5 Instrumentos eléctricos**

- 52. Un típico galvanómetro, que requiere una corriente de  $1.5\ \text{mA}$  para dar una deflexión de escala completa y tiene una resistencia de  $75\ \Omega$ , puede utilizarse para medir corrientes mucho mayores. Para realizar la medida de corrientes mayores sin dañar la sensibilidad del medi-

- dor, una resistencia de derivación relativamente pequeña se conecta en paralelo con el medidor como en la figura 28.22a. La mayor parte de corriente fluirá entonces a través de la resistencia de derivación. Calcule el valor de la resistencia de derivación tal que permita medir al medidor una corriente de  $1\ \text{A}$  a deflexión de escala completa. (Sugerencia: use las leyes de Kirchhoff.)
- 53. El mismo galvanómetro que utilizó en el problema anterior puede usarse para medir voltajes. En este caso una gran resistencia se conecta en serie con el medidor móvil como en la figura 28.22b, el cual en efecto limita la corriente que fluye por el medidor cuando un voltaje grande se aplica. La mayor caída de potencial ocurre a través de la resistencia colocada en serie. Calcule el valor de la resistencia que permita al medidor tener una lectura de  $25\ \text{V}$  a deflexión de escala completa.
- 54. Considere un galvanómetro con resistencia interna de  $60\ \Omega$ . Si el galvanómetro se deflexa a escala completa cuando lleva una corriente de  $0.5\ \text{mA}$ , ¿cuál es el valor de la resistencia que debe colocar en serie con el galvanómetro para que la combinación pueda ser utilizada como voltímetro que tenga una deflexión a escala completa debida a una diferencia de potencial de  $1.0\ \text{V}$ ?
- 55. Suponga que un galvanómetro tiene una resistencia interna de  $60\ \Omega$  y que requiere una corriente de  $0.5\ \text{mA}$  para producir una deflexión a escala completa. ¿Qué resistencia debe colocarse en paralelo con el galvanómetro si la combinación debe servir como amperímetro con una deflexión a escala completa de  $0.1\ \text{A}$ ?
- 56. Un medidor móvil tiene una resistencia interna de  $100\ \Omega$  y da una deflexión a escala completa cuando lleva una corriente de  $25\ \mu\text{A}$ . a) ¿Qué resistencia conectaría en paralelo con el medidor para construir un amperímetro el cual tuviera una deflexión a escala completa para una corriente de  $1\ \text{A}$ ? b) ¿Cuál es la resistencia equivalente del amperímetro?
- 57. Un medidor móvil tiene una resistencia interna de  $50\ \Omega$  y da una deflexión de escala completa cuando lleva una corriente de  $50\ \mu\text{A}$ . a) ¿Qué resistencia se tendría que conectar en serie con el medidor para construir un voltímetro que dé una deflexión a escala completa para  $20\ \text{V}$ ? b) ¿Cuál es la resistencia equivalente de este voltímetro?
- 58. Una corriente de  $25\ \text{mA}$  ocasiona que un galvanómetro móvil se deflexe a escala completa. La resistencia interna es de  $200\ \Omega$ . a) Demuestre por medio de un diagrama de circuito, utilizando dos resistencias y tres interruptores externos, cómo el medidor móvil puede utilizarse como voltímetro en dos intervalos. b) Determine el valor de las resistencias necesarias para hacer el intervalo mayor de  $0-200\ \text{V}$  y el intervalo menor de  $0-20\ \text{V}$ . Indique estos valores en el diagrama.
- 59. Para el mismo medidor móvil dado en el problema anterior, a) demuestre por medio de un diagrama de circuito, utilizando dos resistencias y tres interruptores externos, cómo el medidor puede ser utilizado en dos intervalos como amperímetro. b) Determine los valores de las resistencias necesarias para hacer que la escala mayor sea de  $0-10\ \text{A}$  y que la escala menor sea de  $0-1\ \text{A}$ . Indique estos valores en el diagrama.

**\*Sección 28.6 Puente de Wheatstone**

60. Un puente de Wheatstone del tipo del de la figura 28.23 se utiliza para hacer medidas de precisión de la resistencia de un alambre conductor. La resistencia que aparece en el circuito como  $R_3$  es de  $1\text{ k}\Omega$ . Si el puente se balancea al ajustar  $R_1$  tal que  $R_1 = 2.5 R_2$ , ¿cuál es la resistencia del alambre conector,  $R_x$ ?
61. Considere el caso cuando el puente de Wheatstone de la figura 28.23 no está balanceado. Calcule la corriente a través del galvanómetro cuando  $R_x = R_3 = 7\ \Omega$ ,  $R_2 = 21\ \Omega$  y  $R_1 = 14\ \Omega$ . Suponga que el voltaje a través del puente es de  $70\text{ V}$ , y desprecie la resistencia del galvanómetro.
62. Considere el puente de Wheatstone de la figura 28.23. Cuando el puente está balanceado, la caída de voltaje a través de  $R_x$  es de  $3.2\text{ V}$  e  $I_1 = 200\ \mu\text{A}$ . Si la corriente total requerida a la fuente de poder es de  $500\ \mu\text{A}$ , ¿cuál es el valor de  $R_x$ ?
63. El puente de Wheatstone se balancea cuando  $R_1 = 10\ \Omega$ ,  $R_2 = 20\ \Omega$  y  $R_3 = 30\ \Omega$ . Calcule el valor de  $R_x$ .

**\*Sección 28.7 Potenciómetro**

64. Considere el circuito de potenciómetro de la figura 28.24. Cuando una celda estándar de fem  $1.0186\text{ V}$  se utiliza en el circuito, y la resistencia entre  $a$  y  $d$  es de  $36\ \Omega$ , la lectura en el galvanómetro es cero. Cuando la celda estándar se reemplaza por una fem desconocida, la lectura en el galvanómetro es cero cuando la resistencia se ajusta hasta  $48\ \Omega$ . ¿Cuál es el valor de la fem desconocida?

**\*Sección 28.8 Alambrado doméstico y seguridad eléctrica**

65. Un calentador eléctrico está etiquetado como de  $1500\text{ W}$ , un tostador como de  $750\text{ W}$  y una parrilla eléctrica como de  $1000\text{ W}$ . Los tres aparatos se conectan a un circuito común de  $120\text{ V}$ . a) ¿Cuánta corriente consume cada aparato? b) ¿Es suficiente un circuito de  $25\text{ A}$  en esta situación? Dé una explicación.
66. Un tostador de  $1000\text{ W}$ , un horno de microondas de  $800\text{ W}$  y una cafetera eléctrica de  $500\text{ W}$  están en un mismo contacto de  $120\text{ V}$ . Si el circuito está protegido por un fusible de  $20\text{ A}$ , ¿se funde el fusible si todos los aparatos se utilizan al mismo tiempo?
67. Una extensión de  $8$  pies tiene dos alambres calibre 18 de cobre, cada uno con un diámetro de  $1.024\text{ mm}$ . ¿Cuánta potencia disipa esta extensión cuando lleva una corriente de  $1\text{ A}$ ? b) ¿Cuánta potencia disipa cuando lleva una corriente de  $10\text{ A}$ ?
68. Por razones económicas, en algunas ocasiones se usan alambres de aluminio en lugar de cobre. De acuerdo con el Código Eléctrico Nacional de Estados Unidos, la máxima corriente permitida para un alambre calibre 12 de cobre con aislante de hule es de  $20\text{ A}$ . ¿Cuál sería la máxima corriente permitida en un alambre de aluminio calibre 12 si éste disipa la misma potencia por unidad de longitud que el alambre de cobre?

69. Un calentador de  $4\text{ kW}$  está alambrado para operar a  $240\text{ V}$  con alambre de micromel teniendo una masa total  $M$ . a) ¿Cuánta corriente requiere el calentador? b) ¿Cuánta corriente requeriría a  $120\text{ V}$ ? c) Si un calentador a  $240\text{ V}$ ,  $4\text{ kW}$  y un calentador a  $120\text{ V}$ ,  $4\text{ kW}$  tienen la misma longitud en los alambres resistivos, ¿cuál es la relación de la masa del alambre resistivo en el calentador a  $120\text{ V}$  comparada con la masa del alambre resistivo en el calentador a  $240\text{ V}$ ?

**PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS**

70. ¿Cuál debe ser el valor de  $R_3$  para hacer que la resistencia equivalente entre las terminales  $a$  y  $b$  sea igual a  $R_1$  en el circuito de la figura 28.52?

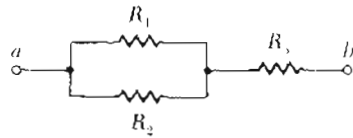
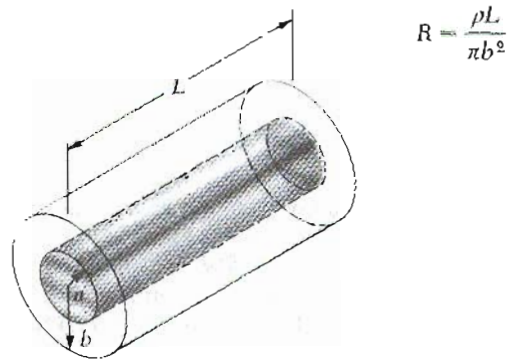


Figura 28.52 (Problema 70).

71. Un voltaje de  $50.4\text{ V}$  se aplica a través de los puntos  $a$  y  $b$  en el circuito de la figura 28.34. ¿Cuál debería ser la lectura en un voltímetro conectado: a) entre los puntos  $a$  y  $c$ , b) entre los puntos  $a$  y  $e$ , y c) entre los puntos  $c$  y  $e$ ?
72. Una barra cilíndrica de material con resistividad uniforme  $\rho_a$  tiene un radio  $a$  y una longitud  $L$ . Un cascarón cilíndrico, de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , de la misma longitud  $L$  y de un material con resistividad uniforme  $\rho_b$ , rodea completamente a la barra. (Véase la figura 28.53.) a) Encuentre una expresión para la resistencia efectiva entre los extremos de la combinación. b) Demuestre que si  $\rho_a = \rho_b = \rho$ , la expresión se reduce a



$$R = \frac{\rho L}{\pi b^2}$$

Figura 28.53 (Problema 72)

73. Tres resistencias, cada una de valor  $3\ \Omega$ , están conectadas en dos diferentes arreglos como se muestra en la figura 28.54. Si el máximo valor permitido de potencia en cada resistencia es  $48\text{ W}$ , calcule la máxima potencia que puede ser disipada por: a) el circuito de la figura 28.54a y b) por el circuito de la figura 28.54b.



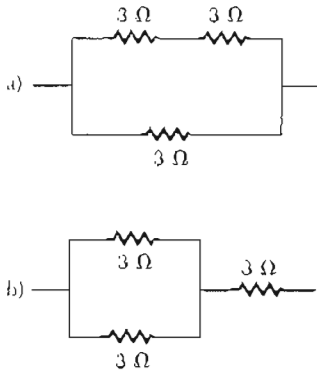


Figura 28.54 (Problema 73).

74. a) Calcule la corriente a través de la batería en la figura 28.55. b) Determine la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*.

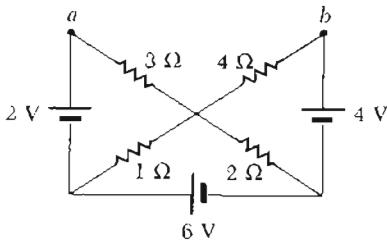


Figura 28.55 (Problema 74).

75. Considere el circuito de la figura 28.56. ¿Cuáles son las lecturas esperadas en el amperímetro y en el voltímetro?

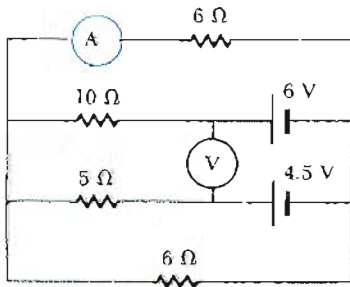


Figura 28.56 (Problema 75).

76. Considere el circuito de la figura 28.57. Calcule: a) la corriente en la resistencia de 4 Ω, b) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*, c) la diferencia de potencial en las terminales de la batería de 4 V y d) la energía térmica disipada en la resistencia de 3 Ω durante 10 min de operación del circuito.

77. El valor de una resistencia *R* se determina utilizando un amperímetro y un voltímetro como se muestra en la figura 28.58. El amperímetro tiene una resistencia de 0.5 Ω y el voltímetro tiene una resistencia de 20 000 Ω. ¿En qué intervalo del valor real de *R* se tendría el valor medido con un 5% de error si la medición es realizada con el circuito de: a) la figura 28.58a y b) la figura 28.58b?

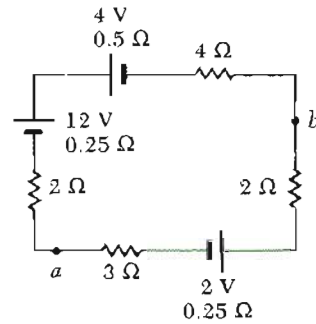


Figura 28.57 (Problema 76).

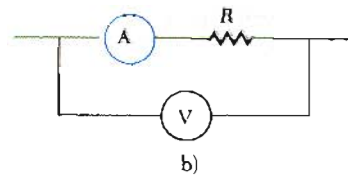
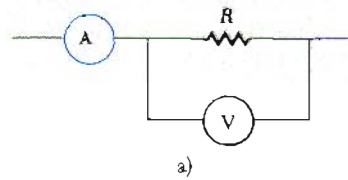


Figura 28.58 (Problema 77).

78. Una fuente de poder *dc* tiene a circuito abierto una fem de 40 V y una resistencia interna de 2 Ω. Se utiliza para cargar dos baterías conectadas en serie, cada una con una fem de 6 V y una resistencia interna de 0.3 Ω. Si la corriente de carga debe ser de 4 A, a) ¿cuál es la resistencia adicional que debería ser conectada en serie? b) Encuentre la potencia perdida en la fuente, en las baterías y en la resistencia adicional. c) ¿Cuánta potencia se convierte en energía química en las baterías?
79. Una batería tiene una fem  $\mathcal{E}$  y una resistencia interna *r*. Una resistencia variable se conecta a través de las terminales de la batería. Encuentre el valor de *R* tal que: a) la diferencia de potencial a través de las terminales sea máxima, b) la corriente en el circuito sea máxima, c) la potencia disipada en la resistencia sea máxima.
80. Considere el circuito de la figura 28.59. a) Calcule la corriente en el resistor de 5 Ω. b) ¿Qué potencia se disipa por el circuito completo? c) Determine la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*. ¿Cuál es el punto que está a mayor potencial?

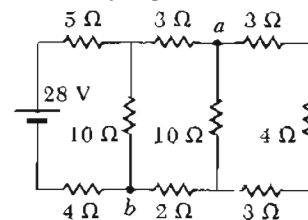


Figura 28.59 (Problema 80).

81. Los valores de las componentes de un circuito simple RC (Fig. 28.14) son los siguientes:  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $R = 2 \times 10^6 \Omega$ , y  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ . En un instante 10 s después de cerrar el circuito, calcule: a) la carga en el capacitor, b) la corriente en la resistencia, c) la rapidez a la cual se almacena la energía en el capacitor y d) la rapidez a la cual debe ser liberada la energía de la batería.
82. Una batería se utiliza para cargar un capacitor a través de una resistencia, como en la figura 28.14. Demuestre que en el proceso de carga del capacitor, la mitad de la energía suministrada por la batería se disipa como calor en la resistencia y la mitad se almacena en el capacitor.
83. El interruptor en el circuito de la figura 28.60a se cierra cuando  $V_c \geq 2V/3$  y se abre cuando  $V_c \leq V/3$ . El voltímetro mostrará un voltaje como el graficado en la figura 28.60b. ¿Cuál es el periodo,  $T$ , de la onda en términos de  $R_A$ ,  $R_B$ , y  $C$ ?

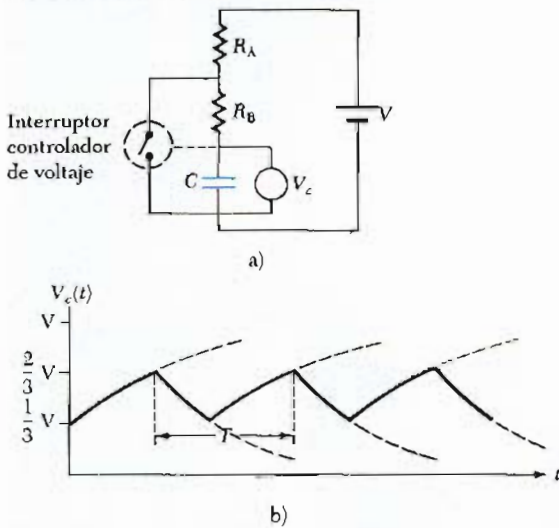


Figura 28.60 (Problema 83).

84. Diseñe un voltímetro de multirango que sea capaz de tener deflexiones a escala completa para las siguientes divisiones de voltaje: a) 20 V, b) 50 V y c) 100 V. Suponga un medidor móvil con resistencia interna de  $60 \Omega$  y que da una deflexión a escala completa para una corriente de 1 mA.
85. Diseñe un amperímetro de multirango que sea capaz de tener una deflexión a escala completa para las siguientes divisiones de corriente: a) 25 mA, b) 50 mA y c) 100 mA. Suponga un medidor móvil con una resistencia interna de  $25 \Omega$  y que da una deflexión a escala completa para una corriente de 1 mA.
86. Un galvanómetro particular se utiliza como voltímetro de 2 V a escala completa cuando una resistencia de  $2500 \Omega$  se conecta en serie con él. Se utiliza como amperímetro de 0.5 A a escala completa cuando una resistencia de  $0.22 \Omega$  se conecta en paralelo con él. Determine la resistencia interna del galvanómetro y la corriente requerida para producir la deflexión de escala completa.

Sugerencia para los problemas del 87 al 90: suponga una corriente, utilice la simetría identificando los puntos con el mismo potencial, conecte estos puntos y vuelva a dibujar el circuito.

87. Encuentre la resistencia equivalente entre dos vértices cualesquiera de una pirámide de seis resistencias de valor  $R$ . (Véase la figura 28.61.)

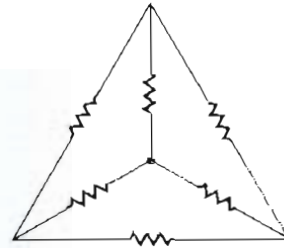


Figura 28.61 (Problemas 87 y 88).

88. Tres vértices de la configuración piramidal de resistencias, como en la figura 28.61, se conectan a un punto común. Determine la resistencia equivalente entre el cuarto vértice y el punto en común.
89. Encuentre la resistencia equivalente entre el centro  $A$  y uno de los seis vértices de conexión de alrededor del hexágono de resistencias, como se muestra en la figura 28.62.

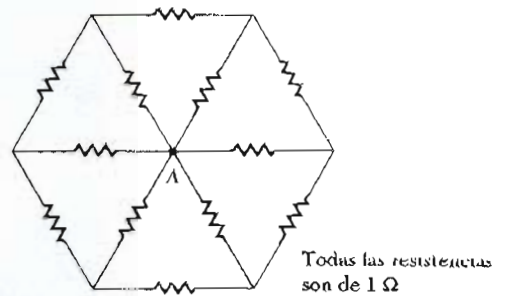


Figura 28.62 (Problema 89).

90. Doce resistencias, cada una de valor  $1 \Omega$ , se conectan de tal forma que quedan en la arista de un cubo, como se muestra en la figura 28.63. Determine la resistencia entre los puntos: a)  $a$  y  $b$ , b)  $a$  y  $c$ , y c)  $b$  y  $c$ .

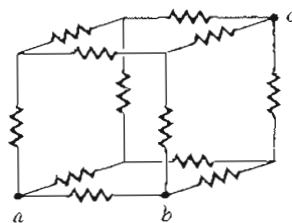
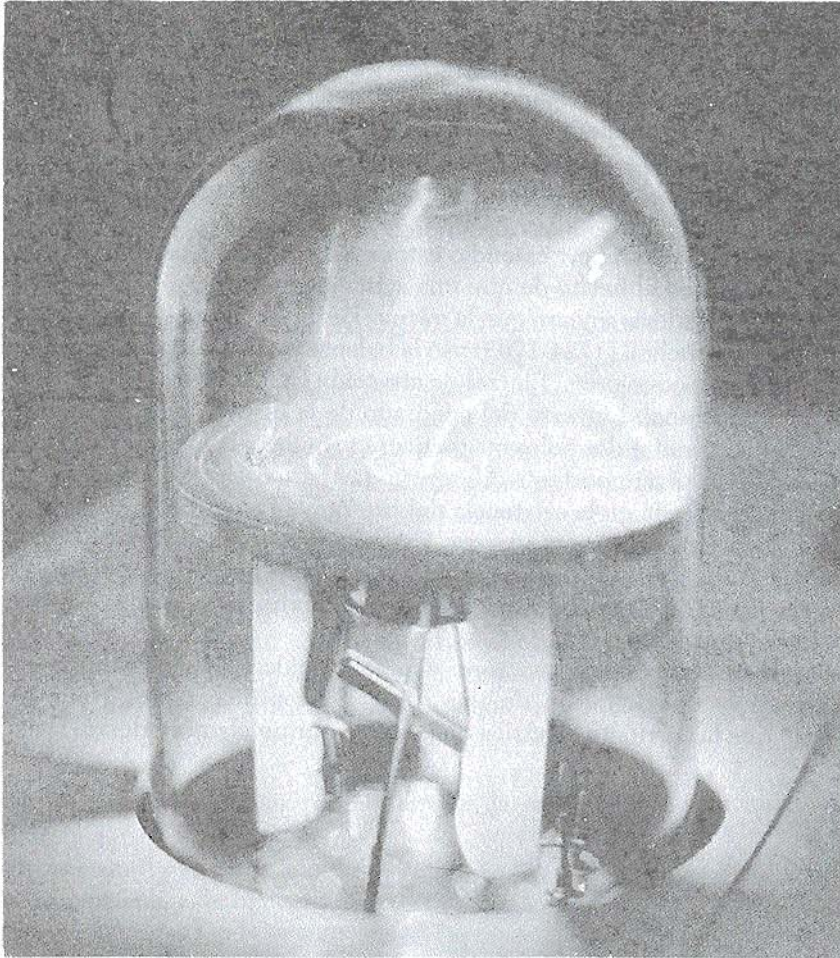


Figura 28.63 (Problema 90).

## Campos magnéticos



*El arco azul en esta fotografía indica la trayectoria circular seguida por el haz de electrones moviéndose en un campo magnético. El recipiente contiene gas a muy baja presión, y el haz se hace visible cuando los electrones chocan con los átomos del gas, lo cual se traduce en luz visible. El campo magnético lo producen dos bobinas (que no se muestran). El aparato puede ser utilizado para medir la razón  $e/m$  para los electrones. (Cortesía de CENCO)*

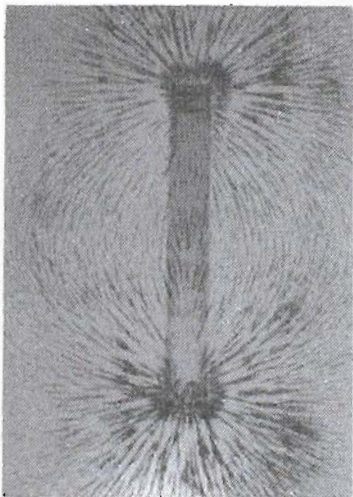
**E**l comportamiento de los imanes de barra es conocido por todos aquellos que han tomado un curso de ciencias. Los imanes permanentes, que están hechos por lo general de sustancias que contienen hierro, atraen o repelen a otros imanes. Además, al atraer a otros objetos de hierro, éstos pueden ser magnetizados. La lista de aplicaciones tecnológicas importantes del magnetismo es muy amplia. Por ejemplo, grandes electroimanes se utilizan para transportar cuerpos pesados. Los imanes también se utilizan en aparatos de medida, transformadores, motores, aceleradores de partículas y en bocinas. Las cintas magnéticas se utilizan comúnmente en las grabaciones de sonidos, grabaciones de TV y memorias de computadoras. Intensos campos magnéticos generados por imanes superconductores se utilizan hoy en día como un medio contenedor de los plasmas (calentados a temperaturas del orden de  $10^8$  K) usados en las investigaciones de controladores de reacción nuclear.

### 29.1 INTRODUCCIÓN

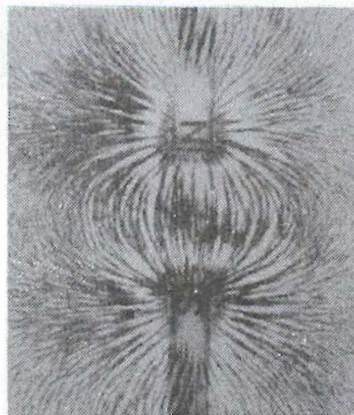
El fenómeno del magnetismo fue conocido por los griegos desde el año 800 A.C. Ellos descubrieron que ciertas piedras, ahora llamadas *magnetita* ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), atraían piezas de hierro. La leyenda adjudica el nombre de magnetita en honor al pastor Magnes, “los clavos de sus zapatos y el casquillo (o punta) de su bastón quedaron fuertemente sujetos a un campo magnético cuando se encontraba pastoreando su rebaño”. En 1269 Pierre de Maricourt, mediante un imán natural esférico, elaboró un mapa de las direcciones tomadas por una aguja al colocarla en diversos puntos de la superficie de la esfera. Encontró que las direcciones formaban líneas que rodeaban a la esfera pasando a través de dos puntos diametralmente opuestos uno del otro, a los cuales les llamó *polos* del imán. Experimentos subsecuentes demostraron que cualquier imán, sin importar su forma, tiene dos polos, llamados *polo norte* y *polo sur*, los cuales presentan fuerzas que actúan entre sí de manera análoga a las cargas eléctricas. Es decir, polos iguales se repelen y polos diferentes se atraen.

En 1600 William Gilbert extendió estos experimentos a una variedad de materiales. Utilizando el hecho de que una aguja magnética (brújula) se orienta en direcciones preferidas, sugiere que la misma Tierra es un gran imán permanente. En 1750, John Michell (1724-1793) usó la balanza de torsión para demostrar que los polos magnéticos ejercen fuerzas de atracción y repulsión entre sí, y que estas fuerzas varían como el inverso del cuadrado de la distancia de separación. Aun cuando la fuerza entre dos polos magnéticos es similar a la fuerza entre dos cargas eléctricas, existe una importante diferencia. Las cargas eléctricas se pueden aislar (lo que se manifiesta en la existencia del protón y el electrón), mientras que *los polos magnéticos no se pueden separar*. Esto es, *los polos magnéticos siempre están en pares*. Todos los intentos por detectar un polo aislado han fracasado. No importa cuántas veces se divida un imán permanente, cada trozo siempre tendrá un polo norte y un polo sur.

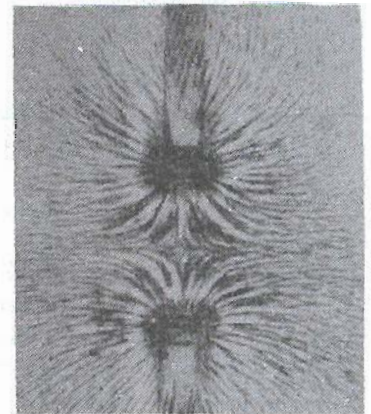
La relación entre el magnetismo y la electricidad fue descubierta en 1819 cuando, en la demostración de una clase, el científico danés Hans Oersted encontró que la corriente eléctrica que circula por un alambre desvía la aguja de



Patrón del campo magnético de un imán de barra como se muestra con limaduras de hierro sobre una hoja de papel (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)



Patrón del campo magnético alrededor de dos imanes de barra como se muestra con limaduras de hierro sobre una hoja de papel. Esto demuestra el patrón del campo magnético entre dos polos distintos. (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)



Ésta muestra el patrón del campo magnético entre dos polos iguales. (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

una brújula cercana.<sup>1</sup> Poco tiempo después, André Ampère (1775-1836) obtuvo las leyes cuantitativas de la fuerza magnética entre conductores que llevan corrientes eléctricas. También sugirió que órbitas de corriente eléctrica de magnitud molecular son las responsables de todos los fenómenos magnéticos. Esta idea es la base de la teoría moderna del magnetismo.

En la década de 1820, se demostraron varias conexiones entre la electricidad y el magnetismo por Faraday e independientemente por Joseph Henry (1797-1878). Ellos comprobaron que se podía producir una corriente eléctrica en un circuito al mover un imán cercano al circuito o bien variando la corriente de un circuito cercano al primero. Estas observaciones demuestran que un cambio en el campo magnético produce un campo eléctrico. Años después, el trabajo teórico realizado por Maxwell mostró que un campo eléctrico variable da lugar a un campo magnético.

En este capítulo se examinan las fuerzas que actúan sobre cargas en movimiento y sobre alambres que llevan corriente en presencia de un campo magnético. Las fuentes del campo magnético se describirán en el capítulo 30.



Hans Christian Oersted (1777-1851), físico danés. (Archivo de Bettmann)

## 29.2 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE UN CAMPO MAGNÉTICO

El campo eléctrico  $E$  en un punto del espacio se ha definido como la fuerza por unidad de carga que actúa sobre una carga de prueba colocada en ese punto. Similarmente, el campo gravitacional  $g$  en un punto dado del espacio es la fuerza de gravedad por unidad de masa que actúa sobre una masa de prueba.

Ahora se definirá el vector de campo magnético  $B$  (algunas veces llamado *inducción magnética* o *densidad de flujo magnético*) en un punto dado del espacio en términos de la magnitud de la fuerza que sería ejercida sobre un objeto de prueba apropiado. El objeto de prueba es una partícula cargada que se mueve con velocidad  $v$ . Por el momento, supongamos que no están presentes el campo eléctrico ni el gravitacional en la región de la carga. Los experimentos realizados sobre el movimiento de diversas partículas cargadas que se desplazan en un campo magnético han proporcionado los siguientes resultados:

1. La fuerza magnética es proporcional a la carga  $q$  y la velocidad  $v$  de la partícula.
2. La magnitud y la dirección de la fuerza magnética depende de la velocidad de la partícula y de la magnitud y dirección del campo magnético.
3. Cuando una partícula se mueve en dirección paralela al vector campo magnético, la fuerza magnética  $F$  sobre la carga es cero.
4. Cuando la velocidad hace un ángulo  $\theta$  con el campo magnético, la fuerza magnética actúa en una dirección perpendicular tanto a  $v$  como a  $B$ ; es decir,  $F$  es perpendicular al plano formado por  $v$  y  $B$  (Fig. 29.1a).
5. La fuerza magnética sobre una carga positiva tiene sentido opuesto a la fuerza que actúa sobre una carga negativa que se mueva en la misma dirección (Fig. 29.1b).
6. Si el vector velocidad hace un ángulo  $\theta$  con el campo magnético, la magnitud de la fuerza magnética es proporcional al  $\sin \theta$ .

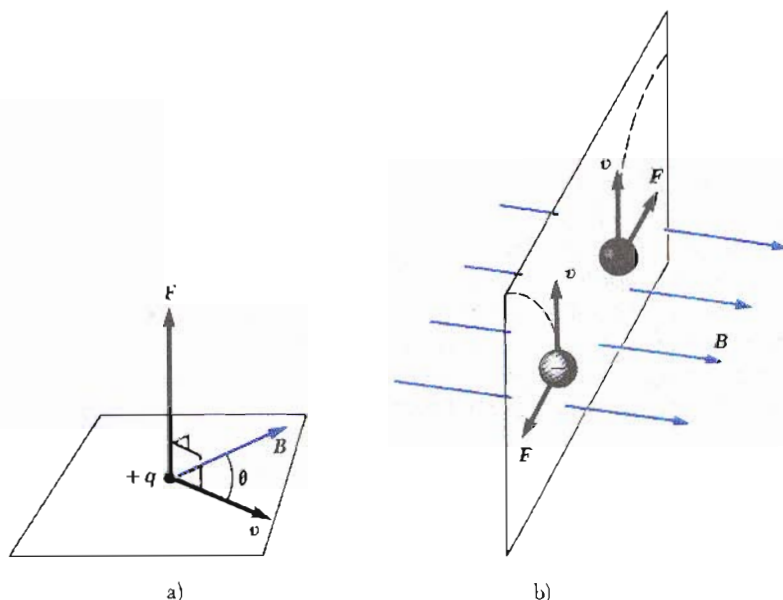
Estas observaciones se pueden resumir escribiendo la fuerza magnética en la forma

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (29.1)$$

**Propiedades de la fuerza magnética sobre una carga moviéndose en un campo magnético  $B$**

**Fuerza magnética sobre una partícula cargada moviéndose en un campo magnético**

<sup>1</sup> Es interesante hacer notar que el mismo descubrimiento fue registrado en 1802 por el jurista italiano Gian Domenico Romagnosi, pero pasó desapercibido, probablemente porque se publicó en un periódico, *Gazetta de Trentino*, en lugar de en una revista científica.



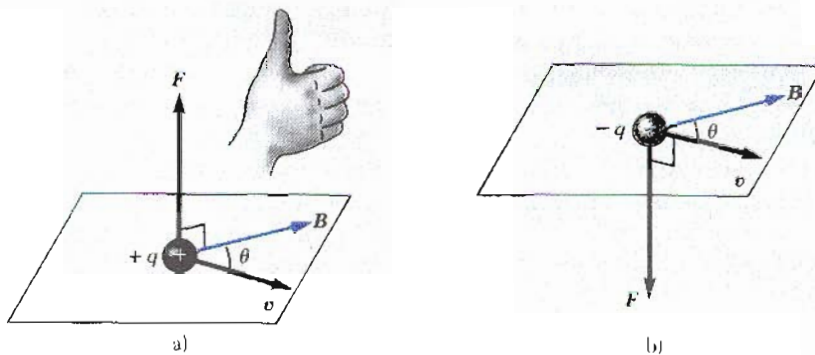
**Figura 29.1** Dirección de la fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve con velocidad  $v$  en presencia de un campo magnético. a) Cuando  $v$  forma un ángulo  $\theta$  con  $B$ , la fuerza magnética es perpendicular a ambos,  $v$  y  $B$ . b) En presencia de un campo magnético, las partículas cargadas en movimiento se desvían como se indica por medio de las líneas punteadas.

donde la dirección de la fuerza magnética está en la dirección de  $v \times B$ , la cual por definición del producto vectorial, es perpendicular tanto a  $v$  como a  $B$ .

La figura 29.2 da un breve repaso de la regla de la mano derecha para determinar la dirección del producto vectorial  $v \times B$ . Se hace girar el vector  $v$  hacia  $B$  utilizando los cuatro dedos de la mano derecha, con la palma hacia el vector  $B$ . Entonces el pulgar apunta en la dirección de  $v \times B$ . Como  $F = qv \times B$ ,  $F$  está en la dirección de  $v \times B$  si la carga  $q$  es positiva (Fig. 29.2a) y tiene la dirección opuesta a  $v \times B$  si la carga  $q$  es negativa (Fig. 29.2b). La magnitud de la fuerza magnética tiene un valor

$$F = qvB \text{ sen } \theta \tag{29.2}$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $v$  y  $B$ . De esta expresión, se ve que  $F$  es *cero* cuando  $v$  es paralelo a  $B$  ( $\theta = 0$  o  $\theta = 180^\circ$ ). Sin embargo, la fuerza tiene su valor máximo,  $F = qvB$ , cuando  $v$  es perpendicular a  $B$  ( $\theta = 90^\circ$ ).



**Figura 29.2** Regla de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza magnética  $F$  que actúa sobre una carga  $q$  que se mueve con una velocidad  $v$  en un campo magnético  $B$ . Si  $q$  es positiva,  $F$  queda hacia arriba en la dirección del pulgar; si  $q$  es negativa,  $F$  es hacia abajo.

Se puede reconocer la ecuación 29.1 como una definición operacional del campo magnético en un punto del espacio. Esto es, el campo magnético es definido en términos de un *tipo* de fuerza que actúa sobre una carga en movimiento. Existen varias diferencias importantes entre las fuerzas eléctricas y magnéticas:

1. La fuerza eléctrica siempre está en la dirección del campo eléctrico, mientras que la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
2. La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula cargada independientemente de la velocidad de la partícula, mientras que la fuerza magnética actúa sólo cuando las partículas cargadas se encuentran en movimiento.
3. La fuerza eléctrica realiza trabajo al desplazar una partícula cargada, mientras que la fuerza magnética asociada a un campo magnético estacionario no realiza trabajo cuando una partícula se desplaza.

**Diferencia entre campo eléctrico y magnético**

Esta última afirmación es consecuencia del hecho de que cuando una carga se mueve en un campo magnético estacionario, la fuerza magnética es siempre *perpendicular* al desplazamiento. Es decir,

$$F \cdot ds = (F \cdot v) dt = 0$$

ya que la fuerza magnética es un vector perpendicular a  $v$ . De esta propiedad y del teorema de trabajo y energía, se concluye que la energía cinética de la partícula cargada no puede ser alterada sólo por el campo magnético. En otras palabras

cuando una carga se mueve con una velocidad  $v$ , el campo magnético aplicado sólo puede alterar la dirección del vector velocidad, pero no puede cambiar la rapidez de la partícula.

**Un campo magnético no puede cambiar la rapidez de una partícula**

En el SI la unidad de campo magnético es el **weber por metro cuadrado** ( $\text{Wb}/\text{m}^2$ ), también llamado **tesla** (T). Esta unidad puede ser relacionada con las unidades fundamentales utilizando la ecuación 29.1: una carga de 1 coulomb que se mueve a través de campo magnético de 1 tesla con una velocidad de 1 m/s perpendicular al campo experimenta una fuerza de 1 newton:

$$|B| = T = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \quad (29.3)$$

En la práctica, con frecuencia se utiliza la unidad del sistema cgs para el campo magnético, llamada **gauss** (G). El gauss está relacionado con el tesla a través de la conversión

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G} \quad (29.4)$$

Los imanes de laboratorio convencionales pueden producir campos magnéticos tan grandes como unos 25 000 G, o 2.5 T. Se han construido imanes superconductores que pueden generar campos magnéticos mayores a 250 000 G o 25 T. Éstos pueden ser comparados con el campo magnético terrestre cercano a su superficie, el cual es aproximadamente de 0.5 G o  $0.5 \times 10^{-4}$  T.

### EJEMPLO 29.1 Un protón que se mueve en un campo magnético

Un protón se mueve con una rapidez de  $8 \times 10^6$  m/s a lo largo del eje  $x$ . Entra a una región donde existe un campo de 2.5 T de magnitud, dirigido de tal forma que hace un ángulo de  $60^\circ$  con el eje de las  $x$  y está en el plano  $xy$  (Fig. 29.3). Calcúlese la fuerza magnética y la aceleración inicial del protón.

**Solución** De la ecuación 29.2, se obtiene

$$\begin{aligned} F &= qvB \sin \theta \\ &= (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(8 \times 10^6 \text{ m/s})(2.5 \text{ T})(\sin 60^\circ) \\ &= 2.77 \times 10^{-12} \text{ N} \end{aligned}$$

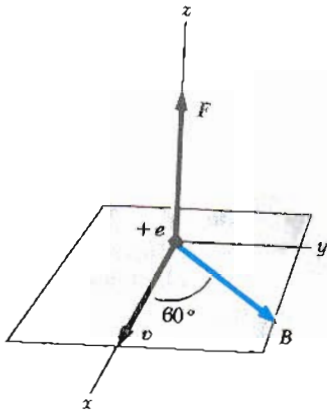


Figura 29.3 (Ejemplo 29.1) La fuerza magnética  $F$  sobre un protón está en la dirección positiva del eje  $z$  cuando  $v$  y  $B$  se encuentran en el plano  $xy$ .

Como  $v \times B$  está en la dirección  $z$  positiva y ya que la carga es positiva, la fuerza  $F$  está en la dirección  $z$  positiva.

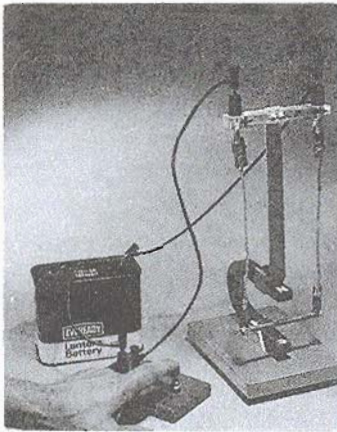
Dado que la masa del protón es  $1.67 \times 10^{-27}$  kg, su aceleración inicial es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2.77 \times 10^{-12} \text{ N}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 1.66 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$$

en la dirección  $z$  positiva.

**Ejercicio 1** Verifique que las unidades de  $F$  en el cálculo de la fuerza magnética se reduzcan a newtons.

### 29.3 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR QUE LLEVA UNA CORRIENTE ELÉCTRICA



Este dispositivo demuestra la fuerza sobre un conductor que lleva una corriente en un campo magnético externo. ¿Por qué la barra oscila fuera del imán después de que el interruptor se cierra? (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

Si una fuerza se ejerce sobre una partícula cargada cuando se mueve a través de un campo magnético, no debe sorprender que un alambre que lleva una corriente también experimente una fuerza cuando se coloca en un campo magnético. Esto se sigue del hecho de que la corriente representa una colección de varias partículas cargadas en movimiento; por lo tanto, la fuerza resultante sobre el alambre se debe a la suma de las fuerzas individuales sobre las partículas cargadas.

La fuerza sobre un conductor que lleva una corriente puede demostrarse colocando un alambre entre las caras de un imán como en la figura 29.4. En esta figura, el campo magnético está dirigido hacia adentro de la página y cubre la región sombreada dentro del círculo. Cuando la corriente sobre el alambre es cero, el alambre permanece vertical como en la figura 29.4a. Sin embargo, cuando la corriente se establece en el alambre dirigida hacia arriba como en la figura 29.4b, el alambre se curva hacia la izquierda. Si invertimos la corriente, como en la figura 29.4c, el alambre se curva hacia la derecha.

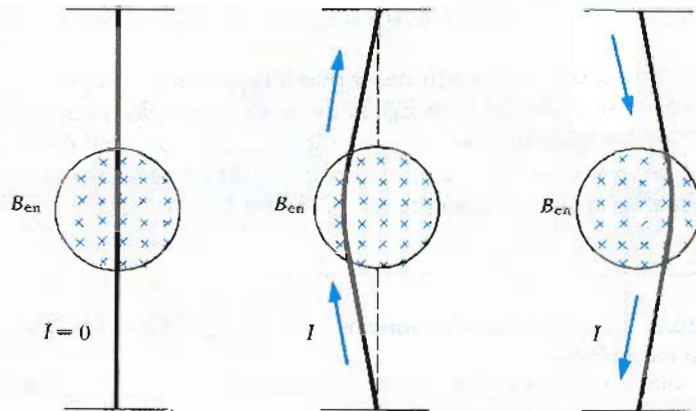


Figura 29.4 Un alambre vertical flexible el cual está parcialmente estirado entre las caras de un imán cuyo campo está dirigido hacia dentro del papel (cruces azules). a) Cuando no existe corriente en el alambre, éste permanece vertical. b) Cuando la corriente va hacia arriba, el alambre se desvía hacia la izquierda. c) Cuando la corriente va hacia abajo, el alambre se desvía hacia la derecha.



Para cuantificar esta exposición considérese un segmento recto del alambre de longitud  $\ell$  y área de sección transversal  $A$ , llevando una corriente  $I$  en un campo magnético externo  $\mathbf{B}$  como en la figura 29.5. La fuerza magnética sobre la carga  $q$  que se mueve con una velocidad de deriva  $\mathbf{v}_d$  está dada por  $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ . La fuerza sobre el portador de carga se transmite al “grosso” del alambre a través de los choques contra los átomos que forman el alambre. Para determinar la fuerza total que actúa sobre el alambre, se multiplica la fuerza sobre una carga  $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ , por el número de cargas en el segmento. Como el volumen del segmento es  $A\ell$ , el número de cargas en el segmento es  $nA\ell$ , donde  $n$  es el número de cargas por unidad de volumen. Por lo tanto, la fuerza magnética total sobre un alambre de longitud  $\ell$  es

$$\mathbf{F} = (q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B})nA\ell$$

Esto se puede escribir en forma más conveniente al recordar que, de la ecuación 27.4, la corriente en un alambre está dada por  $I = nqv_dA$ . Por lo tanto  $\mathbf{F}$  puede expresarse como

$$\mathbf{F} = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \quad (29.5)$$

donde  $\boldsymbol{\ell}$  es un vector en la dirección de la corriente  $I$ ; la magnitud de  $\boldsymbol{\ell}$  es igual a la longitud  $\ell$  del segmento. Obsérvese que esta expresión se aplica sólo a segmentos rectos de alambre en un campo magnético externo uniforme. Además, se ha despreciado el campo producido por la propia corriente. (De hecho, el alambre no puede producir una fuerza sobre sí mismo.)

Ahora considérese un alambre de forma arbitraria de sección transversal uniforme en un campo magnético externo, como en la figura 29.6. De la ecuación 29.5 se sigue que la fuerza magnética sobre cualquier pequeño segmento  $d\mathbf{s}$  en presencia del campo  $\mathbf{B}$  está dada por

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (29.6)$$

donde  $d\mathbf{F}$  está dirigida hacia afuera de la página para las direcciones asumidas en la figura 29.6. Se puede considerar la ecuación 29.6 como una definición alternativa de  $\mathbf{B}$ . Es decir, el campo  $\mathbf{B}$  puede definirse en términos de la fuerza medida en un elemento de corriente, donde la fuerza es máxima cuando  $\mathbf{B}$  es perpendicular al elemento y cero cuando  $\mathbf{B}$  es paralelo al elemento.

Para obtener la fuerza total sobre el alambre, se integra la ecuación 29.6 sobre la longitud del alambre:

$$\mathbf{F} = I \int_a^b d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (29.7)$$

En esta expresión,  $a$  y  $b$  representan los puntos extremos del alambre. Cuando esta integración se realiza, la magnitud del campo magnético y la dirección del campo respecto al vector  $d\mathbf{s}$  (es decir, la orientación del elemento) puede variar en cada punto.

Ahora se considerarán dos casos especiales que requieren la aplicación de la ecuación 29.7. En ambos casos, el campo magnético externo se considera constante en magnitud y dirección.

### Caso I

Sea un alambre curvo que lleva una corriente  $I$ ; el alambre se coloca en un campo magnético externo  $\mathbf{B}$ , como se muestra en la figura 29.7a. Como se supone que

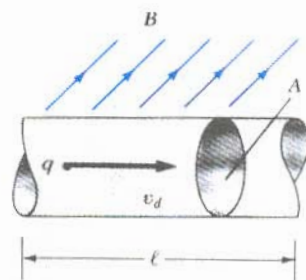


Figura 29.5 Sección de un alambre que contiene cargas moviéndose en un campo magnético externo  $\mathbf{B}$ . La fuerza magnética en cada carga es  $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ , y la fuerza neta sobre el elemento recto es  $I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$ .

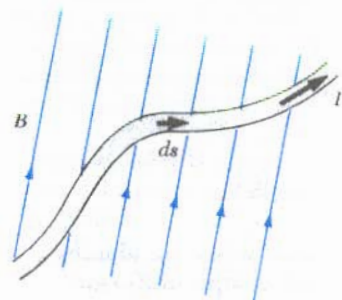


Figura 29.6 Un alambre de forma arbitraria que lleva una corriente  $I$  en un campo magnético externo  $\mathbf{B}$  experimenta una fuerza magnética. La fuerza magnética sobre cualquier segmento  $d\mathbf{s}$  está dado por  $I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$  y está dirigida hacia afuera de la página.

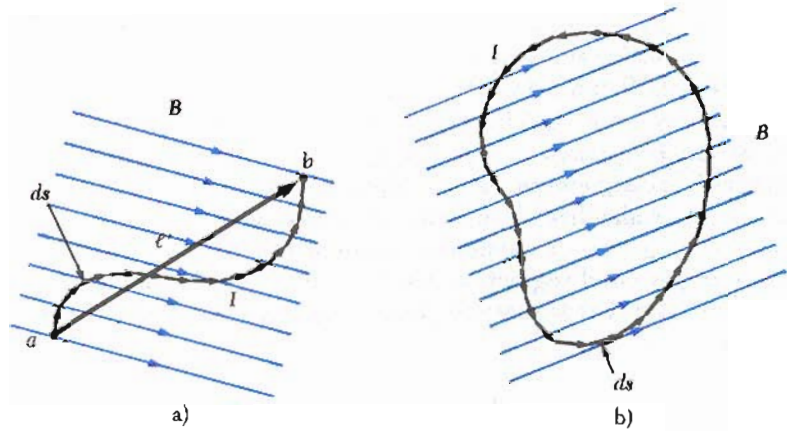


Figura 29.7 a) Conductor curvo que lleva una corriente  $I$  en un campo magnético uniforme. La magnitud de la fuerza sobre el conductor es equivalente a la fuerza sobre un segmento recto de longitud  $l'$  recorriendo entre los extremos del alambre,  $a$  y  $b$ . b) Una espira de corriente de forma arbitraria en un campo magnético uniforme. La fuerza magnética neta sobre la espira es cero.

el campo magnético es uniforme (es decir, tiene el mismo valor sobre toda la región del conductor),  $B$  puede ser sacado de la integral en la ecuación 29.7, y se tiene

$$F = I \left( \int_a^b ds \right) \times B \quad (29.8)$$

Pero la cantidad  $\int_a^b ds$  representa la *suma vectorial* de todos los elementos de desplazamiento desde  $a$  hasta  $b$  como se describe en la figura 29.7. De la ley de la suma de varios vectores (Cap. 2), la suma es igual al vector  $l'$ , el cual está dirigido desde  $a$  hasta  $b$ . Por lo tanto, la ecuación 29.8 se reduce a

$$F = I l' \times B \quad (29.9)$$

### Fuerza sobre un alambre en un campo uniforme

#### Caso II

Se coloca una espira cerrada de forma arbitraria que lleva una corriente  $I$  en un campo magnético externo uniforme  $B$  como en la figura 29.7b. Nuevamente, se puede expresar la fuerza en la forma de la ecuación 29.8. En este caso, el vector suma de los desplazamientos debe tomarse sobre la espira cerrada. Esto es

$$F = I \left( \oint ds \right) \times B$$

Como el conjunto de vectores de desplazamiento forma un *polígono cerrado* (Fig. 29.7b), el vector suma debe ser *cero*. Esto se sigue del procedimiento gráfico de suma de vectores por el *método del polígono* (Cap. 2). Como  $\oint ds = 0$ , se concluye

$$F = 0 \quad (29.10)$$

Es decir,

la fuerza magnética total sobre cualquier espira cerrada de corriente en un campo magnético externo uniforme es cero.

### EJEMPLO 29.2 Fuerza sobre un conductor semicircular $\square$

Un alambre al que se le ha dado la forma de semicircunferencia de radio  $R$  forma un circuito cerrado y lleva una corriente  $I$ . El circuito se encuentra en el plano  $xy$ , y un campo magnético uniforme está presente a lo largo del eje  $y$  positivo como en la figura 29.8. Encuéntrese la fuerza magnética sobre la porción recta del alambre y sobre la porción curva del alambre.

**Solución** La fuerza sobre la porción recta del alambre tiene una magnitud dada por  $F_1 = I\ell B = 2IRB$ , ya que  $\ell = 2R$  y el alambre es perpendicular a  $B$ . La dirección de  $F_1$  es hacia afuera de la página ya que  $\ell \times B$  está hacia afuera. (Esto es,  $\ell$  está hacia la derecha en la dirección de la corriente y por la regla del producto vectorial  $\ell \times B$  está hacia afuera.)

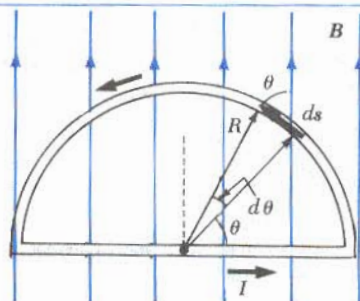
Para determinar la fuerza en la parte curva, primero se debe escribir una expresión para el elemento de fuerza  $dF_2$  sobre el elemento  $ds$ . Si  $\theta$  es el ángulo entre  $B$  y  $ds$  en la figura 29.8, entonces la magnitud de  $dF_2$  está dada por

$$dF_2 = I|ds \times B| = IB \sin \theta ds$$

donde  $ds$  es la longitud de un pequeño elemento medido a lo largo del arco circular. Para integrar esta expresión, debe expresarse  $ds$  en términos de la variable  $\theta$ . Como  $s = R\theta$ ,  $ds = R d\theta$ , y la expresión para  $dF_2$  puede escribirse

$$dF_2 = IRB \sin \theta d\theta$$

Para obtener la fuerza total  $F_2$  sobre la porción curva, se integra esta expresión para considerar las contribuciones de todos los elementos. Obsérvese que la dirección de la



**Figura 29.8** (Ejemplo 29.2) La fuerza neta sobre una espira cerrada de corriente en un campo magnético uniforme es *zero*. En este caso, la fuerza sobre la porción recta es  $2IRB$  hacia afuera, mientras que la fuerza sobre la porción curva es también  $2IRB$  hacia adentro.

fuerza en cada elemento es la misma: *hacia* la página (ya que  $ds \times B$  es hacia adentro). Por lo tanto, la fuerza resultante  $F_2$  sobre el alambre curvo también está hacia dentro de la página. Integrando  $dF_2$  sobre los límites  $\theta = 0$  a  $\theta = \pi$  (es decir, toda la semicircunferencia) se obtiene

$$F_2 = IRB \int_0^\pi \sin \theta d\theta = IRB[-\cos \theta]_0^\pi = -IRB(\cos \pi - \cos 0) = -IRB(-1 - 1) = \mathbf{2IRB}$$

Ya que  $F_2 = 2IRB$  y está dirigida hacia adentro de la página, en tanto que la fuerza sobre el alambre recto  $F_1 = 2IRB$  es hacia afuera de la página, se ve que la fuerza neta sobre la espira cerrada es *zero*. Este resultado es congruente con el caso II descrito antes y dado por la ecuación 29.10.

**Ejercicio 2** Encuéntrese la fuerza  $F_2$  sobre la parte semicircular del alambre haciendo uso del método más directo, caso I, discutido en el texto (Ec. 29.9).

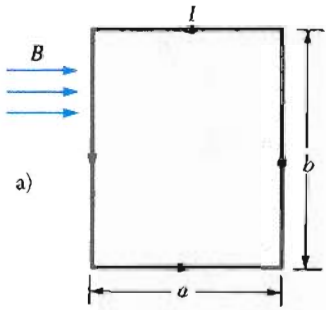
## 29.4 MOMENTO SOBRE UNA ESPIRA DE CORRIENTE EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

En la sección anterior se mostró cómo una fuerza se ejerce sobre un conductor que lleva una corriente cuando el conductor se encuentra en un campo magnético externo. Tomando esto como punto de partida, se mostrará que un momento se ejerce sobre una espira de corriente situada en un campo magnético. El resultado de este análisis es de gran valor práctico, lo cual se verá cuando se discutan los motores en un próximo capítulo.

Considérese una espira rectangular que lleva una corriente  $I$  en presencia de un campo magnético uniforme en el plano de la espira, como en la figura 29.9a. Las fuerzas sobre los lados de longitud  $a$  son *zero* ya que estos alambres son paralelos al campo; por lo tanto,  $ds \times B = 0$  para estos lados. Sin embargo, la magnitud de las fuerzas sobre los lados de longitud  $b$ , está dada por

$$F_1 = F_2 = IbB$$

La dirección de  $F_1$ , la fuerza sobre el lado izquierdo de la espira, es hacia afuera del papel y la de  $F_2$ , la fuerza sobre el lado derecho de la espira, es hacia dentro del papel. Si se ve la espira desde uno de sus extremos, como en la figura 29.9b, pueden apreciarse las fuerzas dirigidas como se muestra. Si se supone que la espira está pivoteada de tal forma que puede girar alrededor del punto  $O$ , se ve que estas

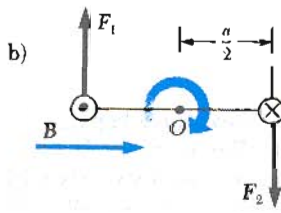


dos fuerzas producen un momento de una fuerza alrededor de  $O$  de tal manera que la espira gira en la dirección de las manecillas del reloj. La magnitud de este momento,  $\tau_{\text{máx}}$ , es

$$\tau_{\text{máx}} = F_1 \frac{a}{2} + F_2 \frac{a}{2} = (IbB) \frac{a}{2} + (IbB) \frac{a}{2} = IabB$$

donde el brazo de palanca alrededor de  $O$  es  $a/2$  para cada fuerza. Dado que el área de la espira es  $A = ab$ , el momento puede ser expresado como

$$\tau = IAB \tag{29.11}$$



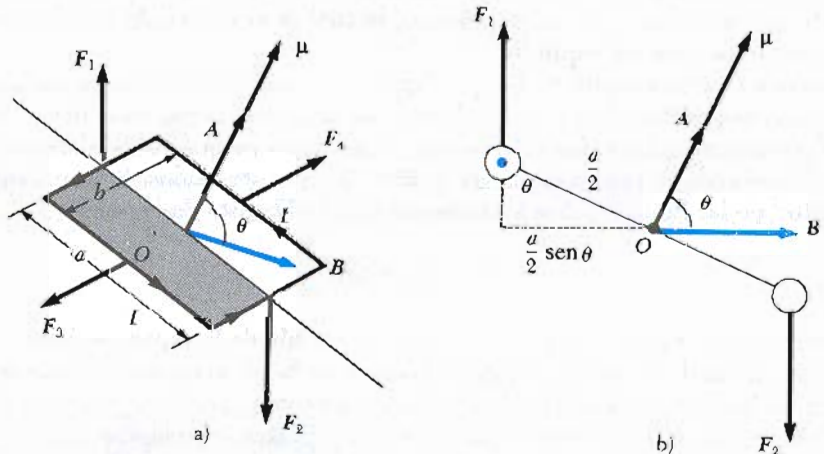
Recuérdese que este resultado es válido sólo cuando el campo  $B$  es paralelo al plano de la espira. El sentido de rotación es de acuerdo con las manecillas del reloj cuando se ve desde el extremo inferior, como se indica en la figura 29.9b. Si la corriente fuera en sentido opuesto, las fuerzas serían en sentido opuesto y la tendencia rotacional sería en sentido contrario a las manecillas del reloj.

**Figura 29.9** a) Vista de frente de una espira rectangular en un campo magnético uniforme. No existen fuerzas sobre los lados de la espira de ancho  $a$  porque son paralelos a  $B$ , pero existen fuerzas que actúan sobre los lados de longitud  $b$ . b) Vista desde arriba de una espira rectangular que muestra que las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  sobre los lados de longitud  $b$  crean un momento que hace que la espira gire en la dirección de las manecillas del reloj como se muestra.

Ahora supóngase que el campo magnético uniforme hace un ángulo  $\theta$  respecto a una línea perpendicular al plano de la espira, como en la figura 29.10a. Para facilitar la comprensión, supóngase que el campo  $B$  es perpendicular a los lados de longitud  $b$ . En este caso, las fuerzas magnéticas  $F_3$  y  $F_4$  sobre los lados de longitud  $a$  se cancelan una a la otra y no producen momento ya que pasan por un origen común. Sin embargo, las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  que actúan sobre los lados de longitud  $b$  forman un par y por lo tanto producen un momento respecto a cualquier punto. Con referencia a la vista lateral que se observa en la figura 29.10b, obsérvese que el brazo de palanca de la fuerza  $F_1$  respecto al punto  $O$  es igual a  $(a/2) \text{ sen } \theta$ . Del mismo modo, el brazo de palanca de la fuerza  $F_2$  respecto a  $O$  es  $(a/2) \text{ sen } \theta$ . Como  $F_1 = F_2 = IbB$ , el momento neto respecto a  $O$  tiene una magnitud dada por

$$\begin{aligned} \tau &= F_1 \frac{a}{2} \text{ sen } \theta + F_2 \frac{a}{2} \text{ sen } \theta \\ &= IbB \left( \frac{a}{2} \text{ sen } \theta \right) + IbB \left( \frac{a}{2} \text{ sen } \theta \right) = IabB \text{ sen } \theta \\ &= IAB \text{ sen } \theta \end{aligned}$$

donde  $A = ab$  es el área de la espira. Este resultado muestra que el momento tiene el máximo valor en  $IAB$  cuando el campo es paralelo al plano de la espira ( $\theta$



**Figura 29.10** a) Espira rectangular de corriente cuya normal hace un ángulo  $\theta$  con el campo magnético uniforme. Las fuerzas sobre los lados de longitud  $a$  se cancelan mientras que las fuerzas sobre los lados de longitud  $b$  crean un momento sobre la espira. b) Vista lateral de la espira. El momento magnético  $\mu$  está en la dirección normal al plano de la espira.

$= 90^\circ$ ) y es *cero* cuando el campo es perpendicular al plano de la espira ( $\theta = 0$ ). Como se ve en la figura 29.10, la espira tiende a girar hacia valores más pequeños de  $\theta$  (es decir, en tal forma que la normal al plano de la espira gire hacia  $B$ ).

Una expresión vectorial conveniente para el momento es la siguiente relación del producto vectorial

$$\boldsymbol{\tau} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (29.12)$$

donde  $\mathbf{A}$ , un vector perpendicular al plano de la espira, tiene una magnitud igual al área de la espira. El sentido de  $\mathbf{A}$  se determina por la regla de la mano derecha, como se describe en la figura 29.11. Al curvar los cuatro dedos de la mano derecha en la dirección de la corriente en la espira, el pulgar apunta en la dirección de  $\mathbf{A}$ . El producto  $I\mathbf{A}$  es definido como el **momento magnético**  $\boldsymbol{\mu}$  de la espira. Es decir,

$$\boldsymbol{\mu} = I \mathbf{A} \quad (29.13)$$

las unidades en el SI del momento magnético son ampere-metro<sup>2</sup> ( $A \cdot m^2$ ). Utilizando esta definición, el momento puede ser expresado como

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (29.14)$$

Obsérvese que este resultado es análogo al del momento que actúa sobre un momento dipolar eléctrico  $\mathbf{p}$  en presencia de un campo eléctrico externo  $\mathbf{E}$ , donde  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$  (Sec. 26.6). Si una bobina tiene  $N$  vueltas todas en la misma dirección, el momento magnético y el momento sobre ella evidentemente serán  $N$  veces mayores que el de una sola espira.

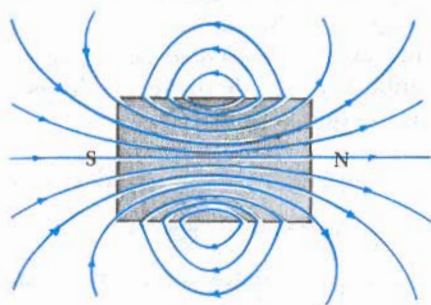
Aun cuando el momento se obtuvo para una dirección particular de  $\mathbf{B}$  con respecto a la espira, la ecuación  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$  es válida para cualquier orientación. Además, aunque la expresión del momento se dedujo para una espira rectangular, el resultado es válido para una espira de *cualquier* forma.

Resulta interesante hacer notar la semejanza entre la tendencia a la rotación de una espira de corriente en un campo magnético externo y el movimiento de la aguja de la brújula (o de un imán de barra con pivote) en un campo de este tipo. Como la espira de corriente, la aguja de la brújula y el imán de barra pueden considerarse como dipolos magnéticos. La similitud en sus líneas de campo magnético se muestra en la figura 29.12. Obsérvese que una de las caras de la espira de corriente se comporta como el polo norte del imán de barra, mientras que la opuesta se comporta como polo sur. Las líneas de campo que se ven en la figura 29.12 son los patrones debidos a un imán de barra (Fig. 29.12a) y a una espira de corriente (Fig. 29.12b). No existe campo externo presente en estos

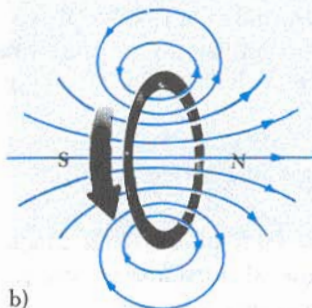


Figura 29.11 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector  $\mathbf{A}$ . El momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  está también en la dirección de  $\mathbf{A}$ .

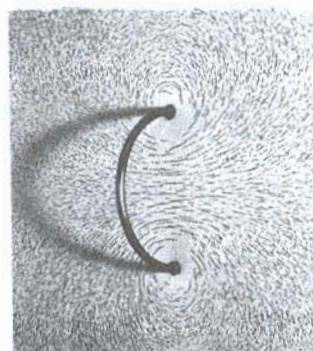
### Momento sobre una espira de corriente



a)



b)



c)

Figura 29.12 Similitud entre los patrones del campo magnético de: a) un imán de barra y b) una espira de corriente. c) Fotografía cortesía del Centro de Desarrollo Educativo, Newton, MA.

diagramas. Además, los diagramas son simplificados a una descripción bidimensional de las líneas de campo.

**EJEMPLO 29.3 Momento magnético de una bobina**

Una bobina rectangular de dimensiones 5.40 cm × 8.50 cm consta de 25 vueltas de alambre. La bobina lleva una corriente de 15 mA. a) Calcúlese la magnitud del momento magnético de la bobina.

**Solución** La magnitud del momento magnético de una espira de corriente está dado por  $\mu = IA$  (véase ecuación 29.13), donde  $A$  es el área de la espira. En este caso,  $A = (0.0540 \text{ m})(0.0850) = 4.59 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Como la bobina tiene 25 vueltas, y se supone que todas tienen la misma área  $A$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mu_{\text{bobina}} &= NIA = (25)(15 \times 10^{-3} \text{ A})(4.59 \times 10^{-3} \text{ m}^2) \\ &= 1.72 \times 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 1.72 \times 10^{-3} \text{ J/T} \end{aligned}$$

b) Supóngase que un campo magnético de magnitud 0.350 T se aplica paralelo al plano de la espira. ¿Cuál es la magnitud del momento que actúa sobre la espira?

**Solución** En general, el momento está dado por  $\tau = \mu \times B$ , donde el vector  $\mu$  es dirigido perpendicularmente al plano de la espira. En este caso,  $B$  es perpendicular a  $\mu_{\text{bobina}}$ , así que

$$\begin{aligned} \tau &= \mu_{\text{bobina}} B = (1.72 \times 10^{-3} \text{ J/T})(0.350 \text{ T}) \\ &= 6.02 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

Obsérvese que éste es el principio básico de operación de la bobina de un galvanómetro, el cual se expuso en el capítulo 28.

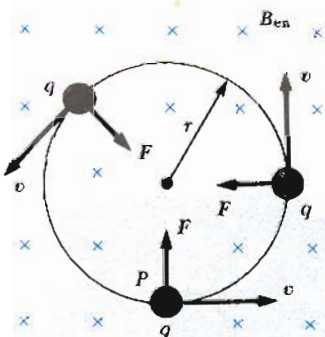
**Ejercicio 3** Calcúlese la magnitud del momento sobre la bobina cuando el campo magnético de 0.350 T hace un ángulo de a) 60° y b) 0° con  $\mu$ .

**Respuesta** a)  $5.21 \times 10^{-4} \text{ J}$  b) cero.

**29.5 MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO**

En la sección 29.2 se encontró que la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. De esta propiedad se sigue que

el trabajo realizado por la fuerza magnética es cero ya que el desplazamiento de la carga es siempre perpendicular a la fuerza magnética. Por lo tanto, un campo magnético estático cambia la dirección de la velocidad pero no afecta la rapidez o la energía cinética de la partícula cargada.



**Figura 29.13** Cuando la velocidad de una partícula cargada es perpendicular a un campo magnético uniforme, la partícula se mueve en una trayectoria circular cuyo plano es perpendicular a  $B$ , el cual está dirigido hacia dentro de la página (representado por cruces azules que son la cola del vector). La fuerza magnética,  $F$ , sobre la carga siempre está dirigida hacia el centro del círculo.

Considérese el caso especial de una partícula cargada positivamente que se mueve en un campo magnético externo con su vector de velocidad inicial perpendicular al campo. Supóngase que el campo magnético está dirigido hacia adentro de la página (esto se indica por las cruces en la figura 29.13). Las cruces se utilizan para representar la cola de  $B$ , ya que está dirigido hacia adentro de la página. Después se utilizarán los puntos para representar la punta de un vector dirigido hacia afuera de la página. La figura 29.13 muestra que la

partícula cargada se mueve en un círculo cuyo plano es perpendicular al campo magnético.

Esto se debe a que la fuerza magnética  $F$  forma ángulos rectos con  $v$  y  $B$  y tiene una magnitud constante igual a  $qvB$ . Como la fuerza  $F$  defleca a la partícula, las direcciones de  $v$  y  $f$  cambian continuamente, como se muestra en la figura 29.13. Por lo tanto, la fuerza  $F$  es una fuerza centrípeta, la cual cambia sólo la dirección de  $v$  mientras que la rapidez permanece constante. El sentido de la rotación, como se muestra en la figura 29.13, es contrario al de las manecillas del reloj para una

carga positiva. Si  $q$  fuera negativa, el sentido de rotación sería al revés, en sentido de la manecillas del reloj. Como la fuerza resultante  $F$  en la dirección radial tiene una magnitud  $qvB$ , se puede igualar ésta a la fuerza centrífuga requerida, la cual es la masa  $m$  multiplicada por la aceleración centrípeta  $v^2/r$ . De la segunda ley de Newton, se encuentra que

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (29.15)$$

Radio de la órbita circular

Es decir, el radio de la trayectoria es proporcional al momento  $mv$  de la partícula e inversamente proporcional al campo magnético. La frecuencia angular de rotación de la partícula cargada está dada por

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (29.16)$$

Frecuencia de ciclotrón

El periodo de este movimiento (tiempo para una revolución) es igual a la circunferencia del círculo dividido entre la rapidez de la partícula:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (29.17)$$

Este resultado muestra que la frecuencia angular y el periodo del movimiento circular no dependen de la rapidez de la partícula o del radio de la órbita. La frecuencia angular  $\omega$  en algunas ocasiones recibe el nombre de **frecuencia de ciclotrón** ya que las partículas cargadas circulan a esta frecuencia en un acelerador llamado *ciclotrón*, el cual se verá en la sección 29.6.

Si la partícula cargada se mueve en un campo magnético uniforme con su velocidad formando un ángulo arbitrario con  $B$ , su trayectoria es una hélice. Por ejemplo, si el campo magnético está en la dirección  $x$  como en la figura 29.14, no existe componente de la fuerza en la dirección  $x$  y por lo tanto  $a_x = 0$  y la componente  $x$  de la velocidad,  $v_x$ , permanece constante. Por otro lado, la fuerza magnética  $qv \times B$  hace que las componentes  $v_y$  y  $v_z$  cambien en el tiempo, y el movimiento resultante es una hélice que tiene su eje paralelo al campo  $B$ . La proyección de la trayectoria en el plano  $yz$  (vista a lo largo del eje  $x$ ) es un círculo.

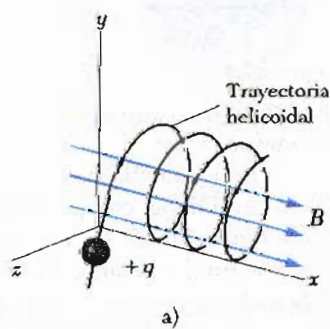


Figura 29.14 a) Una partícula cargada con un vector velocidad que tiene una componente paralela al campo magnético uniforme se mueve en una trayectoria helicoidal. b) Fotografía de una trayectoria helicoidal seguida por un haz de electrones cuando el haz se dirige en un ángulo arbitrario hacia el campo magnético. (Fotografía cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

¡Las proyecciones de las trayectorias en el plano  $xy$  o  $xz$  son senoideas! Las ecuaciones 29.15 y 29.17 todavía pueden aplicarse si se sustituye  $v$  por  $v_{\perp} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$ .

#### EJEMPLO 29.4 Un protón que se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme

Un protón se está moviendo en una órbita circular de radio 14 cm en un campo magnético uniforme de magnitud 0.35 T dirigido perpendicular a la velocidad del protón. Encuéntrese la rapidez del protón en la órbita.

**Solución** De la ecuación 29.15, se obtiene

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(0.35 \text{ T})(14 \times 10^{-2} \text{ m})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}$$

$$= 4.69 \times 10^6 \text{ m/s}$$

**Ejercicio 4** Si un electrón se mueve perpendicular al mismo campo magnético con esta rapidez, ¿cuál es el radio de su órbita circular?

**Respuesta**  $7.63 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

#### EJEMPLO 29.5 Desviación de un haz de electrones

En un experimento diseñado para medir la intensidad de un campo magnético producido por un conjunto de bobinas, los electrones son acelerados desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 350 V, y se encuentra que el radio del haz asociado con los electrones es de 7.5 cm, como en la figura 29.15. Suponiendo que el campo magnético es perpendicular al haz, a) ¿cuál es la magnitud del campo?

**Solución** Primero se debe calcular la velocidad de los electrones utilizando el hecho de que el incremento en la energía cinética de los electrones debe ser igual al cambio en su energía potencial,  $|e|V$  (debido a la conservación de la energía). Como  $K_i = 0$  y  $K_f = mv^2/2$ , se tiene

$$\frac{1}{2}mv^2 = |e|V$$

$$v = \sqrt{\frac{2|e|V}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(350 \text{ V})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}}$$

$$= 1.11 \times 10^7 \text{ m/s}$$

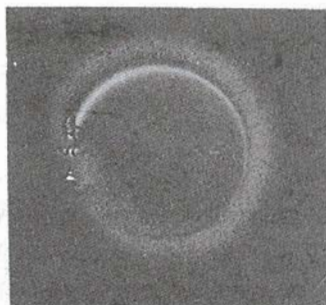


Figura 29.15 Trazo de un haz de electrones en un campo magnético externo. El tubo contiene gas a muy baja presión y el haz se hace visible cuando los electrones chocan con los átomos del gas, que emiten luz visible. El aparato utilizado para tomar esta fotografía es parte del sistema utilizado para medir la razón  $e/m$ . (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

Ahora puede utilizarse la ecuación 29.15 para encontrar la intensidad del campo magnético:

$$B = \frac{mv}{|e|r} = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.11 \times 10^7 \text{ m/s})}{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(0.075 \text{ m})}$$

$$= 8.43 \times 10^{-4} \text{ T}$$

b) ¿Cuál es la frecuencia angular de revolución de los electrones?

**Solución** Utilizando la ecuación 29.16, se encuentra

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1.11 \times 10^7 \text{ m/s}}{0.075 \text{ m}} = 1.48 \times 10^8 \text{ Hz}$$

$$= 148 \text{ MHz}$$

**Ejercicio 5** ¿Cuál es el periodo de revolución de los electrones?

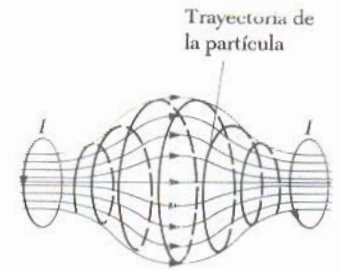
**Respuesta**  $T = 6.76 \text{ ns}$ .

Cuando las partículas cargadas se mueven en un campo magnético **no** uniforme, el movimiento es un tanto complejo. Por ejemplo, en un campo que sea intenso en sus extremos y débil en medio, como en la figura 29.16, las partículas cargadas pueden oscilar entre los puntos extremos. Dicho campo puede ser producido por dos espiras de corriente como en la figura 29.16. En este caso, las partículas cargadas comienzan en un extremo de la espiral a lo largo de las líneas de campo hasta el otro extremo donde su trayectoria es opuesta y regresan en espiral. Esta configuración de campo se conoce como *botella magnética* debido a que las partículas cargadas quedan atrapadas en ella. Este concepto ha sido utilizado para confinar gases muy calientes ( $T$  mayor que  $10^6 \text{ K}$ ) que constan de electrones y iones positivos conocidos como **plasmas**. Un esquema de confinamiento de plasma de este tipo podría desempeñar un papel decisivo para lograr



un proceso de reacción nuclear controlado, lo cual sería una fuente ilimitada de energía. Por desgracia, las botellas magnéticas tienen sus problemas. Si un gran número de partículas se atrapa, las colisiones entre ellas producirían eventualmente fugas en el sistema.

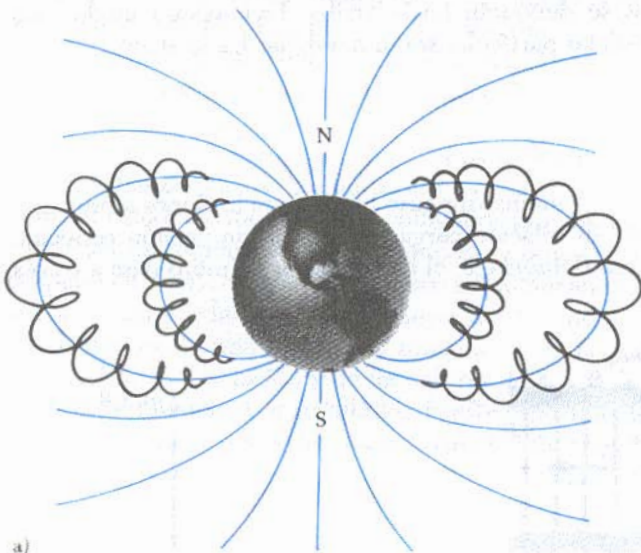
Los cinturones de radiación de Van Allen constan de partículas cargadas (electrones y protones en su mayoría) que rodean a la Tierra tomando la configuración de dona (Fig. 29.17a). Estos cinturones de radiación fueron descubiertos en 1958 por un equipo de investigadores bajo la dirección de James Van Allen, utilizando los datos captados por el satélite Explorer I. Las partículas cargadas, atrapadas por el campo magnético no uniforme de la Tierra, se mueven en espirales alrededor de las líneas de campo terrestre desde un polo hasta el otro polo. Estas partículas se originan principalmente en el Sol, pero algunas vienen de las estrellas y de otros cuerpos celestes. Por esta razón, a estas partículas se les da el nombre de *rayos cósmicos*. La mayoría de los rayos cósmicos son deflectados por el campo magnético de la Tierra y nunca llegan a ésta. Sin embargo, algunos son atrapados, y hacen los cinturones de Van Allen. Cuando estas partículas cargadas están en la atmósfera terrestre sobre los polos, en ocasiones chocan con otros átomos, provocando con ello la emisión de luz visible. Esto es el origen de las maravillosas Auroras Boreales o Luces del Norte (Fig. 29.17b). Un fenómeno similar se ve en el hemisferio sur y se llama Aurora Austral.



**Figura 29.16** Una partícula cargada moviéndose en un campo magnético no uniforme representado por las líneas azules (botella magnética) describe espirales en el campo (trayectoria roja) y oscila entre los puntos extremos.

## \*29.6 APLICACIONES DEL MOVIMIENTO DE PARTICULAS CARGADAS EN UN CAMPO MAGNÉTICO

En esta sección se describirán algunos aparatos que requieren el movimiento de partículas cargadas en un campo magnético uniforme. Para varias situaciones, se considerará que la partícula se moverá con una velocidad  $v$  en presencia de ambos campos, el eléctrico  $E$  y magnético  $B$ . Por ello, la partícula experimentará dos



**Figura 29.17** a) Cinturones de Van Allen se forman por partículas cargadas (electrones y protones), atrapados por el campo magnético terrestre no uniforme. Las líneas del campo están en azul y las trayectorias de las partículas en negro. b) Aurora Boreal, Luz del Norte, fotografiada cerca de Fairbanks, Alaska. Las auroras ocurren cuando los rayos cósmicos —partículas eléctricamente cargadas originadas sobre todo en el Sol— al ser atrapados en la atmósfera de la Tierra sobre los polos magnéticos chocan con otros átomos, resultando una emisión de luz visible. (© David Hiser/Fotógrafos, Aspen)

fuerzas, una fuerza eléctrica  $qE$  y una fuerza magnética  $qv \times B$ , por lo que la fuerza total sobre la partícula estará dada por

$$F = qE + qv \times B \tag{29.18}$$

La fuerza descrita por la ecuación 29.18 se conoce como la **fuerza de Lorentz**.

### Selector de velocidad

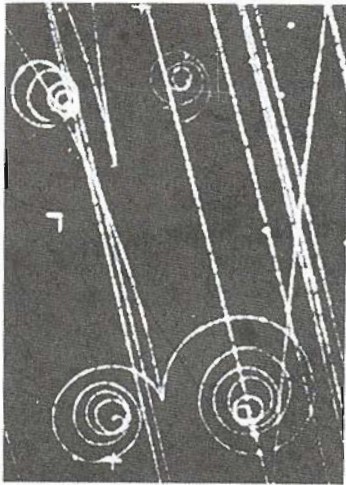
En algunos experimentos que requieren el movimiento de partículas cargadas, es importante contar con una fuente de partículas que se muevan esencialmente con la misma velocidad. Esto puede lograrse aplicando una combinación de un campo eléctrico y un campo magnético orientados como se muestra en la figura 29.18. Un campo eléctrico uniforme orientado verticalmente hacia abajo es producido por un par de placas paralelas cargadas, mientras que el campo magnético uniforme es aplicado perpendicularmente a la página (indicado por la cruces). Suponiendo que  $q$  es positiva, se ve que la fuerza magnética  $qv \times B$  es hacia arriba y la fuerza eléctrica  $qE$  es hacia abajo. Si los campos se eligen de tal manera que la fuerza eléctrica sea balanceada por la fuerza magnética, la partícula se moverá en una línea recta horizontal y saldrá por la ranura de la derecha. Si se iguala la fuerza magnética  $qvB$  dirigida hacia arriba con la fuerza eléctrica  $qE$  dirigida hacia abajo, se encuentra que  $qvB = qE$ , de donde se obtiene

$$v = \frac{E}{B} \tag{29.19}$$

Obsérvese que sólo las partículas que tengan esa velocidad pasarán sin desviarse a través de los campos perpendiculares eléctrico y magnético. En la práctica,  $E$  y  $B$  se ajustan para una velocidad determinada. La fuerza magnética que actúa sobre las partículas con mayor velocidad que éstas será mayor que la fuerza eléctrica, por lo que estas partículas se desviarán hacia arriba. Del mismo modo, con velocidades menores que ésta las partículas serán desviadas hacia abajo.

### Espectrómetro de masas

El **espectrómetro de masas** es un instrumento que separa los iones atómicos y moleculares de acuerdo con su relación carga-masa. En una versión conocida como *espectrómetro de masas Bainbridge*, el haz de iones primero pasa a través



Fotografía de cámara de burbujas. La trazas en espiral de la parte superior de la fotografía corresponden a un par electrón-positrón (izquierda y derecha respectivamente) formado por un rayo gamma que interactúa con un núcleo de hidrógeno. Un campo magnético aplicado hace que los electrones y los positrones sean desviados en direcciones opuestas. La traza que sale de las copas entre las dos espirales es un electrón adicional que sale del átomo de hidrógeno durante esta interacción. (G. Holton, F.J. Rutherford, F.C. Watson, *Project Physics*, New York: HRW, 1981.)

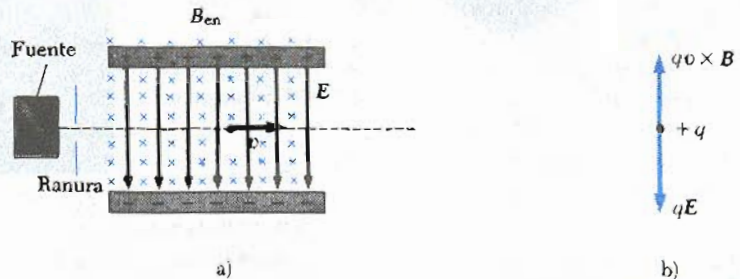


Figura 29.18 a) Selector de velocidades. Cuando una partícula positivamente cargada está en presencia tanto de un campo magnético que entre como está indicado por las cruces azules, como de un campo eléctrico hacia abajo como se indica por las líneas rojas, experimenta una fuerza eléctrica  $qE$  hacia abajo y una fuerza magnética  $qv \times B$  hacia arriba. b) Cuando estas fuerzas están balanceadas como se muestra aquí, la partícula se mueve en una línea horizontal a través de los campos.

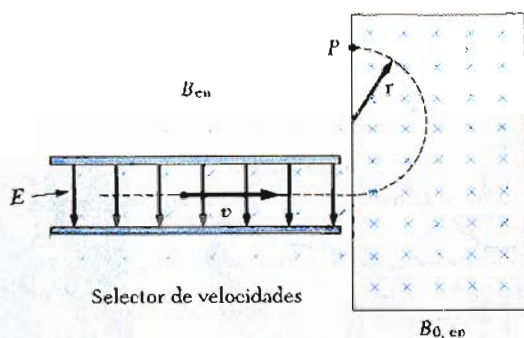


Figura 29.19 Espectrómetro de masas. Las partículas cargadas son seleccionadas a través de un selector de velocidades. Después éstas entran a una región donde el campo magnético  $B_0$  (hacia adentro) hace que los iones positivos se muevan en una trayectoria semicircular y se estrellen en una placa fotográfica en el punto  $P$ .

de un selector de velocidades y después entra a un campo magnético uniforme  $B_0$  dirigido hacia dentro del papel (Fig. 29.19). Cuando entra al campo magnético  $B_0$ , los iones se mueven en semicírculos de radio  $r$  antes de chocar con una placa fotográfica en  $P$ . De la ecuación 29.15 se puede expresar la razón  $m/q$  como

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v} \quad (29.20)$$

Si se considera que la magnitud del campo magnético en la región del selector de velocidades es  $B$  y usando la ecuación 29.19, la cual da la velocidad de la partícula, se encuentra que

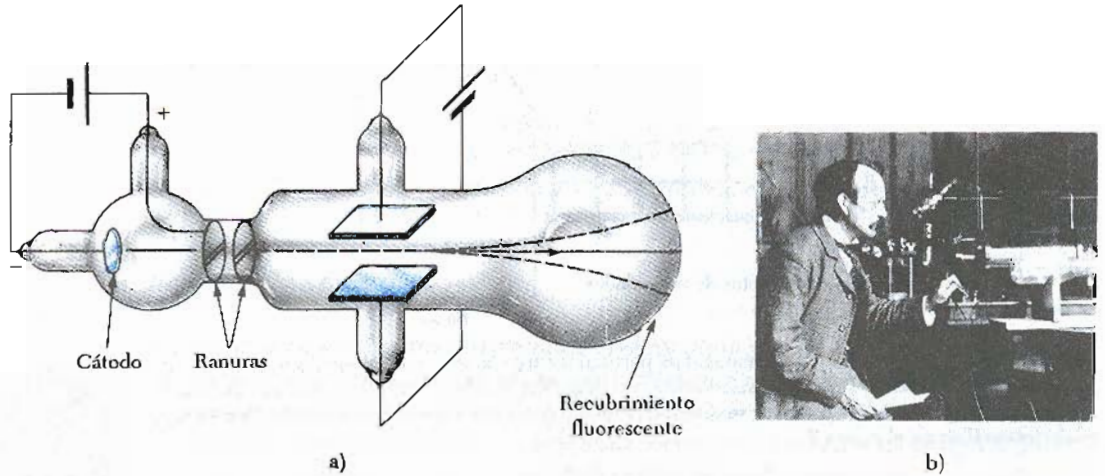
$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E} \quad (29.21)$$

Por lo tanto, se puede determinar  $m/q$  midiendo el radio de curvatura y conociendo los campos  $B$ ,  $B_0$  y  $E$ . En la práctica, usualmente se miden las masas de varios isótopos de un ion dado con la misma carga  $q$ . Por lo tanto, pueden determinarse las razones entre sus masas aun sin conocer la carga  $q$ .

Una variación de esta técnica fue utilizada por Joseph John Thomson (1856-1940) en 1897 para medir la razón  $e/m$  para electrones. La figura 29.20 muestra el aparato básico que usó Thomson en su medición. Los electrones son acelerados desde el cátodo hasta el ánodo, colimados por ranuras en el ánodo, y después entran a una región donde los campos eléctrico y magnético están cruzados (perpendiculares). Se aplican primero simultáneamente los campos  $E$  y  $B$  ajustándolos para producir un haz no desviado. Si entonces el campo  $B$  se apaga, el campo  $E$  provoca una desviación medible sobre la pantalla fluorescente. De la magnitud de la desviación y de los valores de  $E$  y  $B$ , la razón carga a masa,  $e/m$ , puede determinarse. Los resultados de este experimento crucial representaron el descubrimiento del electrón como partícula fundamental de la naturaleza.

## El ciclotrón

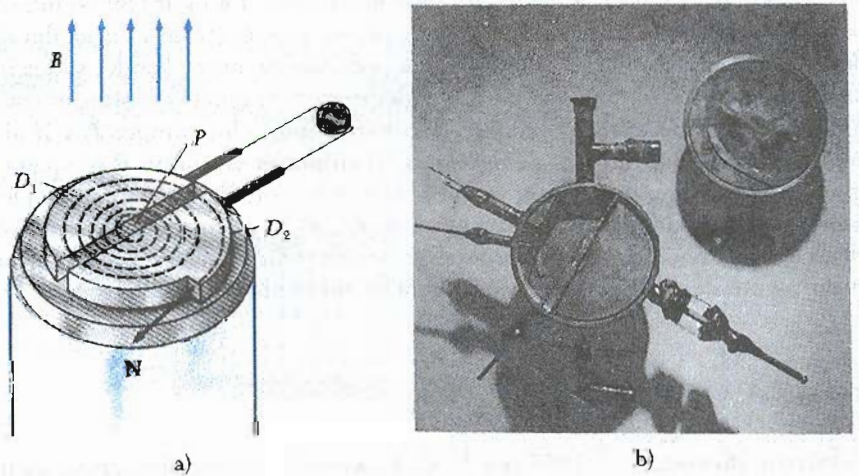
El ciclotrón, inventado en 1934 por E. O. Lawrence y M. S. Livingston, es una máquina que puede acelerar partículas cargadas a muy altas velocidades. Ambas, la fuerza eléctrica y la fuerza magnética, juegan un papel muy importante en la operación del ciclotrón. Las partículas energéticas que salen del ciclotrón se usan para bombardear otros núcleos, este bombardeo produce reacciones nucleares



**Figura 29.20** a) Aparato de Thomson para medir  $q/m$ . Los electrones son acelerados desde un cátodo, pasando a través de dos ranuras y son desviados por un campo eléctrico y un campo magnético (no mostrado, pero dirigido hacia dentro del papel). El haz desviado se estrella en la pantalla fluorescente. b) J.J. Thomson en el laboratorio Cavendish, University of Cambridge.

que interesan a los investigadores. Varios hospitales utilizan ciclotrones para producir sustancias radiactivas que pueden emplearse para el diagnóstico o el tratamiento de algunas enfermedades.

Un dibujo esquemático de un ciclotrón se muestra en la figura 29.21. El movimiento de las cargas ocurre en dos contenedores semicirculares,  $D_1$  y  $D_2$ , conocidos como *des*. En las *des* se hace vacío para reducir las pérdidas de energía provocadas por los choques entre los iones y las moléculas de aire. A las *des* se les aplica un voltaje alterno de alta frecuencia, y un campo magnético uniforme suministrado por un electroimán se dirige en forma perpendicular a ellas. Iones positivos que se liberan en  $P$  cerca del centro del imán se desplazan en una trayectoria semicircular y regresan a la brecha de  $D_1$  en un tiempo  $T/2$ , donde  $T$  es el periodo de revolución, dado por la ecuación 29.17. Se ajusta la frecuencia del voltaje  $V$  aplicado en tal forma que invierta la polaridad de las *des* en el mismo tiempo que emplean los iones en completar la mitad de una revolución. Si se ajusta



**Figura 29.21** a) El ciclotrón consta de una fuente de iones, dos *des* a través de las cuales un voltaje alterno es aplicado, y un campo magnético uniforme producido por un electroimán. (El polo sur del imán no se muestra.) b) El primer ciclotrón, inventado por E.O. Lawrence y M.S. Livingston en 1934. (Cortesía del laboratorio de Lawrence Berkeley, University of California)

la fase del voltaje aplicado de modo que  $D_2$  esté a un potencial *más bajo* que  $D_1$  en una cantidad  $V$ , el ion se acelerará a través de la brecha hasta llegar a  $D_2$  y su energía aumentará en una cantidad  $qV$ . El ion sigue moviéndose en  $D_2$  en una trayectoria semicircular de radio más grande (ya que la velocidad ha aumentado). Después de un tiempo  $T/2$ , de nuevo llega a la brecha. Pero en este tiempo, el potencial a través de las *des* se ha invertido (así que  $D_1$  es ahora negativo) y se le da otro “empujón” al ion a través de la brecha. El movimiento continúa de modo que en cada media revolución, el ion gana energía cinética adicional igual a  $qV$ . Cuando el radio de su órbita se aproxima al de las *des*, los iones energéticos salen del sistema por una ranura, como se ve en la figura 29.21.

Es importante hacer notar que la operación de un ciclotrón se basa en el hecho de que el tiempo que tarda una revolución es *independiente* de la magnitud de la velocidad (o del radio) del ion.

Puede obtenerse la energía cinética máxima del ion al salir del ciclotrón, en términos del radio  $R$  de las *des*. De la ecuación 29.15 se encuentra que  $v = qBR/m$ , de donde la energía cinética está dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} \quad (29.22)$$

Cuando la energía de los iones se hace mayor que 20 MeV, aproximadamente, entran en juego los efectos relativistas. (Tales efectos se analizarán en el capítulo 39.) Por esta razón, el periodo de la órbita aumenta y los iones en rotación no permanecen en fase con el voltaje aplicado. Se han construido aceleradores que resuelven este problema, modificando el periodo del voltaje aplicado, de manera que permanezca en fase con la rotación del ion. En 1977, se aceleraron protones hasta 400 GeV (1 GeV =  $10^9$  eV) en el acelerador de Batavia, Illinois. ¡El sistema incorpora 954 imanes y tiene una circunferencia de 6.3 km (4.1 millas)!

### EJEMPLO 29.6 Acelerando un protón

Calcúlese la energía cinética máxima de los protones en un ciclotrón de radio 0.50 m en un campo magnético de 0.35 T.

$$K = 2.34 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.46 \text{ MeV}$$

**Solución** Utilizando la ecuación 29.22 se encuentra que

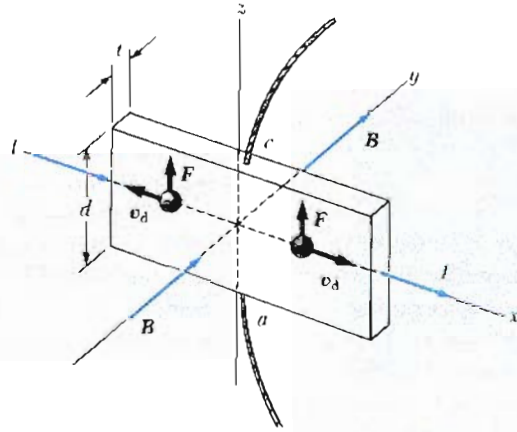
$$K = \frac{q^2B^2R^2}{2m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2(0.35 \text{ T})^2(0.50 \text{ m})^2}{2(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}$$

En este cálculo se utilizó la conversión  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$  y  $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ . ¡La energía cinética adquirida por los protones equivale a la que ganarían si fueran acelerados a través de una diferencia de potencial de 1.46 MV!

## •29.7 EFECTO HALL

En 1879 Edwin Hall descubrió que cuando un conductor que lleva corriente se coloca en un campo magnético, se genera un voltaje en la dirección perpendicular tanto a la corriente como al campo magnético. Esta observación, conocida como *efecto Hall*, proviene de la desviación de los portadores de carga hacia uno de los lados del conductor como resultado de la fuerza magnética experimentada por los portadores de carga. Un análisis apropiado de los datos experimentales suministra información referente al signo de los portadores de carga y a su densidad. El efecto también da lugar a una técnica para medir los campos magnéticos.

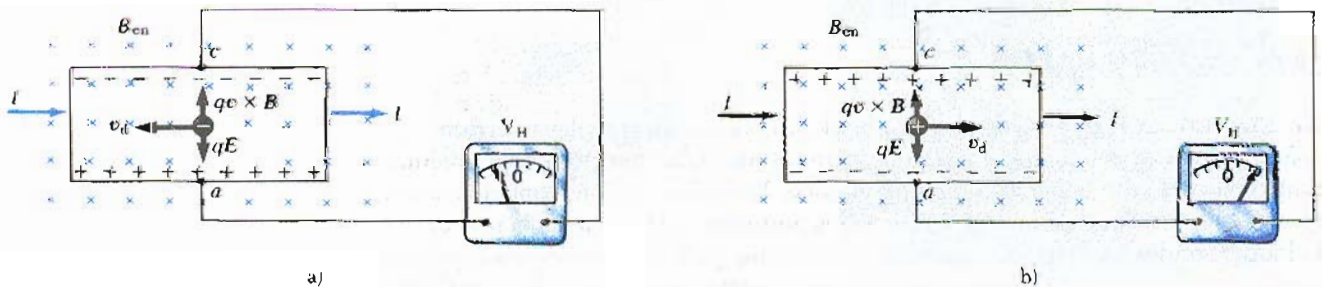
La disposición experimental para observar el efecto Hall consta de un conductor que tiene la forma de una tira plana, la cual lleva una corriente  $I$  en la dirección  $\tau$ , como se indica en la figura 29.22. Se aplica un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$



**Figura 29.22** Para observar el efecto Hall, un campo magnético se aplica a un conductor que lleve corriente. Cuando  $I$  esté en la dirección de  $x$  y  $B$  en la dirección de  $y$  como se muestra, tanto los portadores de carga positivos como negativos son desviados hacia arriba en el campo magnético. El voltaje Hall es medido entre los puntos  $a$  y  $c$ .

en la dirección  $y$ . Si los portadores de cargas son electrones que se mueven en la dirección  $x$  negativa con una velocidad  $v_d$ , experimentarán una fuerza magnética *hacia arriba*  $F$ . Por ello, los electrones se desviarán hacia arriba, acumulándose en el borde superior y dejando un exceso de carga positiva en el borde inferior (Fig. 29.23a). La carga seguirá acumulándose en los bordes hasta que el campo electrostático establecido por esta separación de cargas equilibre la fuerza magnética que actúa sobre los portadores. Al alcanzar esta condición de equilibrio, ya no seguirán desviándose electrones hacia arriba. Puede utilizarse un voltímetro sensible o un potenciómetro conectado a través de la muestra como se indica en la figura 29.23, para medir la diferencia de potencial generada a través del conductor, conocida como **voltaje Hall**,  $V_H$ . Si los portadores de carga son positivos, y por consiguiente se mueven en la dirección  $x$  positiva, como se muestra en la figura 29.23b, también experimentarán una fuerza magnética *hacia arriba*  $qv_d \times B$ . Esto produce una acumulación de carga positiva en el borde superior y deja un exceso de carga negativa en el borde inferior. Por ello, el signo del voltaje Hall generado en la muestra es opuesto al del voltaje resultante de la desviación de los electrones. Por lo tanto, puede determinarse el signo de los portadores de carga a partir de una medición de la polaridad del voltaje Hall.

Con el fin de encontrar una expresión para el voltaje Hall, se observa primero



**Figura 29.23** a) Cuando los portadores de carga son negativos, el extremo superior será negativamente cargado, y  $c$  está a un potencial más bajo que  $a$ . b) Cuando los portadores de carga son positivos, el extremo superior será cargado positivamente, y  $c$  estará a un potencial mayor que  $a$ . En ambos casos, los portadores de carga dejarán de ser desviados cuando los extremos estén totalmente cargados, es decir, cuando exista un balance entre la fuerza electrostática que sufren las cargas con la fuerza magnética que las desvía.

que la fuerza magnética que actúa sobre los portadores de carga tiene una magnitud de  $qv_d B$ . En el equilibrio, esta fuerza queda balanceada por la fuerza electrostática  $qE_H$ , en donde  $E_H$  es el campo eléctrico debido a la separación de las cargas (algunas veces mencionado como *campo Hall*). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}qv_d B &= qE_H \\E_H &= v_d B\end{aligned}$$

Si  $d$  es el ancho del conductor, entonces el voltaje Hall  $V_H$  medido por el potenciómetro, es igual a  $E_H d$ , o sea

$$V_H = E_H d = v_d B d \quad (29.23)$$

Entonces, se ve que el voltaje Hall medido da un valor para la velocidad de deriva de los portadores de carga si se conocen  $d$  y  $B$ .

El número de portadores de carga por unidad de volumen (o densidad de carga),  $n$ , puede obtenerse midiendo la corriente en la muestra. A partir de la ecuación 27.4, la velocidad de deriva puede ser expresada como

$$v_d = \frac{I}{nqA} \quad (29.24)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal del conductor. Sustituyendo la ecuación 29.24 en la ecuación 29.23 se obtiene

$$V_H = \frac{IBd}{nqA} \quad (29.25) \quad \text{Voltaje Hall}$$

Como  $A = td$ , donde  $t$  es el espesor de la muestra, también es posible expresar la ecuación 29.25 como

$$V_H = \frac{IB}{nqt} \quad (29.26)$$

La cantidad  $1/nq$  se conoce como **coeficiente Hall**,  $R_H$ . La ecuación 29.26 muestra que puede utilizarse una muestra apropiadamente calibrada para medir la intensidad de un campo magnético desconocido.

Ya que pueden medirse todas las cantidades que aparecen en la ecuación 29.26, excepto  $nq$ , se obtiene con facilidad un valor para el coeficiente Hall. El signo y magnitud de  $R_H$  proporciona el signo de los portadores de carga y su densidad. En la mayoría de los metales, los portadores de carga son electrones y su densidad de carga determinada por mediciones del efecto Hall concuerda bastante bien con los valores calculados para los metales monovalentes, como el Li, Na, Cu y Ag, en donde  $n$  es aproximadamente igual al número de electrones de valencia por unidad de volumen. Sin embargo, este modelo clásico no es válido para metales tales como el Fe, Bi y Cd, y para semiconductores como el silicio y el germanio. Estas discrepancias sólo pueden ser explicadas si se aplica un modelo basado en la naturaleza cuántica de los sólidos.

#### EJEMPLO 29.7 Efecto Hall para el cobre

Una tira rectangular de cobre que mide 1.5 cm de ancho y 0.1 cm de espesor lleva una corriente de 5 A. Se aplica un campo magnético de 1.2 T, perpendicular a la tira, como

se muestra en la figura 29.23. Determínese el voltaje Hall resultante.

**Solución** Si se supone que existe un electrón por átomo disponible para la conducción, entonces puede tomarse  $n$

$= 8.48 \times 10^{28}$  electrones/m<sup>3</sup> (Ej. 27.1). Sustituyendo este valor y los datos que se dan en la ecuación 29.26 se obtiene

$$V_H = \frac{IB}{nqt}$$

$$= \frac{(5 \text{ A})(1.2 \text{ T})}{(8.48 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.1 \times 10^{-2} \text{ m})}$$

$$V_H = 0.442 \mu\text{V}$$

De donde se puede ver que el voltaje Hall es bastante pequeño en los buenos conductores. Obsérvese que para este cálculo no es necesario el ancho de la muestra.

En los semiconductores, en donde  $n$  es mucho menor que en los metales monovalentes, se encuentra un voltaje Hall mayor por lo que  $V_H$  varía proporcionalmente al recíproco de  $n$ . En este tipo de materiales por lo general se aplican niveles de corriente del orden de 1 mA. Considérese un trozo de silicio que tenga las mismas dimensiones que la tira de cobre, con  $n = 10^{20}$  electrones/m<sup>3</sup>. Tomando  $B = 1.2 \text{ T}$  e  $I = 0.1 \text{ A}$ , se encuentra que  $V_H = 7.5 \text{ mV}$ ; un voltaje de este tipo se mide con facilidad con un potenciómetro.

## 29.8 EFECTO HALL CUÁNTICO

No obstante que el efecto Hall fue descubierto hace unos cien años, continúa siendo una valiosa técnica que ayuda a los científicos a comprender las propiedades electrónicas de los metales y de los semiconductores. Por ejemplo, en 1980, los científicos informaron que a bajas temperaturas y fuertes campos magnéticos, un sistema bidimensional de electrones en un semiconductor era exhibido a una conductividad dada por  $\sigma = i(e^2/h)$ , donde  $i$  es un pequeño entero,  $e$  es la carga electrónica y  $h$  es la constante atómica llamada constante de Planck. Este comportamiento se manifiesta por una serie de mesetas en el voltaje Hall cuando el campo magnético aplicado se varía. La naturaleza cuántica de esta conductividad bidimensional (o resistividad) no fue totalmente anticipada. Como su descubridor, Klaus von Klitzing establece: "Es bastante asombroso que es la conductividad macroscópica total del dispositivo Hall lo cuantizado en lugar de alguna conductividad microscópica idealizada."

Una de las más importantes consecuencias del efecto Hall cuántico es la posibilidad de medir la razón de las constantes fundamentales,  $e^2/h$ , con una precisión de una parte en  $10^5$ . Esto ocasiona que se tenga mucha precisión en la medida de la constante adimensional de estructuras finas dada por  $\alpha = e^2/hc \approx 1/137$ , ya que  $c$  es una cantidad exactamente definida (la velocidad de la luz). En suma, el efecto Hall da a los científicos un nuevo y conveniente estándar de resistencia. El Premio Nobel de 1985 en Física fue otorgado a von Klitzing por este fundamental descubrimiento.

Otra gran sorpresa ocurrió en 1982 cuando los científicos anunciaron que en unas muestras cercanas a lo ideal a muy bajas temperaturas, la conductividad Hall podría tomar valores enteros de  $e^2/h$  y valores fraccionarios de  $e^2/h$ . Indudablemente, descubrimientos futuros en ésta y en áreas relacionadas de la ciencia incrementarán nuestro entendimiento de la naturaleza de la materia.

### RESUMEN

La fuerza magnética que actúa sobre una carga  $q$  moviéndose con una velocidad  $v$  en un campo magnético externo  $B$  está dada por

$$F = qv \times B \quad (29.1)$$

Es decir, la fuerza magnética está en una dirección perpendicular tanto a la velocidad de la partícula como al campo. La magnitud de la fuerza magnética está dada por

Fuerza magnética sobre una partícula cargada moviéndose en un campo magnético



$$F = qvB \sin \theta \quad (29.2)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $v$  y  $B$ . De esta expresión, se ve que  $F = 0$  cuando  $v$  es paralela (u opuesta) al campo  $B$ . Además,  $F = qvB$  cuando  $v$  es perpendicular a  $B$ .

La unidad en el SI de  $B$  es el **weber por metro cuadrado** ( $\text{Wb}/\text{m}^2$ ), también llamado **tesla** (T), donde

$$[B] = \text{T} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \quad (29.3)$$

La fuerza sobre un conductor recto de longitud  $\ell$  que lleva una corriente  $I$  colocado en un campo magnético uniforme *externo*  $B$  está dada por

$$F = I \ell \times B \quad (29.5)$$

donde la dirección  $\ell$  es en la dirección de la corriente y  $|\ell| = \ell$

Si un alambre de forma arbitraria lleva una corriente  $I$  y se coloca en un campo magnético *externo*  $B$ , la fuerza sobre un pequeño segmento  $ds$  está dada por

$$dF = I ds \times B \quad (29.6)$$

Para determinar la fuerza total sobre el alambre, se integra la ecuación 29.6, teniendo cuidado ya que  $B$  y  $ds$  pueden variar en cada punto.

La fuerza magnética neta sobre cualquier circuito *cerrado* que lleve una corriente en un campo magnético uniforme *externo* es *cero*.

La fuerza sobre un conductor de forma arbitraria que lleve una corriente en un campo magnético uniforme está dada por

$$F = I \ell \times B \quad (29.9)$$

donde  $\ell$  es el vector dirigido desde uno de los extremos del conductor hasta el extremo opuesto.

El **momento magnético**  $\mu$  de una espira con una corriente  $I$  es

$$\mu = IA \quad (29.13)$$

donde  $A$  es perpendicular al plano de la espira y  $|A|$  es igual al área de la espira. En el SI la unidad de  $\mu$  es  $\text{A} \cdot \text{m}^2$ .

El momento  $\tau$  sobre una espira de corriente cuando la espira se coloca en un campo magnético uniforme *externo*  $B$  está dada por

$$\tau = \mu \times B \quad (29.14)$$

Cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético externo, el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre la partícula es *cero* ya que el desplazamiento siempre es *perpendicular* a la dirección de la fuerza magnética. El campo magnético externo puede alterar la dirección de la velocidad, pero no puede cambiar la rapidez de la partícula.

Si una partícula se mueve en un campo magnético uniforme externo de tal manera que su velocidad inicial es *perpendicular* al campo, la partícula se moverá en un círculo cuyo plano es *perpendicular* al campo magnético. El radio  $r$  de la trayectoria circular está dado por

Fuerza sobre un alambre recto que lleva corriente

Fuerza sobre un elemento de corriente

Fuerza sobre un alambre en un campo uniforme

Momento sobre una espira de corriente

Momento sobre una espira de corriente

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{29.15}$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $q$  es su carga. La frecuencia angular (frecuencia de ciclotrón) de la rotación de la partícula cargada está dada por

$$\omega = \frac{qB}{m} \tag{29.16}$$

Si la partícula cargada se mueve en presencia tanto del campo magnético como de un campo eléctrico, la fuerza total sobre la partícula está dada por la **fuerza de Lorentz**,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{29.18}$$

Esto es, la carga experimentará tanto la fuerza eléctrica  $q\mathbf{E}$  como la fuerza magnética  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

**Frecuencia de ciclotrón**

**Fuerza de Lorentz**

**PREGUNTAS**

1. En un instante dado, un protón se mueve en la dirección de  $x$  positiva en una región donde existe un campo magnético en la dirección negativa de  $z$ . ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética? ¿El protón continuará moviéndose en la dirección positiva de  $x$ ? Dé una explicación.
2. Dos partículas cargadas se lanzan hacia una región donde existe un campo magnético perpendicular a sus velocidades. Si las cargas son desviadas en direcciones opuestas, ¿qué puede decir acerca de ellas?
3. Si una partícula cargada se mueve en línea recta a través de una región del espacio, ¿podría decir que el campo magnético en esa región es cero?
4. Suponga que un electrón está siguiendo a un protón hacia la parte superior de la página cuando súbitamente se forma un campo magnético perpendicular a la página. ¿Qué les sucede a las partículas?
5. ¿Por qué una imagen sobre la pantalla de la TV puede distorsionarse cuando un imán se pasa cerca de la pantalla?
6. ¿Cómo puede ser utilizado el movimiento de una partícula cargada para distinguir entre campo magnético y campo eléctrico? Dé un ejemplo específico para justificar su argumento.
7. Enliste algunas similitudes y diferencias entre las fuerzas eléctrica y magnética.
8. Justifique la siguiente afirmación: "es imposible para un campo magnético constante (es decir, independiente del tiempo) alterar la rapidez de una partícula cargada".
9. En vista de la afirmación anterior, ¿qué papel juega el campo magnético en un ciclotrón?
10. Un conductor que lleva una corriente no experimenta una fuerza magnética cuando se coloca en cierta forma en un campo magnético uniforme. Explique.
11. ¿Es posible orientar una espira de corriente en un campo magnético uniforme de tal manera que no tienda a girar? Explique.
12. ¿Cómo puede una espira de corriente ser utilizada para determinar la presencia de un campo magnético en una región dada del espacio?
13. ¿Cuál es la fuerza neta sobre una brújula en un campo magnético uniforme?
14. ¿Qué tipo de campo magnético se requiere para ejercer una fuerza resultante sobre un dipolo magnético? ¿Cuál sería la dirección de la fuerza resultante?
15. Un protón moviéndose horizontalmente entra a una región donde existe un campo magnético uniforme perpendicular a su velocidad, como se muestra en la figura 29.24. Describa el movimiento subsecuente. ¿Cómo sería el comportamiento de un electrón en las mismas circunstancias?
16. En una botella magnética, ¿cuál es la velocidad de las partículas cargadas confinadas en los extremos de la botella? (*Sugerencia:* encuentre la dirección de la fuerza magnética sobre las partículas cargadas en una región donde el campo es intenso y las líneas de campo convergen.)
17. En un ciclotrón, ¿por qué partículas de diferentes velocidades toman el mismo tiempo en completar una semi-revolución?
18. La *cámara de burbujas* es un dispositivo utilizado para observar trayectorias de partículas que pasan a través de

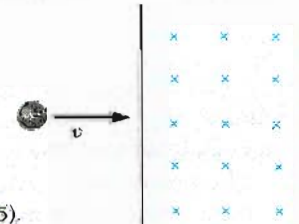
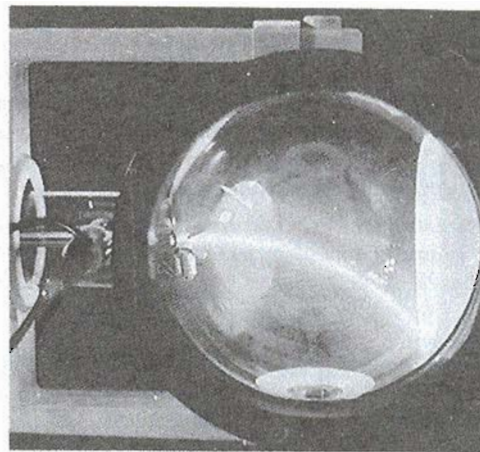


Figura 29.24 (Pregunta 15).

la cámara, la cual está inmersa en un campo magnético. Si alguna de las trayectorias son líneas espirales y otras son rectas, ¿qué podría decir acerca de las partículas?

19. ¿Puede un campo magnético poner en movimiento a un electrón en reposo? Si es así, ¿cómo?
20. Se tiene que diseñar una punta de prueba magnética utilizando el efecto Hall para medir campos magnéticos. Suponga que está restringido a usar un material determinado y que se puede hacer la punta de prueba tan delgada como sea posible. ¿Qué se podría hacer para incrementar el voltaje Hall producido por un campo magnético de intensidad dada?
21. El haz de electrones en la fotografía se proyecta hacia la derecha. El haz se desvía hacia abajo en presencia de un campo magnético producido por un par de bobinas que llevan corriente. a) ¿Cuál es la dirección del campo magnético? b) ¿Qué pasaría con el haz si se invierte la corriente en las bobinas?



(Cortesía de CENCO)

## PROBLEMAS

### Sección 29.2 Definición y propiedades del campo magnético

1. Considere un electrón que se encuentra próximo al ecuador magnético. ¿En qué dirección se deflejaría si su velocidad está dirigida hacia: a) abajo, b) el norte, c) el oeste, d) el sur?
2. Un electrón que se mueve a lo largo del eje  $x$  perpendicularmente a un campo magnético experimenta una desviación magnética en la dirección del eje  $y$ . ¿Cuál es la dirección del campo magnético en esta región?
3. Una partícula alfa (la cual es un núcleo del átomo de helio) se mueve hacia el norte con una velocidad de  $3.8 \times 10^5$  m/s en una región donde el campo magnético es 1.9 T y está apuntando horizontalmente hacia el este. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre esta partícula alfa?
4. ¿Cuál es la fuerza de origen magnético experimentada por un protón que se mueve de norte a sur con una rapidez de  $4.8 \times 10^6$  m/s en un lugar donde la componente vertical del campo magnético de la Tierra es de  $75 \mu\text{T}$  dirigido hacia abajo? ¿En qué dirección es desviado el protón?
5. Un protón moviéndose con rapidez de  $4 \times 10^6$  m/s a través de un campo magnético de 1.7 T experimenta una fuerza magnética de  $8.2 \times 10^{-13}$  N. ¿Cuál es el ángulo entre la velocidad del protón y el campo?
6. Un electrón se acelera a través de 2400 V y entonces entra a una región donde existe un campo magnético uniforme de 1.7 T. ¿Cuál es el valor: a) máximo y b) mínimo de la fuerza magnética que experimenta esta carga?
7. El campo magnético sobre cierta región está dado por  $\mathbf{B} = (4\mathbf{i} - 11\mathbf{j})$  T. Un electrón se mueve en el campo con una velocidad  $\mathbf{v} = (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k})$  m/s. Escriba en

notación vectorial cuál sería la fuerza ejercida sobre el electrón por el campo magnético.

8. Un electrón es lanzado dentro un campo magnético uniforme dado por  $\mathbf{B} = (1.4\mathbf{i} + 2.1\mathbf{j})$  T. Determine la expresión vectorial para la fuerza sobre un electrón cuando su velocidad es  $\mathbf{v} = 3.7 \times 10^5\mathbf{j}$  m/s.
9. Un protón se mueve con una velocidad de  $\mathbf{v} = (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k})$  m/s en una región en la cual está dado por  $\mathbf{B} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$  T. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética que experimenta la carga?
10. Un protón se mueve perpendicularmente a un campo magnético  $\mathbf{B}$  con una velocidad de  $10^7$  m/s y experimenta una aceleración de  $2 \times 10^{13}$  m/s<sup>2</sup> en la dirección del eje  $+x$  cuando su velocidad está en la dirección de  $+z$ . Determine la magnitud y la dirección del campo.
11. Demuestre que el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre una partícula cargada moviéndose en un campo magnético es cero para cualquier desplazamiento de la partícula.

### Sección 29.3 Fuerza magnética sobre un conductor que lleva una corriente

12. Calcule la magnitud de la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre un conductor que lleva una corriente de 22 A en una región donde un campo magnético uniforme tiene una magnitud de 0.77 T y está dirigido perpendicularmente al conductor.
13. Un alambre lleva una corriente estacionaria de 2.4 A. Una sección recta del alambre a lo largo del eje  $x$ , con longitud de 0.75 m se encuentra dentro de un campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = (1.6\mathbf{k})$  T. Si la corriente fluye en la dirección del eje  $+x$ , ¿cuál es la fuerza magnética sobre la sección del alambre?

14. Un conductor suspendido por dos alambres flexibles como en la figura 29.25 tiene una masa por unidad de longitud de  $0.04 \text{ kg/m}$ . ¿Qué corriente debe existir en el conductor para que la tensión en los alambres que lo soportan sea cero, si el campo magnético en esa región es de  $3.6 \text{ T}$  dirigido hacia dentro de la página? ¿Cuál es la dirección de la corriente requerida?

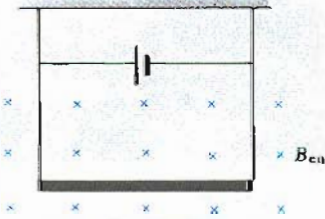


Figura 29.25 (Problema 14).

15. Un alambre cuya masa por unidad de longitud es  $0.5 \text{ gr/cm}$  lleva una corriente de  $2 \text{ A}$  horizontalmente hacia el sur. ¿Cuál es la dirección y la magnitud del campo necesario para levantar verticalmente hacia arriba este alambre?
16. Una espira rectangular cuyas dimensiones son  $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$  está suspendida por una cuerda, y la parte horizontal inferior de la espira está inmersa en un campo magnético confinado a una región circular (Fig. 29.26). Si una corriente de  $3 \text{ A}$  se mantiene en la espira en la dirección mostrada, ¿cuál es la dirección y la magnitud del campo magnético requerido para producir una tensión de  $4 \times 10^{-2} \text{ N}$  en la cuerda que lo soporta? (Desprecie la masa de la espira.)

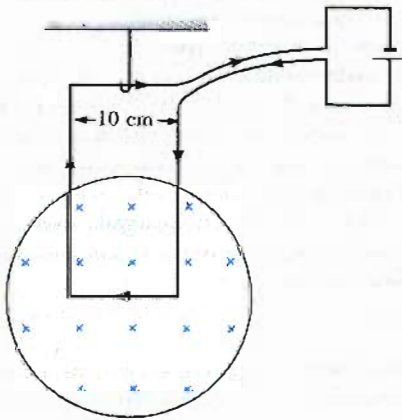


Figura 29.26 (Problema 16).

17. Un alambre de  $2.8 \text{ m}$  de longitud lleva una corriente de  $5 \text{ A}$  en una región donde un campo magnético uniforme tiene una magnitud de  $0.39 \text{ T}$ . Calcule la fuerza magnética sobre el alambre si el ángulo entre el campo magnético y la dirección de la corriente en el alambre es: a)  $60^\circ$ , b)  $90^\circ$ , c)  $120^\circ$ .
18. El segmento de conductor de la figura 29.27 lleva una corriente  $I = 0.2 \text{ A}$ . La sección corta del segmento tiene  $0.80 \text{ m}$  de longitud, y la sección larga tiene  $1.6 \text{ m}$  de

longitud. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre el conductor si existe un campo magnético uniforme dado por  $\mathbf{B} = 1.9\hat{i} \text{ T}$  en esa región.

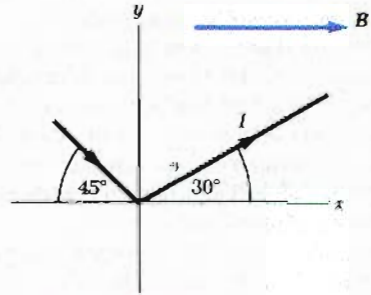


Figura 29.27 (Problema 18).

19. En un alambre una corriente  $I = 15 \text{ A}$  está dirigida a lo largo del eje  $x$  positivo, perpendicular a un campo magnético. La corriente experimenta una fuerza por unidad de longitud de  $0.63 \text{ N/m}$  en la dirección del eje  $y$  negativo. Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético en la región a través de la cual pasa la corriente.
20. La Tierra tiene un campo magnético de  $0.6 \times 10^{-4} \text{ T}$ , apuntando a  $75^\circ$  abajo del plano horizontal norte-sur. Un alambre recto de  $10 \text{ m}$  de longitud lleva una corriente de  $15 \text{ A}$ . a) Si la corriente está dirigida horizontalmente hacia el este, ¿cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre el alambre? b) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza si la corriente está dirigida verticalmente hacia arriba?
21. Un imán potente se coloca debajo de un anillo conductor horizontal de radio  $r$  que lleva una corriente  $I$  como se muestra en la figura 29.28. Si las líneas de fuerza del campo magnético hacen un ángulo  $\theta$  con la vertical en donde se encuentra el anillo, ¿cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre el anillo?

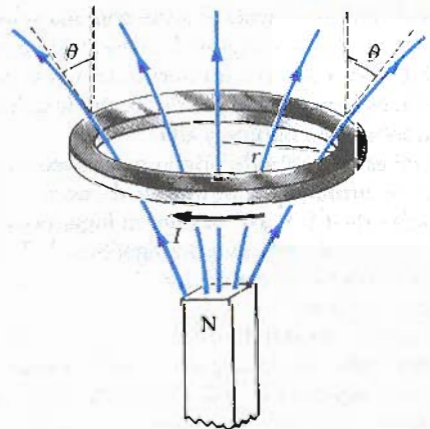


Figura 29.28 (Problema 21).

Sección 29.4 Momento sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme

22. Una corriente de  $17 \text{ mA}$  se mantiene en una espira circular de  $2 \text{ cm}$  de circunferencia. Un campo magnético externo de  $0.8 \text{ T}$  está dirigido paralelo al plano de

la espira. a) Calcule el momento magnético de la espira de corriente. b) ¿Cuál es la magnitud del momento ejercido sobre la espira por el campo magnético?

23. Una espira rectangular que consta de 100 vueltas, tiene dimensiones de 0.4 m por 0.3 m. La espira está articulada a lo largo del eje  $y$  y el plano de la bobina forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $x$  (Fig. 29.29). ¿Cuál es la magnitud del momento ejercido sobre la espira por un campo magnético de 0.8 T dirigido a lo largo del eje  $x$  cuando la corriente en las vueltas tiene un valor de 1.2 A en la dirección mostrada? ¿En qué dirección se espera que gire la espira?

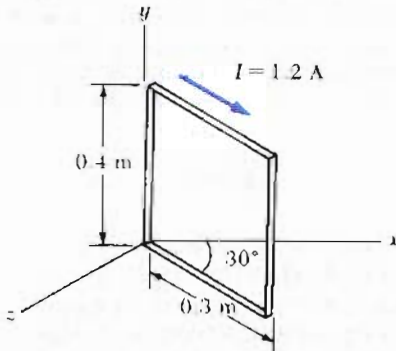


Figura 29.29 (Problema 23).

24. Una pequeña barra de imán se suspende en un campo magnético uniforme de 0.25 T. El máximo momento experimentado por el imán de barras es de  $4.6 = 10^{-3}$  N · m. Calcule el momento magnético del imán de barra.
25. Una bobina rectangular de 225 vueltas de área  $0.45 \text{ m}^2$  está en un campo magnético uniforme de 0.21 T. Las mediciones indican que el máximo momento ejercido sobre la espira por el campo es de  $8 \times 10^{-3}$  N · m. a) Calcule la corriente en la bobina. b) ¿Sería diferente el valor que se encontraría para la corriente si se utilizaran las 225 vueltas de alambre para formar una espira de una sola vuelta de la misma forma y mayor área? Dé una explicación.
26. Una espira circular está hecha con 1 m de alambre y lleva una corriente de 70 mA. a) Calcule el momento magnético de este alambre. b) Forme con el mismo alambre una bobina de 50 vueltas y calcule su momento magnético.
27. Una bobina circular de 100 vueltas tiene un radio de 0.025 m y lleva una corriente de 0.1 A dentro de un campo magnético uniforme de 1.5 T. ¿Cuánto trabajo debe realizarse para hacer girar la bobina desde una posición donde el momento magnético es paralelo al campo magnético hasta la posición donde el momento magnético es opuesto al campo?

### Sección 29.5 Movimiento de un partícula cargada en un campo magnético

28. En cierto lugar el campo magnético de la Tierra está dirigido verticalmente hacia abajo y tiene una magnitud de  $0.5 \times 10^{-4}$  T. Un protón se mueve horizontalmente

hacia el oeste en este campo con una velocidad de  $6.2 \times 10^8$  m/s. a) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza magnética ejercida por el campo sobre la carga? b) ¿Cuál es el radio del arco circular seguido por el protón?

29. Un ion con una sola carga positiva tiene una masa de  $3.2 \times 10^{-26}$  kg. Después de ser acelerado a través de una diferencia de potencial de 833 V, el ion entra a un campo magnético de 0.92 T a lo largo de una dirección perpendicular a la dirección del campo. Calcule el radio de la trayectoria del ion en el campo.
30. Considere una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  moviéndose con una velocidad  $v$ . La partícula entra a una región perpendicular al campo magnético  $B$ . Demuestre que mientras se encuentre en la región del campo magnético la energía cinética de la partícula es proporcional al cuadrado del radio de su órbita.
31. ¿Qué campo magnético sería requerido para restringir un electrón cuya energía es de 725 eV a una trayectoria circular de 0.5 m de radio?
32. Un haz de protones (todos con velocidad  $v$ ) emergen de un acelerador de partículas y son desviados en un arco circular con radio de 0.45 m por un campo magnético trasversal de 0.80 T. a) Determine la rapidez  $v$  del haz de protones. b) ¿Qué tiempo se requiere para la desviación de un protón a través de un ángulo de  $90^\circ$ ? c) ¿Cuál es la energía de las partículas del haz?
33. Un protón, un deuterón y una partícula alfa (núcleo del He) son acelerados a través de una misma diferencia de potencial  $V$ . Las partículas entran a un campo magnético uniforme  $B$  a lo largo de una dirección perpendicular a  $B$ . El protón se mueve en una trayectoria circular de radio  $r_p$ . Encuentre los valores de los radios de las órbitas del deuterón,  $r_d$ , y de la partícula alfa,  $r_\alpha$ , en términos de  $r_p$ .
34. Calcule la frecuencia de ciclotrón de un protón en un campo magnético de 5.2 T.
35. Un rayo cósmico (protón) en el medio interestelar tiene una energía de 10 MeV y realiza una órbita circular con radio igual al de la órbita de Mercurio alrededor del Sol ( $5.8 \times 10^{10}$  m). ¿Cuál es el campo magnético galáctico en esa región del espacio?
36. Un ion de masa  $m$  con una sola carga se acelera desde el reposo por una diferencia de potencial  $V$ . Después es desviado por un campo magnético (perpendicular a la velocidad del ion) dentro de un semicírculo de radio  $R$ . Ahora un ion de doble carga de masa  $m'$  es acelerado a través del mismo potencial y desviado por el mismo campo magnético dentro de un semicírculo de radio  $R' = 2R$ . ¿Cuál es la razón de las masas de los iones?
37. Un ion positivo simplemente cargado se mueve con velocidad de  $4.5 \times 10^5$  m/s saliendo de una trayectoria espiral de radio 7.94 mm en una fotografía a lo largo de la dirección perpendicular de un campo magnético de una cámara de burbujas. El campo magnético aplicado para la fotografía tiene una magnitud de 1.8 T. Encuentre la masa (en unidades de masa atómica) de esta partícula y, a partir de esto, identifique la partícula.
38. El voltaje acelerador que se aplica a un cañón de electrones es de 15 kV, y la distancia horizontal desde el cañón hasta la pantalla es de 35 cm. ¿Cuál es la desvia-

ción causada por la componente vertical del campo magnético de la Tierra ( $4 \times 10^{-5}$  T), suponiendo que cualquier cambio en la componente horizontal de la velocidad del haz es despreciable?

**\*Sección 29.6 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético**

- 39. Un selector de velocidades de campo cruzado tiene un campo magnético de  $10^{-2}$  T. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico requerido para que electrones de 10 keV pasen sin ser desviados?
- 40. Una partícula alfa con velocidad  $v = 6.2 \times 10^4$  m/s entra a una región donde el campo magnético tiene un valor de  $B = 1.1$  kT. Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico  $E$  requerido para que una partícula alfa continúe moviéndose a lo largo del eje  $x$ .
- 41. Suponga que un protón y un electrón, cada uno con energía cinética de 200 eV, entran a un campo magnético uniforme de intensidad 0.01 T en una dirección perpendicular al campo. ¿Cuáles son los radios de las trayectorias circulares que seguirían estas dos partículas?
- 42. Iones de uranio simplemente cargados son acelerados a través de una diferencia de potencial de 2 kV y entran a un campo magnético uniforme de 1.2 T dirigido perpendicularmente a sus velocidades. Determine el radio de la trayectoria circular que seguirán estos iones suponiendo que éstos son: a) iones de  $U^{238}$ , b) iones de  $U^{235}$ . ¿Cómo depende la razón de los radios de las trayectorias del voltaje de aceleración y de la intensidad del campo magnético?
- 43. Considere el espectrómetro de masas que se muestra esquemáticamente en la figura 29.19. El campo eléctrico entre las placas del selector de velocidades es de 950 V/m y el campo magnético tanto en el selector de velocidades como en la cámara de desviación tiene una magnitud de 0.93 T. Calcule el radio de la trayectoria en el sistema para un ion simplemente cargado con masa  $m = 2.18 \times 10^{-26}$  kg.
- 44. ¿Cuál es el radio que requiere un ciclotrón diseñado para acelerar protones hasta energías de 34 MeV utilizando un campo magnético de 5.2 T?
- 45. ¿Cuál es el mínimo tamaño de un ciclotrón diseñado para acelerar protones hasta una energía de 18 MeV con una frecuencia de ciclotrón de  $3 \times 10^7$  Hz?
- 46. Un ciclotrón diseñado para acelerar partículas alfa tiene un diámetro de 1.52 m y opera a una frecuencia de 9.37 MHz. ¿Cuál es la máxima energía cinética de las partículas alfa?
- 47. Un ciclotrón diseñado para acelerar protones está provisto de un campo magnético de 0.45 T y tiene un radio de 1.2 m. a) ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón? b) ¿Cuál es la máxima rapidez adquirida por los protones?
- 48. a) ¿Cuál debe ser la intensidad del campo magnético en un ciclotrón de 60 pulgadas de diámetro si el ciclotrón acelera protones hasta una energía cinética máxima de 10.5 MeV? b) ¿A qué frecuencia debe operar el oscilador del ciclotrón? c) Si la frecuencia de oscilación se mantiene en el valor encontrado en el inciso b, ¿a qué valor debe modificarse la intensidad del campo magné-

tico si el ciclotrón está acelerando deuterones? (Nota: un deuterón es un núcleo de deuterio, el cual consta de un protón y un neutrón unidos.) d) Después de que el ciclotrón se ajusta para acelerar deuterones, ¿cuál es la máxima energía cinética que puede dar a los deuterones?

- 49. El cinescopio de la televisión utiliza bobinas magnéticas de desviación en lugar de placas eléctricas de desviación. Suponga que un haz de electrones se acelera a través de una diferencia de potencial de 50 kV y entonces pasa a través de un campo magnético uniforme producido por estas bobinas por 1 cm. La pantalla está localizada a 10 cm del centro de la bobina y es de 50 cm de ancho. Cuando el campo está ausente, el haz de electrones golpea el centro de la pantalla. ¿Qué intensidad de campo es necesaria para desviar el haz hasta el extremo de la pantalla?

**\*Sección 29.7 Efecto Hall**

- 50. Una placa de plata de espesor  $t = 0.20$  mm se utiliza para medir el efecto Hall de un campo magnético uniforme que es perpendicular a la placa, como se muestra en la figura 29.30. El coeficiente Hall para la plata es  $R_H = -0.84 \times 10^{-10}$  m<sup>3</sup>/C. a) ¿Cuál es la densidad efectiva de los portadores de carga  $n$ , en la plata. b) Si una corriente  $I = 20$  A produce un voltaje Hall  $V_H = 15$   $\mu$ V, ¿cuál es la magnitud del campo magnético aplicado?

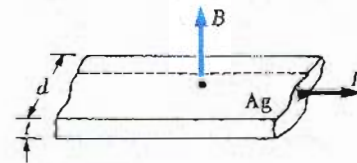


Figura 29.30 (Problema 50).

- 51. Una sección de un conductor de 0.4 cm de espesor se utiliza como espécimen en la medida del efecto Hall. Si un voltaje Hall de 35  $\mu$ V es medido para una corriente de 21 A en un campo magnético de 1.8 T, calcule el coeficiente Hall para el conductor.
- 52. Suponga que una hoja de plata lleva una corriente de 5 A. Si la corriente está dirigida perpendicular a un campo magnético uniforme de 1.2 T, ¿cuál debe ser el espesor de la hoja para producir un voltaje Hall de: a) 1.0  $\mu$ V y b) 1.0 mV?
- 53. En un experimento diseñado para medir el campo magnético terrestre aplicando el efecto Hall, se coloca una barra de cobre que tiene un espesor de 0.5 m a lo largo de la dirección este-oeste. Si una corriente de 8 A en el conductor produce un voltaje Hall de  $5.1 \times 10^{-12}$  V, ¿cuál es el valor calculado del campo magnético de la Tierra? (Suponga que  $n = 8.48 \times 10^{28}$  electrones/m<sup>3</sup> y que se hace girar el plano de la barra hasta que queda perpendicular a la dirección de  $B$ .)
- 54. Una placa delgada de cobre con espesor de 1/3 mm lleva una corriente estable de 50 A y se encuentra dentro de un campo magnético uniforme de 1.3 T que está dirigido perpendicularmente al plano de la placa. Si un vol-

taje Hall de  $9.6 \mu\text{V}$  se mide a través de la placa, ¿cuál es la densidad de carga de los electrones libres en la placa de cobre? ¿Cuál es el número efectivo de electrones libres por átomo que indica este resultado?

55. El efecto Hall puede utilizarse para medir el número de electrones de conducción por unidad de volumen  $n$  para una muestra desconocida. La muestra tiene 15 mm de espesor, y cuando se coloca en un campo magnético de 1.8 T produce un voltaje Hall de  $0.122 \mu\text{V}$  mientras lleva una corriente de 12 A. ¿Cuál es el valor de  $n$ ?
56. Una muestra de plata de 2 mm de espesor se utiliza para medir el campo magnético en cierta región del espacio. La plata tiene aproximadamente  $n = 5.86 \times 10^{28}$  electrones/ $\text{m}^3$ . Si una corriente de 15 A en la muestra produce un voltaje Hall de  $0.24 \mu\text{V}$ , ¿cuál es la intensidad del campo magnético?

**PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS**

57. Un alambre con masa de 1 g/cm se coloca en una superficie horizontal con coeficiente de fricción de 0.2. El alambre lleva una corriente de 1.5 A hacia el este, y se mueve horizontalmente hacia el norte. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del más pequeño campo magnético que hace que el alambre se mueva de esa manera?
58. Indique la dirección inicial de la desviación de las partículas cargadas cuando entran en los campos magnéticos que se muestran en la figura 29.31.

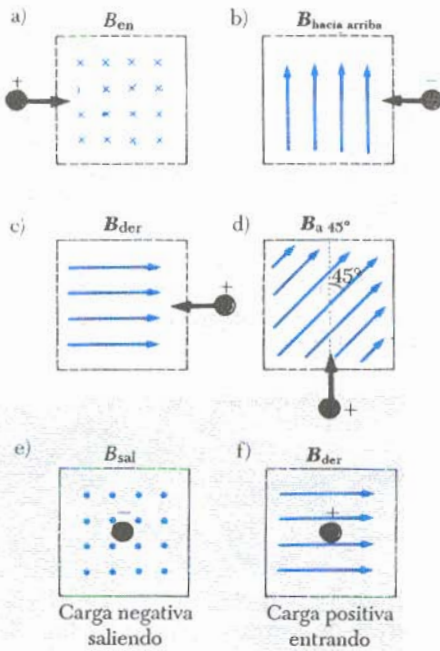


Figura 29.31 (Problema 58).

59. Una carga positiva  $q = 3.2 \times 10^{-19}$  C se mueve con una velocidad  $\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$  m/s a través de una región donde existen tanto campo magnético como eléctrico. a) Calcule la fuerza total sobre la carga en movimiento (en notación vectorial) si  $\mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k})$  T y  $\mathbf{E} = (4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$  V/m. b) ¿Qué ángulo hace la fuerza con el eje  $x$ ?

60. Un alambre conductor de sección trasversal circular formado por un material que tiene una densidad de  $2.7 \text{ g/cm}^3$  se coloca en un campo magnético uniforme con el eje del alambre perpendicular a la dirección del campo. Una densidad de corriente de  $2.4 \times 10^6 \text{ A/m}^2$  se establece en el alambre y el campo magnético se incrementa hasta que la fuerza magnética justo equilibra la fuerza gravitacional. Calcule el valor de  $\mathbf{B}$  cuando esta condición se cumple.
61. Un alambre recto de 10 g y 5 cm se suspende con dos resortes idénticos de tal manera que forman un circuito cerrado (Fig. 29.32) Los resortes se alargan una distancia de 0.5 cm debido al peso del alambre. El circuito tiene una resistencia total de  $12 \Omega$ . Cuando se aplica un campo magnético, dirigido hacia afuera de la página (indicado por medio de puntos en la figura 29.32), se observa que los resortes se alargan 0.3 cm más. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético? (La parte superior del circuito está fija.)

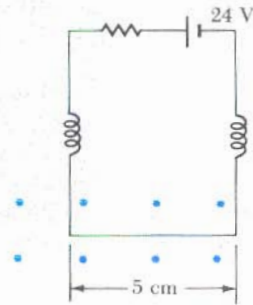


Figura 29.32 (Problema 61).

62. Una espira rectangular de alambre que lleva una corriente de 2 A se suspende verticalmente del brazo derecho de una balanza. Después de que el sistema se balancea, un campo magnético externo se introduce. Dicho campo magnético pasa por el extremo inferior de la espira en la dirección perpendicular al alambre. Si el ancho de la espira es de 20 cm y se deben de colocar 13.5 g de masa en el brazo izquierdo para rebalancear el sistema, determine  $\mathbf{B}$ .
63. A un alambre conductor se le da la forma de una M con las dimensiones que se muestran en la figura 29.33 y se le hace conducir una corriente de 15 A. Un campo magnético externo  $\mathbf{B} = 2.5$  T está dirigido como se muestra y está a través de toda la región ocupada por el conductor. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza total ejercida sobre el conductor por el campo magnético.

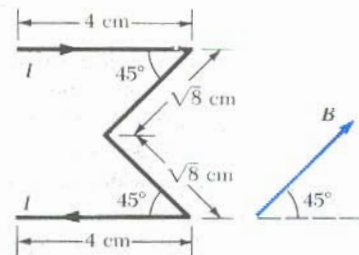


Figura 29.33 (Problema 63).

64. Una barra de metal de masa  $M$  y longitud  $L$  pivotea en su extremo superior y tiene la libertad de oscilar alrededor del pivote. La barra se encuentra en un campo magnético uniforme horizontal  $\mathbf{B}$ . Cuando la barra lleva una corriente estable  $I$ , la barra se inclina un ángulo  $\theta$  con respecto a la vertical. ¿Cuál es la magnitud de  $\mathbf{B}$  en términos de  $M$ ,  $g$ ,  $I$ ,  $L$  y  $\theta$ ? (Sugerencia: la fuerza magnética, la cual está uniformemente distribuida a lo largo de la barra, puede ser considerada como una fuerza que actúa en el centro de la barra.)
65. Se utiliza un espectrómetro de masas Bainbridge para examinar isótopos de uranio. Los iones del haz emergen del selector de velocidades con una rapidez de  $3 \times 10^5$  m/s y entran a un campo magnético uniforme de 0.6 T dirigido perpendicularmente a la velocidad de los iones. ¿Cuál es la distancia entre los puntos de impacto formados sobre la placa fotográfica para iones con una sola carga de  $^{235}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$ ?
66. Un ciclotrón diseñado para acelerar deuterones tiene un campo magnético con una intensidad uniforme de 1.5 T sobre una región de 0.45 m de radio. Si el potencial alterno entre las *des* del ciclotrón tiene aproximadamente un valor de 15 kV, ¿qué tiempo requerirá el deuterón para adquirir la energía máxima que puede alcanzar?
67. Se observa que un ion pesado completa cinco revoluciones en un campo magnético uniforme de magnitud  $5 \times 10^{-2}$  T en 1.50 ms. Calcule (aproximadamente) la masa del ion en kg.
68. Un campo magnético de 0.15 T está dirigido a lo largo del eje  $x$  positivo. Un positrón que se mueve con rapidez de  $5 \times 10^6$  m/s entra al campo a lo largo de una dirección que forma un ángulo de  $85^\circ$  con el eje  $x$  (Fig. 29.34). Se espera que el movimiento de la partícula sea una hélice, como se describió en la sección 29.5. Calcule: a) el paso  $p$  y b) el radio  $r$  de la trayectoria.

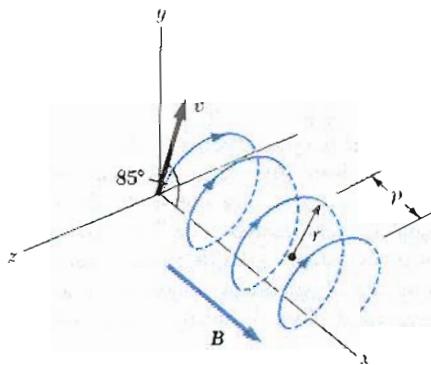


Figura 29.34 (Problema 68).

69. Considere un electrón que describe una órbita alrededor de un protón y se mantiene en una trayectoria circular de radio igual a  $R = 5.29 \times 10^{-11}$  m por la acción de la fuerza de Coulomb de atracción mutua. Tratando a la carga que describe la órbita como una espira de corriente, calcule el momento resultante cuando el sistema se encuentra en un campo magnético externo de 0.4 T dirigido en forma perpendicular al momento magnético del electrón en órbita.

70. Un protón que se mueve en el plano de la página tiene una energía cinética de 6 MeV. Entra a un campo magnético  $B = 1$  T (hacia adentro de la página) a un ángulo de  $\theta = 45^\circ$  de la línea que acota el campo como se muestra en la figura 29.35. a) Determine  $x$ , la distancia desde el punto de entrada del protón al campo hasta el punto de salida del mismo. b) Determine el ángulo  $\theta'$ , el ángulo entre la línea que acota al campo y el vector velocidad de salida del campo.

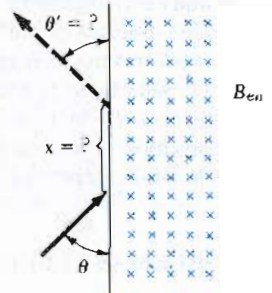


Figura 29.35 (Problema 70).

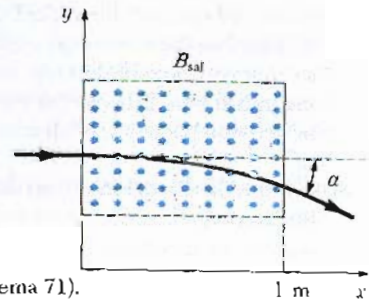
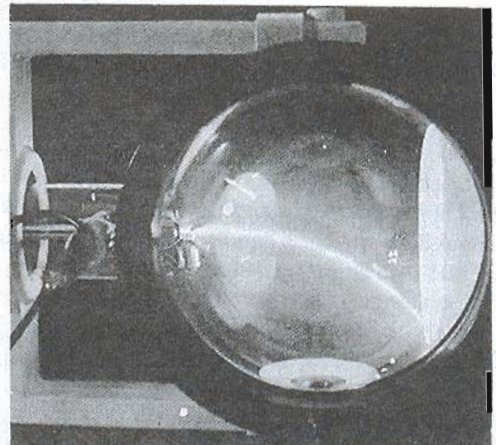


Figura 29.36 (Problema 71).

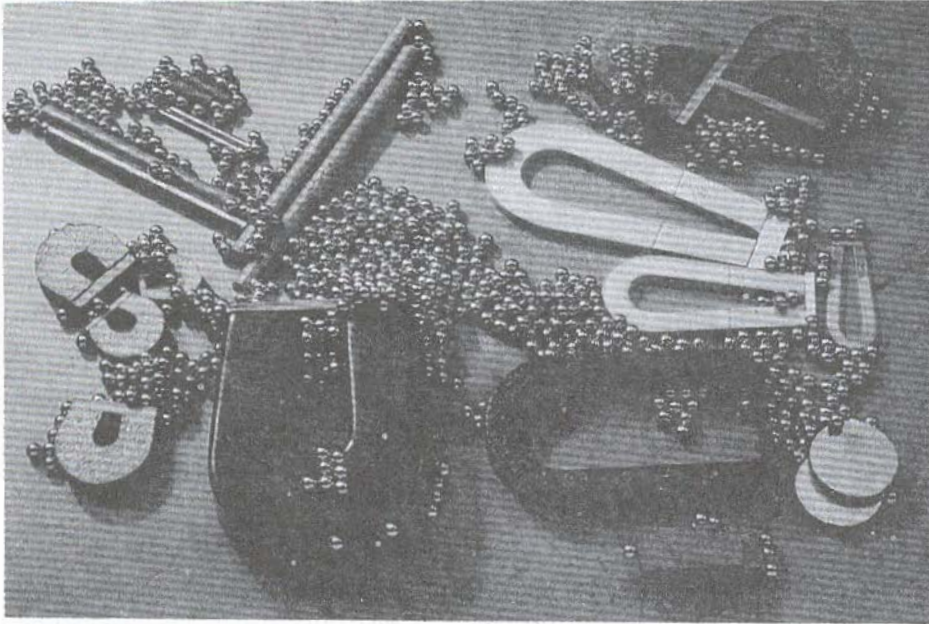
71. Protones con energía cinética de 50 MeV están moviéndose en la dirección del eje  $x$  positivo y entran a un campo magnético  $\mathbf{B} = (0.5 \text{ T})\mathbf{k}$  dirigido hacia afuera del plano de la página y que se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = 1$  m como se muestra en la figura 29.36. a) Calcule la componente  $y$  del momento o cantidad de movimiento de los protones cuando salen del campo magnético en  $x = 1$  m. b) Determine el ángulo  $\alpha$  entre la velocidad inicial del haz de protones y la velocidad después de que emergen del campo. (Note que  $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ .)



(Cortesía de CENCO)



## Fuentes de campo magnético



*Variedad de imanes comerciales. Los cuatro imanes rojos y el gran imán negro de la izquierda están hechos de una aleación de hierro, aluminio y cobalto. Los seis imanes de herradura de la derecha están elaborados con diferentes aleaciones de níquel y acero. Los imanes rectangulares de la parte inferior derecha son cerámicas hechas de hierro, níquel y óxidos de berilio. (Cortés de CENCO)*

**E**n el capítulo anterior se trataron problemas que implican la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento en un campo magnético. Para completar la descripción de las interacciones magnéticas, en este capítulo se tratará el origen del campo magnético debido a cargas en movimiento o a corrientes eléctricas. Se empezará por demostrar cómo se utiliza la ley de Biot y Savart para calcular el campo magnético producido en un punto por un elemento de corriente. Utilizando este formalismo y el principio de superposición, se calculará el campo magnético debido a una distribución de corriente para varias geometrías. Después, se demostrará cómo se determina la fuerza entre dos conductores que llevan corriente, con lo cual se obtiene la definición del amperio. También se introducirá la ley de Ampère, la cual es muy útil para el cálculo de campos magnéticos en configuraciones de alta simetría que lleven corrientes constantes. Se aplicará la ley de Ampère para determinar los campos magnéticos para algunas configuraciones de corriente, incluyendo al solenoide.

A este capítulo también le conciernen algunos aspectos de los procesos complejos que ocurren en materiales magnéticos. Todos los efectos magnéticos en la materia pueden ser explicados con base en las espiras de corriente asociadas con los momentos dipolares atómicos. Estos momentos dipolares atómicos pueden deberse tanto al movimiento orbital de los electrones como a una propiedad intrínseca de los electrones llamada *espín*. La descripción del magnetismo en la materia se basará en el hecho experimental de que la presencia de materia generalmente modifica el campo magnético producido por corrientes. Por ejemplo, cuando un material se coloca dentro de un solenoide que lleva corriente, el campo magnético del material *se superpone*, es decir, se suma (vectorialmente) al campo que está previamente establecido.

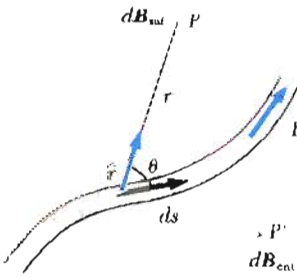


Figura 30.1 El campo magnético  $d\mathbf{B}$  en el punto  $P$  debido a un elemento de corriente  $ds$  está dado por la ley de Biot-Savart, ecuación 30.1. El campo está hacia afuera del papel en  $P$ .

### Propiedades del campo magnético debido a un elemento de corriente

1. El vector  $d\mathbf{B}$  es perpendicular tanto a  $ds$  (el cual tiene la dirección de la corriente) como al vector unitario  $\hat{r}$  dirigido desde el elemento hasta el punto  $P$ .
2. La magnitud  $dB$  es inversamente proporcional a  $r^2$ , donde  $r$  es la distancia desde el elemento hasta el punto  $P$ .
3. La magnitud de  $d\mathbf{B}$  es proporcional a la corriente y la longitud  $ds$  del elemento.
4. La magnitud de  $d\mathbf{B}$  es proporcional a  $\sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector  $ds$  y  $\hat{r}$ .

La ley de Biot-Savart puede ser resumida en la siguiente forma:

$$d\mathbf{B} = k_m \frac{I ds \times \hat{r}}{r^2} \quad (30.1)$$

donde  $k_m$  es una constante que en el SI de unidades es exactamente  $10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$ . La constante  $k_m$  es por lo general escrita como  $\mu_0/4\pi$ , donde  $\mu_0$  es otra constante, llamada **permeabilidad del espacio libre**. Es decir,

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = k_m = 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m} \quad (30.2)$$

$$\mu_0 = 4\pi k_m = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m} \quad (30.3)$$

Por lo que, la ley de Biot-Savart, ecuación 30.1, también puede escribirse como:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I ds \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (30.4)$$

Es importante hacer notar que la ley de Biot-Savart proporciona el campo magnético en un punto dado para un pequeño elemento del conductor. Para encontrar el campo magnético *total*  $\mathbf{B}$  en algún punto debido a un conductor de tamaño finito, se deben sumar las contribuciones de todos los elementos de corriente que constituyen el conductor. Esto es, se debe evaluar  $\mathbf{B}$  por la integración de la ecuación 30.4:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds \times \hat{r}}{r^2} \quad (30.5)$$

donde la integral se evalúa sobre todo el conductor. Esta expresión debe ser manejada con especial cuidado desde el momento que el integrando es una cantidad vectorial.

Se presentan rasgos similares entre la ley de Biot-Savart del magnetismo y la ley de Coulomb en la electrostática. Es decir, el elemento de corriente  $I ds$

### Ley de Biot-Savart

### Permeabilidad del espacio libre

### Ley de Biot-Savart

produce un campo magnético, mientras que una carga puntual  $q$  produce un campo eléctrico. Además, la magnitud del campo magnético es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el elemento de corriente, como lo hace el campo eléctrico debido a una carga puntual.

Sin embargo, las direcciones de los dos campos son muy diferentes. El campo eléctrico debido a una carga puntual es radial. En el caso de una carga puntual positiva,  $E$  está dirigido desde la carga hacia el punto del campo. Por otro lado, el campo magnético debido a un elemento de corriente es perpendicular tanto al elemento de corriente como al radio vector. Por lo que, si el conductor se encuentra en el plano del papel, como en la figura 30.1,  $dB$  está dirigido hacia afuera del papel en el punto  $P$  y hacia adentro del papel en el punto  $P'$ .

Los siguientes ejemplos mostrarán cómo se utiliza la ley de Biot-Savart para el cálculo de la inducción magnética en varios arreglos geométricos importantes. Es importante reconocer que el campo magnético descrito en estos cálculos es el campo debido a la corriente que lleva el conductor. No debe confundirse esto con cualquier campo externo que pueda ser aplicado al conductor.

### EJEMPLO 30.1 Campo magnético de un conductor delgado rectilíneo

Considérese un alambre conductor recto, muy delgado, que lleva una corriente  $I$  colocado a lo largo del eje  $x$  como en la figura 30.2. Se calculará el campo magnético en el punto  $P$  localizado a una distancia  $a$  del alambre.

**Solución** El elemento  $ds$  está a una distancia  $r$  de  $P$ . La dirección del campo en  $P$  debida a este elemento es hacia afuera del papel, ya que  $ds \times \hat{r}$  está hacia afuera del papel. De hecho, todos los elementos dan una contribución diri-

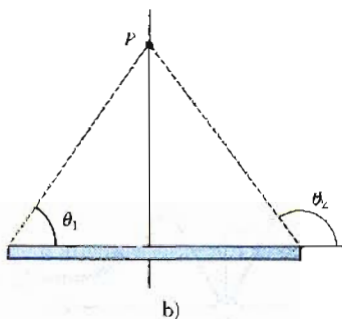
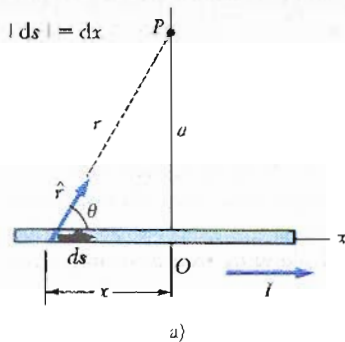


Figura 30.2 (Ejemplo 30.1) a) Un segmento de alambre recto lleva una corriente  $I$ . El campo magnético en  $P$  debido a cada elemento  $ds$  está dirigido hacia afuera del papel, y por lo tanto el campo total también está dirigido hacia afuera del papel. b) Los ángulos límite  $\theta_1$  y  $\theta_2$  para esta geometría.

gida hacia afuera del papel en  $P$ . Por lo tanto, se tiene que determinar sólo la magnitud del campo en  $P$ . Ahora, si se considera  $O$  como el origen y  $P$  situado sobre el eje  $y$  positivo, con  $\hat{k}$  siendo el vector unitario dirigido hacia afuera del papel, se ve que

$$ds \times \hat{r} = k|ds \times \hat{r}| = k(dx \sin \theta)$$

Sustituyendo en la ecuación 30.4, dado que  $dB = k dB$ , con

$$(1) \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2}$$

Para integrar esta expresión, se deben relacionar de alguna manera las variables  $\theta$ ,  $x$  y  $r$ . Una forma de lograrlo es expresar  $x$  y  $r$  en términos de  $\theta$ . De la geometría en la figura 30.2a y una simple diferenciación, se obtiene la siguiente relación:

$$(2) \quad r = \frac{a}{\sin \theta} = a \csc \theta$$

Ya que  $\tan \theta = -a/x$  del triángulo rectángulo de la figura 30.2a,

$$x = -a \cot \theta$$

$$(3) \quad dx = a \csc^2 \theta d\theta$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene

$$(4) \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \csc^2 \theta \sin \theta d\theta}{a^2 \csc^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta$$

Por consiguiente, se ha logrado reducir la expresión a una que implica sólo a la variable  $\theta$ . Ahora se puede obtener el campo magnético total en el punto  $P$  integrando (4) sobre todos los elementos que subtienden ángulos comprendidos entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$  definidos como en la figura 30.2b. Esto da

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (30.6)$$

Puede aplicarse este resultado para determinar el campo magnético de cualquier alambre recto si se conoce su geometría y también los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

Considérese el caso especial de un alambre conductor delgado, infinitamente largo. En este caso,  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi$ , como puede verse de la figura 30.2b, para segmentos que van desde  $x = -\infty$  hasta  $x = +\infty$ . Como  $(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = (\cos 0 - \cos \pi) = 2$ , la ecuación 30.6 se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (30.7)$$

En la figura 30.3 se muestra una vista tridimensional de la dirección de  $B$  para un alambre recto y largo. Las líneas de campo son círculos concéntricos con el alambre y están en un plano perpendicular al alambre. La magnitud del campo magnético  $B$  es constante en cualquier círculo de radio  $a$  y está dada por la ecuación 30.7. Una regla conveniente para determinar la dirección de  $B$  es tomar el alambre con la mano derecha, con el dedo pulgar a lo largo de la dirección de la corriente. Los cuatro dedos restantes apuntarán en la dirección del campo magnético.

El resultado muestra que la magnitud del campo magnético es proporcional a la corriente y que decrece con la distancia al alambre, que es lo que se esperaría intuitivamente. Obsérvese que la ecuación 30.7 tiene la misma forma matemática que la expresión para la magnitud del campo eléctrico debido a un alambre recto cargado (Ec. 24.9).

**Ejercicio 1** Calcúlese el campo magnético de un alambre recto que lleva una corriente de 5 A, a una distancia de 4 cm del alambre.

**Respuesta**  $2.5 \times 10^{-5}$  T.

**EJEMPLO 30.2 Campo de una espira de corriente**

Calcúlese la magnitud del campo magnético en el punto  $O$  para la espira de corriente de la figura 30.4. La espira consta de dos tramos rectos y un arco circular de radio  $R$ , el cual subtende un ángulo  $\theta$  en el centro del arco. Se ignorará aquí la contribución de la corriente en los arcos cortos cercanos a  $O$ .

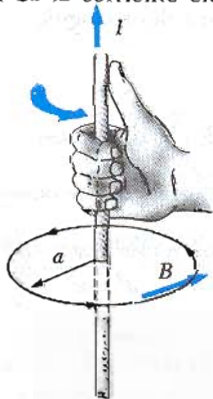


Figura 30.3 La regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético debido a un alambre recto y largo. Obsérvese que las líneas de campo magnético forman círculos alrededor del alambre.

**Solución** Primero, obsérvese que el campo magnético en  $O$  debido a los segmentos rectos  $OA$  y  $OC$  es igual a cero, puesto que  $ds$  es paralelo a  $\hat{r}$  a lo largo de estas trayectorias y por lo tanto  $ds \times \hat{r} = 0$ . Esto simplifica el problema debido a que ahora sólo se necesita encontrar el campo producido por la porción  $AC$ . Nótese que cada elemento  $ds$  a lo largo de la trayectoria  $AC$  está a la misma distancia  $R$  de  $O$ , y que cada uno da una contribución  $dB$ , la cual está dirigida hacia dentro del papel en  $O$ . Además, en todo punto de la trayectoria  $ds$  es perpendicular a  $\hat{r}$ , esto es  $|ds \times \hat{r}| = ds$ . Utilizando esta información y la ecuación 30.4, se puede obtener la siguiente expresión para el campo en  $O$  debido a un segmento  $ds$ :

$$dB = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi R^2}$$

Siendo  $I$  y  $R$  constantes, se puede integrar fácil esta expresión, de donde se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} s = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta \quad (30.8)$$

donde se utilizó el hecho de que  $s = R\theta$ , donde  $\theta$  está medida en radianes. La dirección del campo  $B$  es hacia adentro del papel en  $O$  puesto que  $ds \times r$  está hacia adentro del papel para todo segmento.

Por ejemplo, si el arco tiene un ángulo  $\theta = \pi/2$  rad, se encuentra de la ecuación 30.8 que  $B = \mu_0 I/8R$ .

**Ejercicio 2** Una espira de corriente en la forma de un círculo completo de radio  $R$  lleva una corriente  $I$ . ¿Cuál es la magnitud del campo en su centro?

**Respuesta**  $\mu_0 I/2R$ .

**EJEMPLO 30.3 Magnitud del campo magnético en el eje de una espira circular de corriente**

Considérese una espira circular de alambre de radio  $R$  localizada en el plano  $yz$  que lleve una corriente  $I$ , como

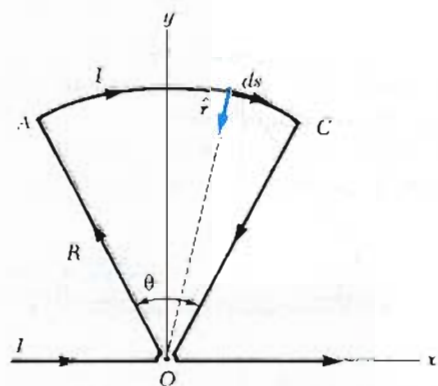


Figura 30.4 (Ejemplo 30.2) El campo magnético en  $O$  debido a la espira de corriente cerrada está hacia adentro de la página. Nótese que la contribución al campo en  $O$  debido a los segmentos rectos  $OA$  y  $OC$  es cero.

en la figura 30.5. Calcúlese el campo magnético en un punto axial  $P$  a una distancia  $x$  del centro de la espira.

**Solución** En esta situación, obsérvese que cualquier elemento  $ds$  es perpendicular a  $\hat{r}$ . Además, todos los elementos alrededor de la espira se encuentran a la misma distancia  $r$  de  $P$ , donde  $r^2 = x^2 + R^2$ . Por lo que, la magnitud de  $d\mathbf{B}$  debida al elemento  $ds$  está dada por

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(x^2 + R^2)}$$

La dirección del campo magnético  $d\mathbf{B}$  debida al elemento  $ds$  es perpendicular al plano formado por  $\hat{r}$  y  $ds$ , como se muestra en la figura 30.5. El vector  $d\mathbf{B}$  puede ser descrito por sus componentes  $d\mathbf{B}_x$ , a lo largo del eje  $x$ , y su componente  $d\mathbf{B}_y$ , la cual es perpendicular al eje  $x$ . Cuando las componentes perpendiculares al eje  $x$  se suman sobre toda la espira, el resultado es *cero*. Es decir, por simetría cualquier elemento de un lado de la espira tendrá una componente perpendicular que se cancelará con la componente de un elemento diametralmente opuesto a éste. Por lo tanto, se ve que *el campo magnético resultante en el punto  $P$  debe estar a lo largo del eje  $x$  y puede determinarse al integrar la componente  $d\mathbf{B}_x = d\mathbf{B} \cos \theta$ , que se obtiene al descomponer el vector  $d\mathbf{B}$  en sus componentes como se muestra en la figura 30.5. Es decir,  $\mathbf{B} = i\mathbf{B}_x$ , donde  $B_x$  está dada por*

$$B_x = \oint d\mathbf{B} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds \cos \theta}{x^2 + R^2}$$

donde la integral debe ser calculada sobre toda la espira

Como  $\theta$ ,  $x$  y  $R$  son constantes para todo elemento de la espira y como  $\cos \theta = R/(x^2 + R^2)^{1/2}$ , se obtiene

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint ds = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (30.9)$$

donde se ha utilizado el hecho de que  $\oint ds = 2\pi R$  (la circunferencia de la espira).

Para determinar el campo magnético en el centro de la espira, se toma  $x = 0$  en la ecuación 30.9. En este punto especial, está dado por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (\text{en } x = 0) \quad (30.10)$$

Es también interesante determinar el comportamiento del campo a grandes distancias de la espira, es decir, cuando  $x$  es muy grande comparado con  $R$ . En este caso, se puede desprestigiar el término  $R^2$  en el denominador de la ecuación 30.9 para obtener

$$B \approx \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} \quad (\text{para } x \gg R) \quad (30.11)$$

Como la magnitud del momento magnético dipolar  $\mu$  de la espira está definido como el producto de la corriente por el área (Ec. 29.13),  $\mu = I(\pi R^2)$ , se puede escribir la ecuación 30.11 en la forma

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3} \quad (30.12)$$

Este resultado es similar en forma a la expresión para el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico,  $E = kp/y^3$  (Ec. 23.10), donde  $p$  es el momento dipolar eléctrico. El patrón de las líneas de campo magnético para una espira circular se muestran en la figura 30.6. Por claridad, las líneas sólo se dibujan en el plano que contiene el eje de la espira. El patrón es axialmente simétrico.

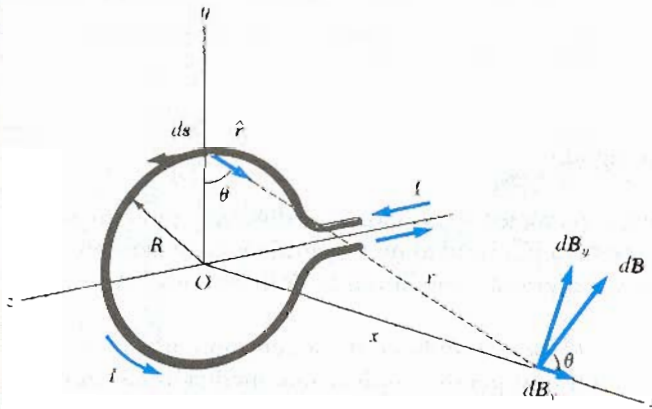


Figura 30.5 (Ejemplo 30.3) Geometría para calcular el campo magnético en un punto axial  $P$  para una espira de corriente. Obsérvese que por simetría el campo total  $\mathbf{B}$  está a lo largo del eje  $x$ .

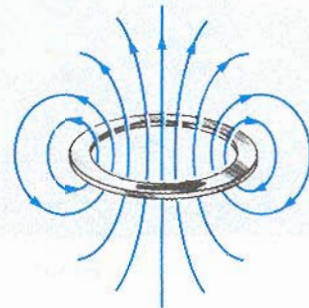


Figura 30.6 Líneas de campo magnético para una espira de corriente. Lejos de la espira, las líneas de campo magnético son idénticas en forma a las que tiene un dipolo eléctrico.

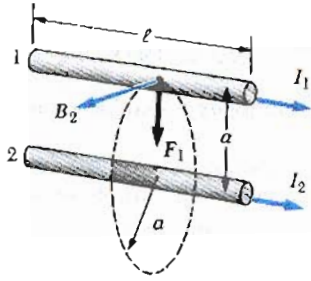


Figura 30.7 Dos alambres paralelos que llevan cada uno una corriente estable ejercen una fuerza uno sobre el otro. El campo  $B_2$  en el alambre 1 debido al alambre 2 produce una fuerza sobre el alambre 1 dada por  $F_1 = I_1 \ell B_2$ . La fuerza es atractiva si las corrientes son paralelas como se muestra y repulsiva si las corrientes son antiparalelas.

### 30.2 FUERZA MAGNÉTICA ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS

En el capítulo anterior se describió la fuerza magnética que actúa sobre un conductor que lleva corriente cuando el conductor se encuentra en un campo magnético externo. Como una corriente en un conductor crea su propio campo magnético, es fácil entender que dos conductores que lleven corriente ejercerán fuerzas magnéticas uno sobre el otro. Como se verá, dichas fuerzas pueden ser utilizadas como base para la definición del ampere y del coulomb. Considérese dos alambres largos, rectos y paralelos separados una distancia  $a$  y que llevan corrientes  $I_1$  e  $I_2$  en la misma dirección, como se muestra en la figura 30.7. Se puede determinar fácilmente la fuerza sobre uno de los alambres debida al campo magnético producido por el otro alambre. El alambre 2, el cual lleva una corriente  $I_2$ , genera un campo magnético  $B_2$  en la posición del alambre 1. La dirección de  $B_2$  es perpendicular al alambre, como se muestra en la figura 30.7. De acuerdo con la ecuación 29.5, la fuerza magnética sobre una longitud  $\ell$  del alambre 1 es  $F_1 = I_1 \ell \times B_2$ . Puesto que  $\ell$  es perpendicular a  $B_2$ , la magnitud de  $F_1$  está dada por  $F_1 = I_1 \ell B_2$ . Como el campo debido al alambre 2 está dado por la ecuación 30.7,

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$$

se ve que

$$F_1 = I_1 \ell B_2 = I_1 \ell \left( \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\ell \mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Esto se puede reescribir en términos de la fuerza por unidad de longitud como

$$\frac{F_1}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \tag{30.13}$$

La dirección de  $F_1$  es hacia abajo, hacia el alambre 2, ya que  $\ell \times B_2$  es hacia abajo. Si se considera el campo sobre el alambre 2 debido al alambre 1, la fuerza  $F_2$  sobre el alambre 2 se encuentra que es igual y opuesta a  $F_1$ . Esto es lo que se esperaba, ya que la tercera ley de Newton de acción-reacción debe cumplirse.<sup>1</sup> Cuando las corrientes están en direcciones opuestas, las fuerzas son inversas y los alambres se repelen uno al otro. Por ello, se determina que:

**conductores paralelos que lleven corrientes en la misma dirección se atraen uno al otro, mientras que conductores paralelos que lleven corrientes en direcciones opuestas se repelen uno al otro.**

La fuerza entre dos alambres paralelos que lleven corriente se utiliza para definir el ampere como sigue:

**Si dos largos alambres paralelos separados una distancia de 1 m llevan la misma corriente y la fuerza por unidad de longitud en cada alambre es de  $2 \times 10^{-7}$  N/m, entonces la corriente que llevan se define como 1 A.**

El valor numérico de  $2 \times 10^{-7}$  N/m se obtiene de la ecuación 30.13, con  $I_1 = I_2 = 1$  A y  $a = 1$  m. Por lo tanto, se puede emplear una medición mecánica para

<sup>1</sup> Aun cuando la fuerza total sobre el alambre 1 es igual y opuesta a la fuerza sobre el alambre 2, la tercera ley de Newton no se aplica cuando uno considera dos pequeños elementos de los alambres que no son opuestos uno del otro. Esta aparente violación de la tercera ley de Newton y de la conservación del momento se describe en cursos más avanzados de electricidad y magnetismo.

normalizar el ampere. Por ejemplo, en la National Bureau of Standards (Oficina Nacional de Normas) se utiliza un instrumento llamado *balanza de corriente* para principales mediciones de corriente. Estos resultados se utilizan después para normalizar otros instrumentos más convencionales, como el amperímetro.

La unidad de carga en el SI, el **coulomb**, puede ahora ser definido en términos del ampere como sigue:

Si un conductor transporta una corriente estable de 1 A, entonces la cantidad de carga que fluye a través de una sección transversal del conductor en 1 s es 1 C.

### 30.3 LEY DE AMPÈRE

Un experimento simple realizado por primera vez por Oersted en 1820 demostró claramente el hecho de que un conductor que lleva una corriente produce un campo magnético. En este experimento, varias brújulas se colocan en un plano horizontal cercanas a un alambre largo vertical, como en la figura 30.8a. Cuando no existe corriente en el alambre, todas las brújulas apuntan en la misma dirección (que el campo terrestre) como se esperaría. Sin embargo, cuando el alambre lleva una gran corriente estable, las brújulas necesariamente se desviarán en la dirección tangente a un círculo como en la figura 30.8b. Estas observaciones demuestran que la dirección de  $\mathbf{B}$  es congruente con la regla de la mano derecha descrita en la sección 30.1.

Si se toma el alambre con la mano derecha, de tal forma que el dedo pulgar apunte en la dirección de la corriente, los dedos curvados definirán la dirección de  $\mathbf{B}$ .

Cuando la corriente se invierte, necesariamente las brújulas de la figura 30.8b se invertirán también.

Puesto que las brújulas apuntan en la dirección de  $\mathbf{B}$ , se concluye que las líneas de  $\mathbf{B}$  forman círculos alrededor del alambre, como se discutió en la sección anterior. Por simetría, la magnitud de  $\mathbf{B}$  es la misma en cualquier lugar sobre una trayectoria circular que esté centrada en el alambre y que se encuentre en un plano perpendicular al alambre. Si se varía la corriente y la distancia al alambre, se encuentra que  $\mathbf{B}$  es proporcional a la corriente e inversamente proporcional a la distancia al alambre.

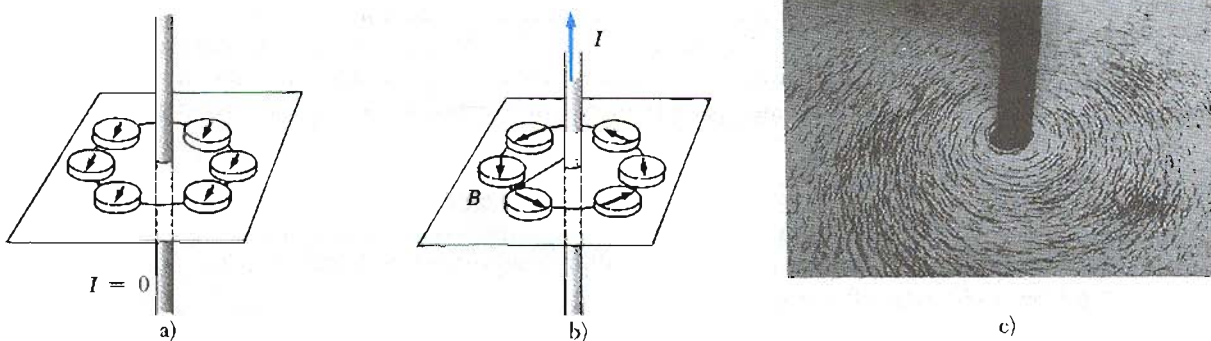


Figura 30.8 a) Cuando no existe corriente en el alambre vertical, todas las brújulas están dirigidas en la misma dirección. b) Cuando el alambre lleva una gran corriente, las brújulas se desvían en la dirección tangente a un círculo, el cual da la dirección del campo  $\mathbf{B}$  debido a la corriente. c) Líneas de campo magnético circulares alrededor de un conductor que lleva una corriente formada con virutas de hierro. La fotografía fue tomada utilizando 30 alambres paralelos cada uno llevando una corriente de 0.5 A. (Fotografía cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)



## Bosquejo biográfico

**André-Marie Ampère**  
(1775-1836)

André-Marie Ampère fue un matemático, químico y filósofo francés quien fundó la ciencia del electromagnetismo. La unidad de medida para la corriente eléctrica fue nombrada en su honor.

El genio de Ampère, sobre todo en matemáticas, viene a evidenciarse a principios de su vida: obtuvo su maestría en matemáticas avanzadas a los 12 años de edad. Su primera publicación, *Consideraciones sobre la Teoría Matemática de los Juegos*, una temprana contribución a la teoría de la probabilidad, propone que un jugador nunca perderá si éste tiene grandes recursos financieros.

Se acredita a Ampère el descubrimiento del electromagnetismo —la relación entre corriente eléctrica y el campo magnético—. Sus trabajos en este campo fueron influenciados por lo que descubrió el físico danés Hans Christian Oersted. Ampère presentó una serie de trabajos exponiendo la teoría y las leyes básicas del electromagnetismo, que él llamaba electrodinámica, para diferenciarlo del estudio de las fuerzas eléctricas estacionarias, el cual llamaba electrostática.

Los estudios de Ampère culminan en 1827 cuando publica su *Teoría Matemática del Fenómeno Electrodinámico Deducido Solamente del Experimento*, en el cual derivó precisamente las formulaciones matemáticas del electromagnetismo, sobresaliendo la ley de Ampère.

Algunas historias dicen que Ampère era distraído, rasgo que compartía con Newton. En una ocasión, se le olvidó el honor de una invitación a cenar con el emperador Napoleón.

La vida personal de Ampère estuvo llena de tragedias. Su padre, un alto oficial de la ciudad, fue guillotinado durante la Revolución Francesa, y la muerte de su esposa en 1803 fue un golpe repentino. Ampère murió a los 63 años de edad de neumonía. La opinión de su vida está clara en el epitafio que escogió para su tumba: *Tandem felix* (Al fin feliz).

(Fotografía cortesía de AIP Biblioteca Niels Bohr)

Ahora se evaluará el producto  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  y se sumarán estos productos sobre una trayectoria circular centrada en el alambre. A lo largo de esta trayectoria, los vectores  $d\mathbf{s}$  y  $\mathbf{B}$  son paralelos en cada punto (Fig. 30.8b), así que  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B ds$ . Además,  $\mathbf{B}$  es constante en magnitud sobre este círculo y está dado por la ecuación 30.7. Por lo tanto, la suma de los productos  $B ds$  sobre la trayectoria cerrada, la cual es equivalente a la integral de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  está dada por:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I \quad (30.14)$$

donde  $\oint ds = 2\pi r$  es la circunferencia del círculo.

Este resultado, conocido como **ley de Ampère**, fue encontrado para el caso especial de una trayectoria circular alrededor del alambre. Sin embargo, el resultado puede aplicarse en el caso general en el que una trayectoria cerrada sea atravesada por una *corriente estable*. Es decir,

La ley de Ampère establece que la integral de línea de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente estable total que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada.

### Ley de Ampère

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (30.15)$$

La ley de Ampère es válida sólo para corrientes estables. Además, la ley de Ampère se utiliza sólo para el cálculo de campos magnéticos de configuraciones de corriente con un alto grado de simetría, precisamente como la ley de Gauss se



utiliza sólo para calcular el campo eléctrico de distribuciones de carga de alta simetría. Los siguientes ejemplos mostrarán algunas configuraciones simétricas donde se utiliza la ley de Ampère.

### EJEMPLO 30.4 El campo $B$ de un alambre largo

Un alambre largo recto de radio  $R$  lleva una corriente estable  $I_0$  que está uniformemente distribuida a través de la sección transversal del alambre (Fig. 30.9). Calcúlese el campo magnético a una distancia  $r$  del centro del alambre en las regiones  $r \geq R$  y  $r < R$ .

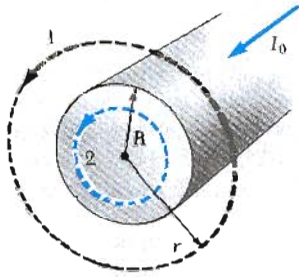


Figura 30.9 (Ejemplo 30.4) Un alambre recto, largo, de radio  $R$  que lleva una corriente estable  $I_0$  uniformemente distribuida en su sección transversal. El campo magnético en cualquier punto puede ser calculado por la ley de Ampère utilizando una trayectoria circular de radio  $r$ , concéntrica con el alambre.

**Solución** En la región 1, donde  $r \geq R$  se elige una trayectoria circular de radio  $r$  centrada con el alambre. De la simetría, se ve que  $B$  debe ser constante en magnitud y paralelo a  $ds$  en cualquier punto sobre la trayectoria. Como la corriente total que pasa a través de la trayectoria 1 es  $I_0$ , aplicando la ley de Ampère a esta trayectoria da

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (\text{para } r \geq R) \quad (30.16)$$

la cual es idéntica a la obtenida en la ecuación 30.7.

Ahora considérese el interior del alambre, es decir, la región 2, donde  $r < R$ . En este caso, se observa que la corriente  $I$  encerrada por la trayectoria es menor que la corriente total  $I_0$ . Como la corriente se supone que debe ser uniforme sobre la sección transversal del alambre, se ve que la fracción de la corriente encerrada por la trayectoria de radio  $r < R$  debe ser igual a la razón del área  $\pi r^2$  encerrada por la trayectoria 2 y el área de la sección transversal  $\pi R^2$  del alambre.<sup>2</sup> Es decir,

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$I = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

siguiendo el mismo procedimiento que el de la trayectoria 1, se puede aplicar la ley de Ampère a la trayectoria 2. Esto da

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I = \mu_0 \left( \frac{r^2}{R^2} I_0 \right)$$

$$B = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2} \right) r \quad (\text{para } r < R) \quad (30.17)$$

El campo magnético contra  $r$  para esta configuración se bosqueja en la figura 30.10. Obsérvese que en el interior del alambre,  $B \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Este resultado es similar en forma al del campo eléctrico en el interior de una barra cargada.

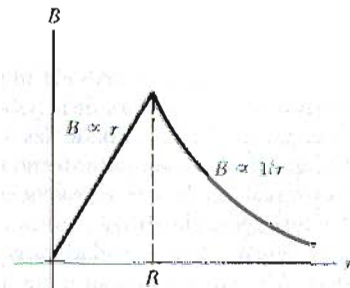


Figura 30.10 Gráfica del campo magnético en función del radio para el alambre descrito en el ejemplo 30.4. El campo es proporcional a  $r$  en el interior del alambre y varía como  $1/r$  en el exterior del alambre.

### EJEMPLO 30.5 Campo magnético de una bobina toroidal

Una bobina toroidal consta de  $N$  vueltas de alambre alrededor de una estructura en forma de aro como en la figura 30.11. Suponiendo que las vueltas están estrechamente espaciadas, calcúlese el campo magnético en el interior de la bobina, a una distancia  $r$  de su centro.

**Solución** Para calcular el campo magnético en el interior de la bobina, se evalúa la integral de línea de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  sobre un círculo de radio  $r$ . Por simetría, se ve que el campo magnético es constante en magnitud sobre esta trayectoria y tangente a ésta, así que  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B ds$ . Además, obsérvese que la trayectoria cerrada encierra  $N$  espiras de alambre,

<sup>2</sup> Alternativamente, la corriente enlazada por la trayectoria 2 debe ser igual al producto de la densidad de corriente,  $J = I_0/\pi R^2$ , y el área encerrada por la trayectoria 2,  $\pi r^2$ .

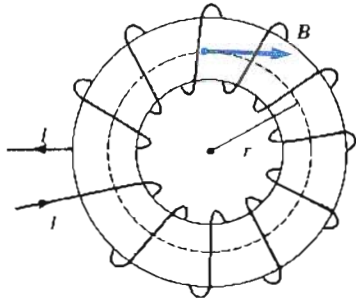


Figura 30.11 (Ejemplo 30.6) Una bobina toroidal consta de varias vueltas de alambre alrededor de una estructura en forma de aro (toro). Si las espiras están muy cercanas, el campo en el interior del toroide es tangencial a la forma circular y varía como  $1/r$ , y el campo exterior es cero.

cada uno de los cuales lleva una corriente  $I$ . Por lo tanto, en este caso, el lado derecho de la ecuación 30.15 de la ley de Ampère, es  $\mu_0 NI$ . Aplicando la ley de Ampère a esta trayectoria se obtiene entonces

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (30.18)$$

Este resultado demuestra que  $B$  varía como  $1/r$  y por lo tanto no es uniforme dentro de la bobina. Sin embargo, si  $r$  es grande comparado con  $a$ , donde  $a$  es el radio de la sección transversal del toroide, entonces el campo será aproximadamente uniforme en el interior de la bobina. Además, para una bobina toroidal ideal, donde las vueltas están estrechamente espaciadas, el campo externo es *cero*. Esto puede verse al observar que la corriente *net*a encerrada por cualquier trayectoria cerrada situada fuera de la bobina toroidal es *cero* (incluyendo la "cavidad en el aro"). Por lo tanto, de la ley de Ampère se encuentra que  $\mathbf{B} = 0$ , en las regiones exteriores a la bobina toroidal. En realidad, las espiras de una bobina toroidal forman hélices en lugar de espiras circulares (en el caso ideal). Como resultado, existe siempre un pequeño campo magnético externo a la bobina.

**EJEMPLO 30.6 Campo magnético de una placa infinita de corriente**

Una placa infinita colocada en el plano  $yz$  lleva una corriente superficial de densidad  $J_s$ . La corriente está en la dirección de  $y$  y  $J_s$  representa la corriente por unidad de longitud medida a lo largo del eje  $z$ . Encuéntrese el campo magnético en las proximidades de la placa.

**Solución** Para evaluar la integral de línea de la ley de Ampère, se toma una trayectoria rectangular alrededor de la placa como en la figura 30.12. Las dimensiones que tiene el rectángulo son  $\ell$  y  $w$ , donde los lados de longitud  $\ell$  son paralelos a la superficie. La corriente *total* a través de la espira es  $J_s \ell$  (es decir, la corriente total igual a la corriente

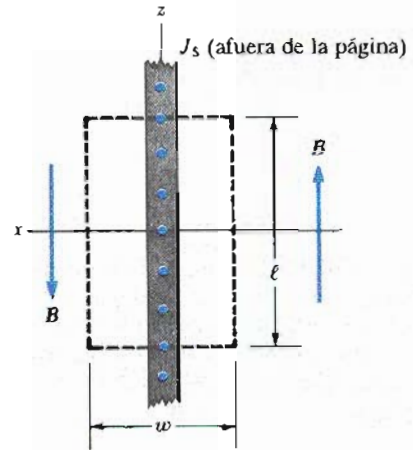


Figura 30.12 Vista superior de una placa infinita de corriente que se encuentra en el plano  $yz$ , donde la corriente está dirigida en la dirección  $y$  (hacia afuera de la página). Esta vista muestra la dirección de  $\mathbf{B}$  en ambos lados de la placa.

por unidad de longitud multiplicada por la longitud del rectángulo). Por lo tanto, aplicando la ley de Ampère sobre el lazo y observando que la longitud  $w$  no contribuye a la integral de línea (ya que la componente de  $\mathbf{B}$  a lo largo de esa dirección es *cero*), se obtiene

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I = \mu_0 J_s \ell$$

$$2B\ell = \mu_0 J_s \ell$$

$$B = \mu_0 \frac{J_s}{2} \quad (30.19)$$

El resultado demuestra que *el campo magnético es independiente de la distancia a la placa de corriente*. De hecho, el campo magnético es uniforme y en cualquier parte es paralelo al plano de la placa. Esto es razonable puesto que se ha considerado una placa infinita de corriente. El resultado es análogo al del campo eléctrico uniforme asociado con una placa infinita de carga (Ej. 24.6).

**EJEMPLO 30.7 Fuerza magnética sobre un segmento de corriente**

Un alambre largo y recto orientado a lo largo del eje  $y$  lleva una corriente estable  $I_1$  como en la figura 30.13. Un circuito rectangular localizado a la derecha del alambre lleva una corriente  $I_2$ . Determinése la fuerza magnética sobre el segmento superior horizontal del circuito que va desde  $x = a$  hasta  $x = a + b$ .

**Solución** En este problema, se puede estar tentado a utilizar la ecuación 30.13 para obtener la fuerza. Sin embargo, este resultado *sólo* se aplica a dos alambres *paralelos*, y no puede utilizarse aquí. El procedimiento correcto es empezar con la fuerza sobre un pequeño segmento del conductor dado por  $d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$  (Ec. 29.6), en este caso,  $I = I_2$  y  $\mathbf{B}$  es el campo magnético debido a un alambre largo,

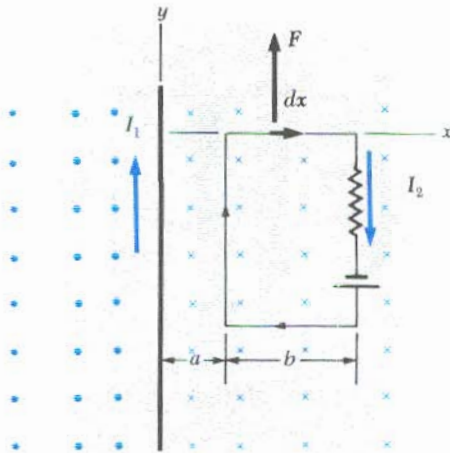


Figura 30.13 Ejemplo 30.7.

$I = I_2$  y  $\mathbf{B}$  es el campo magnético debido a un alambre largo y recto en la posición del segmento de longitud  $ds$ . De la ley de Ampère, el campo a una distancia  $x$  del alambre recto está dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\mathbf{k})$$

donde el campo está dirigido hacia adentro de la página como se indica por la notación vectorial unitaria  $(-\mathbf{k})$ . Tomando la longitud del segmento  $ds = dx \mathbf{i}$ , se encuentra

$$d\mathbf{F} = I_2 \mathbf{B} \times ds = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} [\mathbf{i} \times (-\mathbf{k})] dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dx}{x} \mathbf{j}$$

Integrando esta ecuación sobre los límites  $x = a$  hasta  $x = a + b$  se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln x \Big|_a^{a+b} \mathbf{j} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \mathbf{j}$$

La fuerza apunta *hacia arriba* como se indica por la notación  $\mathbf{j}$  y como se muestra en la figura 30.13.

**Ejercicio 3** ¿Cuál es la fuerza sobre el segmento horizontal inferior del circuito?

**Respuesta** La fuerza tiene la misma magnitud que la fuerza sobre el segmento horizontal superior, pero está dirigido *hacia abajo*.

### 30.4 EL CAMPO MAGNÉTICO DE UN SOLENOIDE

Un **solenoid** es un alambre devanado en la forma de una hélice. Con esta configuración se puede producir un campo magnético razonablemente uniforme dentro de un pequeño volumen de la región interior del solenoide si las espiras adyacentes están estrechamente espaciadas. Cuando se cumple esto, cada espira puede ser considerada como un circuito circular, y el campo magnético total es el vector suma de los campos debidos a todas las espiras.

La figura 30.14 muestra las líneas del campo magnético de un solenoide devanado en forma estrecha. Obsérvese que las líneas del campo en el interior de la bobina son aproximadamente paralelas, están distribuidas de manera uniforme y muy próximas entre sí. Esto indica que el campo magnético dentro del solenoide es uniforme. Las líneas de campo entre las vueltas tienden a cancelarse unas con otras. El campo en el exterior fuera del solenoide no es uniforme y es débil. El campo en puntos del exterior, tales como  $P$ , es débil puesto que el campo debido a un elemento de corriente en las partes superiores tiende a cancelarse con el campo atribuible a elementos de corriente que estén en las partes inferiores.

Si las espiras están muy próximas y el solenoide tiene una longitud finita, las líneas del campo son como se muestran en la figura 30.15. En este caso, las líneas divergen en un extremo y convergen en el extremo opuesto. Si se observa cuidadosamente esta distribución del campo en el exterior del solenoide, se encontrará cierta similitud con el campo de una barra magnética. En consecuencia, un extremo del solenoide se comporta como el polo norte de un imán, mientras que el extremo opuesto actúa como polo sur. A medida que aumenta la longitud del solenoide, el campo en su interior viene a ser más y más uniforme. Se produce una aproximación al caso del *solenoid ideal* cuando las espiras están muy próximas y la longitud del solenoide es grande comparada con el radio. En este caso, el campo exterior del solenoide es débil cuando se compara con el campo en el interior, y el campo interior es uniforme a través de un gran volumen.

Se puede utilizar la ley de Ampère para obtener una expresión para el campo magnético en el interior de un solenoide ideal. Una sección transversal de una parte del solenoide ideal (Fig. 30.16) lleva una corriente  $I$ . Para un solenoide ideal,  $\mathbf{B}$

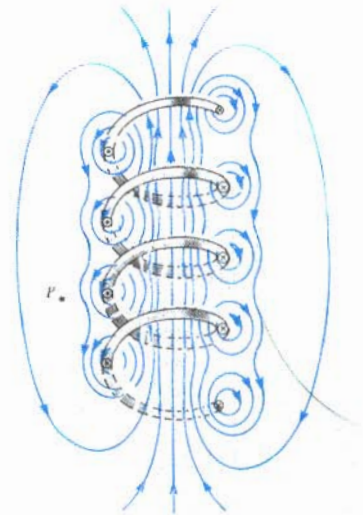
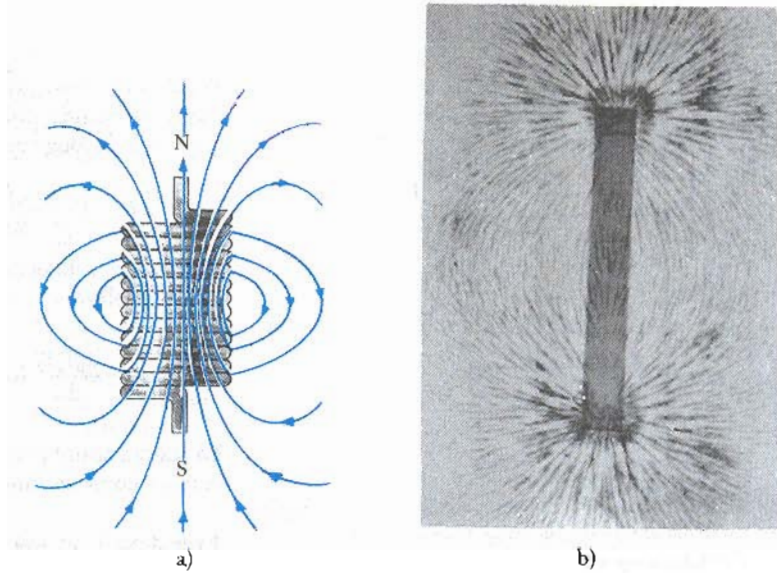
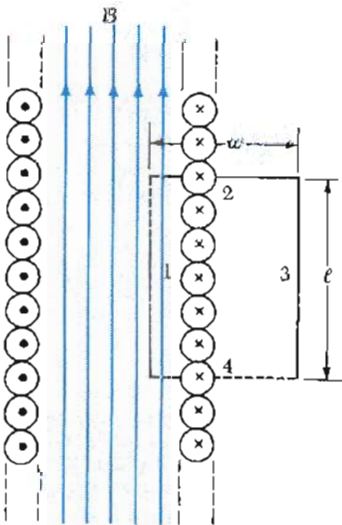


Figura 30.14 Líneas de campo magnético para un solenoide devanado holgadamente. Adaptado de D. Halliday y R. Resnick, *Physics*, Nueva York, Wiley, 1978.



**Figura 30.15** a) Líneas de campo magnético para un solenoide devanado estrechamente de longitud finita y que lleva una corriente estable. El campo en el interior del solenoide es intenso y aproximadamente constante. Obsérvese que las líneas de campo se asemejan a las de un imán de barra, de manera que el solenoide tiene polos norte y sur. b) Patrón de campo magnético de un imán de barra, el cual ha sido formado por virutas de hierro esparcidas en una hoja de papel. (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

en el interior del solenoide es uniforme y paralelo al eje y  $\mathbf{B}$  es cero para el exterior de éste. Considérese una trayectoria rectangular de longitud  $\ell$  y anchura  $w$  como se muestra en la figura 30.16. Se puede aplicar la ley de Ampère a esta trayectoria para evaluar la integral de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  sobre cada uno de los cuatro lados del rectángulo. La contribución a lo largo del lado 3 es claramente cero, ya que  $\mathbf{B} = 0$  en esa región. La contribución de los lados 2 y 4 son ambos cero puesto que  $\mathbf{B}$  es perpendicular a  $d\mathbf{s}$  a lo largo de estas trayectorias. El lado 1, cuya longitud es  $\ell$ , da una contribución  $B\ell$  a la integral ya que  $\mathbf{B}$  es uniforme y paralelo a  $d\mathbf{s}$  a lo largo de esta trayectoria. Por lo tanto, la integral sobre la trayectoria rectangular cerrada tiene el valor



**Figura 30.16** Vista de la sección trasversal de un solenoide con sus espiras muy juntas. Si el solenoide es largo en relación con su radio, se puede suponer que el campo en su interior es uniforme y el campo en su exterior es cero. Aplicando la ley de Ampère a la trayectoria dibujada con rojo puede encontrarse el campo en el interior del solenoide.

$$\oint_{\text{trayectoria 1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{trayectoria 1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \int_{\text{trayectoria 1}} ds = B\ell$$

El lado derecho de la ley de Ampère implica la corriente total que pasa a través del área limitada por la trayectoria de integración. En este caso, la corriente total a través de la trayectoria rectangular es igual al producto de la corriente que pasa por cada espira multiplicada por el número de espiras. Si  $N$  es el número de espiras contenidas en la longitud  $\ell$ , entonces la corriente total a través del área del rectángulo es igual a  $NI$ . Por consiguiente, al aplicarse la ley de Ampère a esta trayectoria se obtiene

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\ell = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 nI \tag{30.20}$$

donde  $n = N/\ell$  es el número de vueltas por *unidad de longitud* (no debe confundirse con  $N$ ).

Se podría obtener este resultado en una forma más sencilla mediante la reconsideración del campo magnético de una bobina toroidal (Ej. 30.5). Si el radio

$r$  de la bobina toroidal que contiene  $N$  vueltas es muy grande comparado con el radio  $a$  de su sección transversal, entonces una pequeña sección del toroide se aproxima a un solenoide con  $n = N/2\pi r$ . En este límite, se ve que la ecuación 30.18 que se obtuvo para un toroide concuerda con la ecuación 30.20.

La ecuación 30.20 sólo es válida para puntos lejanos de los extremos de un solenoide muy largo. Como sería de esperarse, el campo cerca de los extremos es menor que el valor dado por la expresión 30.20. En cualquier extremo del solenoide de longitud grande, la magnitud del campo magnético es aproximadamente la mitad del valor del campo en su centro. El campo en puntos axiales arbitrarios se deduce en la sección 30.5.

### 30.5 CAMPO MAGNÉTICO A LO LARGO DEL EJE DE UN SOLENOIDE

Considérese un solenoide de longitud  $\ell$  y radio  $R$  que consta de  $N$  vueltas estrechamente espaciadas y que lleva una corriente estable  $I$ . Se determinará una expresión para el campo magnético en un punto axial  $P$  en el interior del solenoide, como se indica en la figura 30.17.

Quizás la forma más simple de obtener el resultado deseado es considerar al solenoide como una distribución de espiras de corriente. El campo en cualquier espira a lo largo del eje se obtiene por la ecuación 30.9. En consecuencia, el campo total en el solenoide es la superposición de los campos de todas las espiras. El número de vueltas en una longitud  $dx$  del solenoide está dado por  $(N/\ell) dx$ ; por lo tanto la corriente en el ancho  $dx$  está dado por  $I(N/\ell) dx$ . Entonces, utilizando la ecuación 30.9, se encuentra que el campo en  $P$  debido a esta sección  $dx$  está dado por

$$dB = \frac{\mu_0 R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} I \left( \frac{N}{\ell} \right) dx \quad (30.21)$$

Esta expresión contiene la variable  $x$ , la cual puede ser expresada en términos de la variable  $\phi$ , definida en la figura 30.17. Es decir,  $x = R \tan \phi$ , así que se tiene que  $dx = R \sec^2 \phi d\phi$ . Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 30.21 e integrando desde  $\phi_1$  hasta  $\phi_2$ , se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (\sin \phi_2 - \sin \phi_1) \quad (30.22)$$

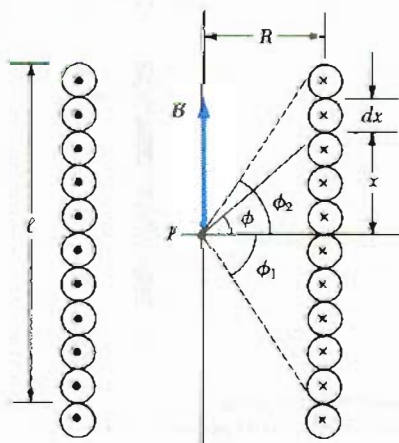


Figura 30.17 Geometría para calcular el campo magnético en un punto axial  $P$  en el interior de un solenoide estrechamente devanado.

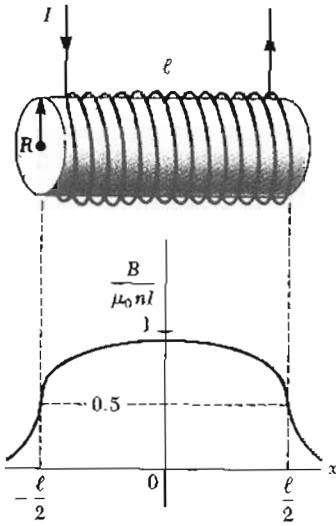


Figura 30.18 Gráfica del campo magnético a lo largo del eje como función de  $x$  para un solenoide largo estrechamente devanado. Nótese que la magnitud del campo en los extremos es alrededor de la mitad del valor en el centro.

Si  $P$  está en el punto central del solenoide y si se asume que el solenoide es largo comparado con  $R$ , entonces  $\phi_2 \approx 90^\circ$  y  $\phi_1 \approx -90^\circ$ ; por lo que

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (1 + 1) = \frac{\mu_0 NI}{\ell} = \mu_0 nI \quad (\text{en el centro})$$

lo cual concuerda con el resultado anterior, ecuación 30.20.

Si  $P$  es un punto en el extremo del solenoide largo (por ejemplo, el inferior), entonces  $\phi_1 \approx 0^\circ$  y  $\phi_2 \approx 90^\circ$ , y

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (1 + 0) = \frac{1}{2}\mu_0 nI \quad (\text{en los extremos})$$

Esto muestra que el campo en cada extremo de un solenoide se aproxima a la mitad del valor que tiene en el centro cuando la longitud  $\ell$  se aproxima al infinito.

En la figura 30.18 se muestra la gráfica del campo magnético en los puntos axiales de un solenoide en función de  $x$ . Si la longitud  $\ell$  es grande comparada con  $R$ , el campo axial será uniforme en la mayor parte del solenoide y la curva será muy plana, excepto en los puntos cercanos a los extremos. Por otra parte, si  $\ell$  es comparable con  $R$ , entonces el campo tendrá un valor ligeramente menor que  $\mu_0 nI$  en la parte central y sólo será uniforme en una pequeña región del solenoide.

### 30.6 FLUJO MAGNÉTICO

El flujo asociado con un campo magnético se define en forma similar a la que se utilizó para la definición del flujo eléctrico. Considérese un elemento de área  $dA$  sobre una superficie de forma arbitraria, como se ve en la figura 30.19. Si el campo magnético de este elemento es  $\mathbf{B}$ , entonces el flujo magnético a través de este elemento es  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ , donde  $d\mathbf{A}$  es el vector perpendicular a la superficie cuya magnitud es igual a  $dA$ . En consecuencia, el flujo magnético total  $\Phi_m$  a través de toda la superficie está dado por

#### Flujo magnético

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (30.23)$$

Considérese el caso especial de un plano de área  $A$  y un campo uniforme  $\mathbf{B}$ , el cual hace un ángulo  $\theta$  con el vector  $d\mathbf{A}$ . El flujo magnético a través del plano en este caso está dado por

$$\Phi_m = BA \cos \theta \quad (30.24)$$

Si el campo magnético está en el plano, como en la figura 30.20a, entonces  $\theta =$

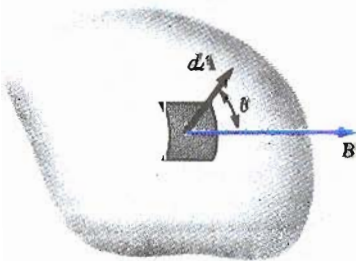


Figura 30.19 El flujo magnético a través de un elemento de área  $dA$  está dado por  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = B dA \cos \theta$ . Obsérvese que  $d\mathbf{A}$  es perpendicular a la superficie.

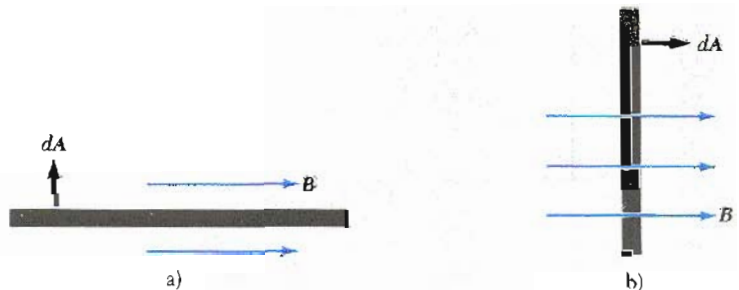


Figura 30.20 a) El flujo es cero cuando el campo magnético es paralelo a la superficie de un plano (vista de lado). b) El flujo es máximo cuando el campo magnético es perpendicular al plano.

$90^\circ$  y el flujo es cero. Si el campo es perpendicular al plano como en la figura 30.20b, entonces  $\theta = 0^\circ$  y el flujo es  $BA$  (el valor máximo).

Ya que  $B$  tiene unidades de  $\text{Wb}/\text{m}^2$  o  $\text{T}$ , la unidad del flujo es el weber ( $\text{Wb}$ ), donde  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$ .

### EJEMPLO 30.8 Flujo a través de una espira rectangular

Una espira rectangular de ancho  $a$  y longitud  $b$  está colocada a una distancia  $c$  de un alambre largo que lleva una corriente  $I$  (Fig. 30.21). El alambre es paralelo al lado largo de la espira. Determinése el flujo magnético total a través de la espira.

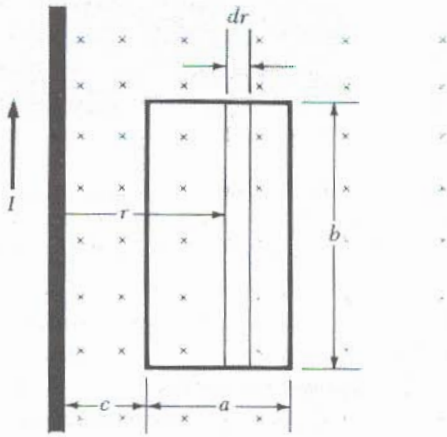


Figura 30.21 (Ejemplo 30.8) El campo magnético debido a un alambre que lleva una corriente  $I$  no es uniforme sobre la espira rectangular.

**Solución** De la ley de Ampère, se encuentra que el campo magnético debido a un alambre a una distancia  $r$  del alambre está dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Es decir, el campo varía sobre la espira y está dirigido hacia dentro de la página como se muestra en la figura 30.21. Como  $B$  es paralelo a  $dA$ , se puede expresar el flujo magnético a través del elemento de área  $dA$  como

$$\Phi_m = \int B \, dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \, dA$$

Nótese que, puesto que  $B$  no es uniforme, ya que depende de  $r$ , no puede sacarse de la integral. La forma de llevar a cabo la integración es primero expresar el elemento de área (la región en azul de la figura 30.21) como  $dA = b \, dr$ . Ya que  $r$  es la única variable en la integral, la expresión para  $\Phi_m$  queda como

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int_c^{a+c} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln r \Big|_c^{a+c} \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( \frac{a+c}{c} \right) \end{aligned}$$

## 30.7 LEY DE GAUSS DEL MAGNETISMO

En el capítulo 24 se determinó que el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie que rodee a una carga neta es proporcional a esta carga (ley de Gauss). En otras palabras, el número de líneas de campo eléctrico que salen de la superficie depende sólo de la carga neta dentro de la superficie. Esta propiedad está basada en parte en el hecho de que las líneas de campo eléctrico se originan en las cargas eléctricas.

La situación es completamente diferente para los campos magnéticos, los cuales son continuos y forman trayectorias cerradas. Las líneas del campo magnético debidas a corrientes no tienen punto de inicio ni punto final. Las líneas de campo magnético del imán de barra en la figura 30.22 muestran esta afirmación. Obsérvese que para cualquier superficie cerrada, el número de líneas que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen de ella, y así el flujo magnético neto es *cero*. Esto contrasta con el caso de una superficie que rodea a un dipolo eléctrico (Fig. 30.23), donde el flujo eléctrico neto no es cero.

**La ley de Gauss en el magnetismo establece que el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada siempre es cero:**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

(30.25)

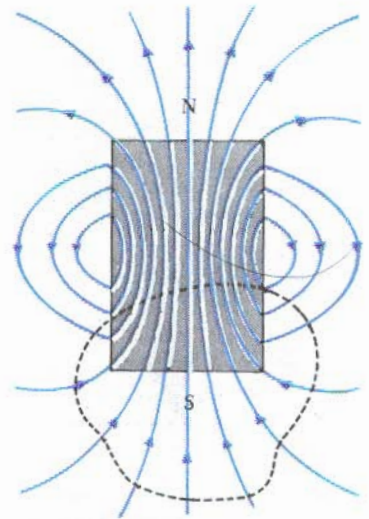
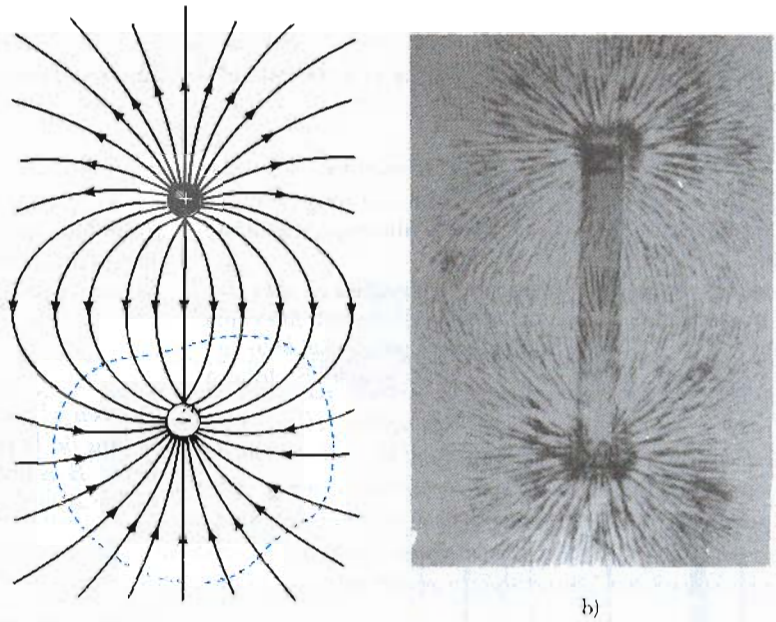


Figura 30.22 Las líneas de campo magnético de un imán de barra forman lazos cerrados. Obsérvese que el flujo neto a través de una superficie cerrada alrededor de uno de los polos (o en cualquier otra superficie cerrada) es cero.

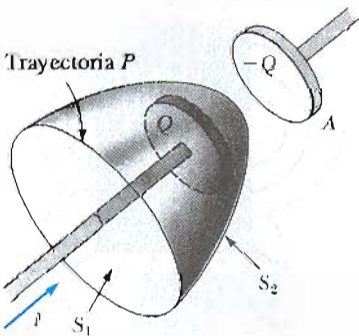


**Figura 30.23** a) Las líneas de campo eléctrico de un dipolo eléctrico se inician en la carga positiva y terminan en la carga negativa. El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada alrededor de una carga *no es cero*. b) Patrón del campo magnético de un imán de barra. (Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)

Esta proposición se basa en el hecho experimental de que *no han sido detectados polos magnéticos aislados (o monopolos), y quizás no existan*. Las únicas fuentes conocidas de campos magnéticos son los dipolos magnéticos (espiras de corriente), aun en los materiales magnéticos. En realidad, todos los efectos magnéticos en la materia pueden explicarse en términos de los momentos magnéticos dipolares (espiras de corriente efectiva) asociados con los electrones y el núcleo. Esto será tratado posteriormente en la sección 30.9.

### 30.8 CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO Y LA GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE AMPÈRE

Se ha visto que las cargas en movimiento, o corrientes, producen un campo magnético. Cuando un conductor que transporta una corriente tiene alta simetría, la magnitud del campo puede calcularse utilizando la ley de Ampère, dada por la ecuación 30.15:



**Figura 30.24** Las superficies  $S_1$  (en azul) y  $S_2$  (en rojo) están limitadas por la misma trayectoria  $P$ . La corriente de conducción pasa sólo a través de  $S_1$ . Esto conduce a una situación contradictoria de la ley de Ampère la cual se resuelve sólo si se postula una corriente de desplazamiento a través de  $S_2$ .

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

donde la integral de línea se calcula en *cualquier trayectoria cerrada a través de la cual pase la corriente de conducción*. Si  $Q$  es la carga en el capacitor en cualquier instante, la corriente de conducción se define por

$$I \equiv \frac{dQ}{dt}$$

Se demostró hasta ahora que *la ley de Ampère expresada de esta forma es válida sólo si la corriente de conducción es constante en el tiempo*. Maxwell reconoció esta limitación y modificó la ley de Ampère para incluir todos los casos posibles.

Este problema puede comprenderse si se considera un capacitor que está cargado como el de la figura 30.24. El argumento que aquí se expone es equiva-



lente al razonamiento original de Maxwell. Cuando la corriente  $I$  cambia con el tiempo (por ejemplo, cuando un voltaje ac se utiliza como fuente), la carga sobre la placa cambia, pero *no pasa corriente de conducción entre las placas*. Considérense ahora las dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  que acotan la misma trayectoria  $P$ . La ley establece que la integral de línea  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  alrededor de esta trayectoria debe ser igual a  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente total a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria  $P$ .

Cuando se considera que la trayectoria  $P$  limita a la superficie  $S_1$ , el resultado de la integral es  $\mu_0 I$ , ya que la corriente pasa a través de  $S_1$ . Sin embargo, cuando la trayectoria limita a la superficie  $S_2$ , el resultado es *cero* puesto que la corriente de conducción no pasa a través de  $S_2$ . Por consiguiente, se tiene una situación contradictoria que surge de la discontinuidad de la corriente. Maxwell resolvió este problema al postular un término adicional al lado derecho de la ecuación 30.15, llamado **corriente de desplazamiento**,  $I_d$ , definido como:

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (30.26)$$

Corriente de desplazamiento

Recuérdese que  $\Phi_e$  es el flujo del campo eléctrico, definido como  $\Phi_e = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ .

A medida que se va cargando (o descargando) el capacitor, la variación del campo eléctrico entre las placas puede pensarse como cierto tipo de corriente que forma un puente en la discontinuidad que existe en la corriente de conducción. Cuando esta expresión para la corriente (Ec. 30.26) se añade al lado derecho de la ley de Ampère, se resuelve la dificultad presentada por la figura 30.24. No importa cuál sea la superficie limitada por la trayectoria que se haya seleccionado, alguna combinación de las corrientes de conducción y de desplazamiento pasará a través de ella. Con este nuevo término,  $I_d$ , la ley de Ampère puede expresarse en una forma más general (a veces denominada **ley de Ampère-Maxwell**) como<sup>3</sup>

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (30.27)$$

Ley de Ampère-Maxwell

El significado de esta expresión puede comprenderse si se hace referencia a la figura 30.25. El flujo eléctrico a través de  $S_2$  es  $\Phi_e = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA$ , donde  $A$  es el área de las placas y  $E$  es la intensidad del campo eléctrico uniforme entre las placas. Si  $Q$  es la carga sobre las placas en cualquier instante, entonces se encuentra que  $E = Q/\epsilon_0 A$  (Sec. 26.2). Por lo tanto, el flujo a través de  $S_2$  es simplemente

$$\Phi_e = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

En consecuencia, la corriente de desplazamiento  $I_d$  a través de  $S_2$  es

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (30.28)$$

Es decir, ¡la corriente de desplazamiento es precisamente igual a la corriente de conducción  $I$  pasando a través de  $S_1$ !

El punto central de este formalismo es el hecho de que

los campos magnéticos pueden producirse tanto por corrientes de conducción como por campos eléctricos variables.

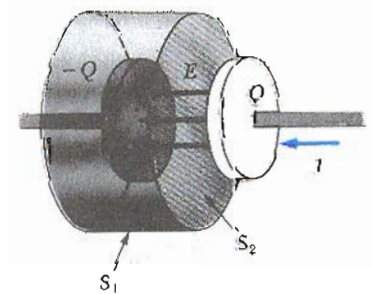


Figura 30.25 La corriente de conducción  $I = dQ/dt$  pasa a través de  $S_1$ . La corriente de desplazamiento  $I_d = \epsilon_0 d\Phi_e/dt$  pasa a través de  $S_2$ . Las dos corrientes tienen que ser iguales para la continuidad. En general, la corriente total a través de cualquier superficie limitada por una trayectoria es  $I + I_d$ .

<sup>3</sup> En rigor, esta expresión sólo es válida en el vacío. Si un material magnético está presente, también se debe incluir una corriente de magnetización  $I_m$  en el lado derecho de la ecuación 30.27 para hacer la ley de Ampère totalmente general. En una escala microscópica,  $I_m$  es una corriente tan real como la corriente de conducción  $I$ .

**EJEMPLO 30.9 Corriente de desplazamiento en un capacitor**

Un voltaje ac se aplica directamente sobre un capacitor de  $8 \mu\text{F}$ . La frecuencia de la fuente es de 3 kHz, y la amplitud del voltaje es de 30 V. Determinese la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

**Solución** La frecuencia angular de la fuente está dada por  $\omega = 2\pi f = 2\pi(3 \times 10^3 \text{ Hz}) = 6\pi \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Por lo tanto, el voltaje a través del capacitor en términos de  $t$  es

$$V = V_m \sin \omega t = (30 \text{ V}) \sin(6\pi \times 10^3 t)$$

Se puede hacer uso de la ecuación 30.28 y del hecho de que la carga en el capacitor está dada por  $Q = CV$  para encontrar la corriente de desplazamiento:

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C \frac{dV}{dt} \\ &= (8 \times 10^{-6}) \frac{d}{dt} [30 \sin(6\pi \times 10^3 t)] \\ &= (4.52 \text{ A}) \cos(6\pi \times 10^3 t) \end{aligned}$$

En consecuencia, la corriente de desplazamiento varía sinusoidalmente con el tiempo y tiene un valor máximo de 4.52 A.

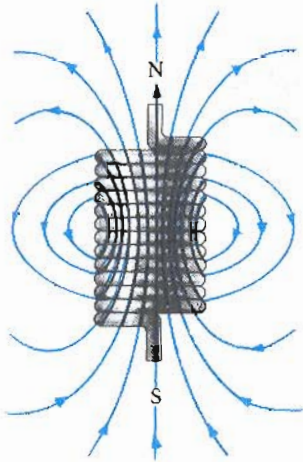


Figura 30.26 Líneas de campo magnético para un solenoide estrechamente devanado de longitud finita que lleva una corriente estable.

**30.9 MAGNETISMO EN LA MATERIA**

El campo magnético producido por una corriente en una bobina nos ayuda a comprender la causa de que ciertos materiales presenten fuertes propiedades magnéticas. Inicialmente se encontró que una bobina como la que se muestra en la figura 30.26 tiene polos norte y sur. En general, cualquier espira de corriente tiene un campo magnético y su correspondiente momento magnético. En forma similar, los momentos magnéticos en las sustancias magnetizadas están asociados con corrientes atómicas internas. Estas corrientes pueden verse como electrones orbitando alrededor del núcleo y como los protones uno sobre el otro en el interior del núcleo.

Esta sección comenzará con una breve descripción de los momentos magnéticos debidos a los electrones. Como se verá, el momento magnético total de un electrón se debe a la combinación de su movimiento orbital y su propiedad intrínseca llamada *espín*. Las fuerzas mutuas entre estos dipolos magnéticos y sus interacciones con un campo magnético externo son fundamentalmente importantes en el entendimiento del comportamiento de los materiales magnéticos. Se describirán tres categorías de materiales, paramagnéticos, ferromagnéticos y diamagnéticos. Los materiales **paramagnéticos** y **ferromagnéticos** son aquellos que tienen átomos con momentos magnéticos dipolares permanentes. Los materiales **diamagnéticos** son aquellos cuyos átomos no tienen momentos magnéticos dipolares permanentes. Para materiales cuyos átomos tienen momentos dipolares permanentes, la contribución diamagnética para el magnetismo es generalmente opacada por los efectos paramagnéticos y ferromagnéticos.

**Los momentos magnéticos de átomos**

Será instructivo empezar la exposición con un modelo clásico del átomo en el cual se supone que los electrones se mueven en una órbita circular alrededor de un núcleo muy másico. En este modelo, un electrón orbitando se ve como una espira delgada de corriente, y el momento magnético se asocia con su movimiento orbital. Aun cuando este modelo tiene muchas deficiencias, sus predicciones tienen buena concordancia con la teoría correcta de la Física cuántica.

Considérese un electrón moviéndose con rapidez constante  $v$  en una órbita circular de radio  $r$  alrededor del núcleo, como en la figura 30.27. Como el electrón recorre una distancia de  $2\pi r$  (la circunferencia del círculo) en un tiempo  $T$ , donde  $T$  es el tiempo para una revolución, la rapidez orbital del electrón es  $v = 2\pi r/T$ . La corriente efectiva asociada con el electrón orbitando es igual a su carga dividida entre el tiempo de una revolución. Usando  $T = 2\pi/\omega$  y  $\omega$ , se tiene

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r}$$

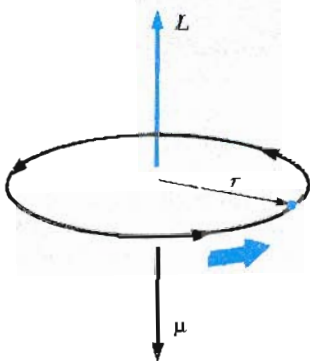
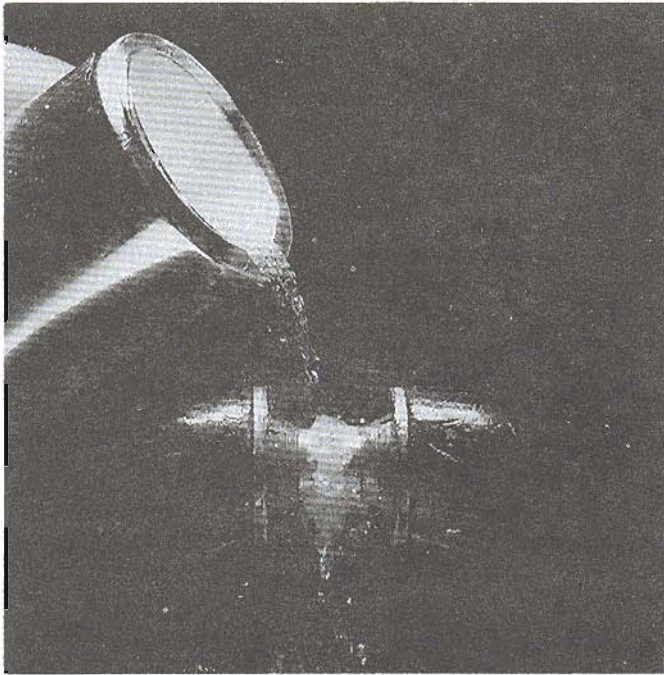


Figura 30.27 Un electrón que se mueve en una órbita circular de radio  $r$  tiene un momento angular  $L$  y un momento magnético  $\mu$  los cuales están en dirección opuesta.



Oxígeno, una sustancia paramagnética, es atraída en un campo magnético. El oxígeno líquido en esta fotografía se suspende entre los polos de un imán. (Cortesía de Leon Lewandowski)

El momento magnético asociado con esta espira de corriente efectiva está dado por  $\mu = IA$ , donde  $A = \pi r^2$  es el área de la órbita. Por lo tanto,

$$\mu = IA = \left( \frac{ev}{2\pi r} \right) \pi r^2 = \frac{1}{2} evr \quad (30.29)$$

Momento magnético orbital

Como la magnitud del momento angular orbital de un electrón está dado por  $L = mvr$ , el momento magnético puede ser escrito como

$$\mu = \left( \frac{e}{2m} \right) L \quad (30.30)$$

Este resultado expresa que el momento magnético de un electrón es proporcional a su momento angular orbital. Obsérvese que como el electrón está negativamente cargado, los vectores  $\mu$  y  $L$  apuntan en direcciones opuestas. Ambos vectores son perpendiculares al plano de la órbita como se indica en la figura 30.27.

Un fundamento que proviene de la Física cuántica es que el momento angular orbital debe ser *cuantizado*, y siempre debe ser un múltiplo entero de  $\hbar = h/2\pi = 1.06 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , donde  $h$  es la constante de Planck. Es decir

El momento angular está cuantizado

$$L = 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$$

En consecuencia, el menor valor diferente de cero para el momento magnético es

$$\mu = \frac{e}{2m} \hbar \quad (30.31)$$

Como todas las sustancias contienen electrones, es sorprendente que todas las sustancias no sean magnéticas. La principal razón es que en la mayoría de las sustancias, el momento magnético de un electrón en un átomo se cancela por el momento de otro electrón en el átomo orbitando en dirección opuesta. El

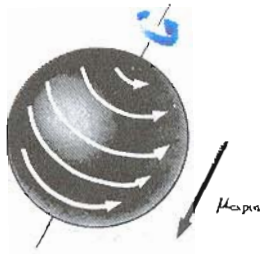


Figura 30.28 Modelo de un electrón que gira. El momento magnético  $\mu_{\text{espín}}$  puede ser visualizado como surgiendo de los circuitos de corriente asociados con una esfera cargada que gira.

resultado neto es que el efecto magnético producido por el movimiento orbital de los electrones es cero o muy pequeño para la mayoría de los materiales.

Sólo se ha considerado la contribución del movimiento orbital del electrón al momento magnético de un átomo. Sin embargo, un electrón tiene otra propiedad intrínseca llamada *espín* la cual también contribuye al momento magnético. Así pues, se puede ver al electrón como una esfera de carga girando alrededor de un eje en su órbita alrededor del núcleo, como en la figura 30.28. (Esta descripción clásica del electrón girando no debe ser tomada literalmente. La propiedad del espín puede entenderse sólo a través del modelo de la mecánica cuántica.) Este movimiento de rotación produce una espira de corriente efectiva y por lo tanto un momento magnético el cual es del mismo orden de magnitud que el debido al del movimiento orbital. La magnitud del momento magnético de espín predicho por la mecánica cuántica es

$$S = \frac{\hbar}{2} = 5.2729 \times 10^{-35} \text{ J} \cdot \text{s}$$

El momento magnético intrínseco asociado con el espín de un electrón tiene un valor de

$$\mu_B = \frac{e}{2m} \hbar = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T} \tag{30.32}$$

el cual se llama **magnetón de Bohr**.

En átomos o iones que contienen muchos electrones, los electrones generalmente están por pares con sus espines *opuestos* uno del otro, con lo que se tiene una cancelación de momentos magnéticos de espín. Sin embargo, los átomos con un número *impar* de electrones debe tener un electrón sin pareja y en consecuencia un momento magnético espín. El momento magnético total de un átomo es la suma vectorial de los momentos magnéticos espín y orbital. Los momentos magnéticos de varios iones y átomos están dados en la tabla 30.1. Nótese que algunos átomos tales como el helio y el neón tienen momentos cero ya que sus momentos individuales se cancelan.

El núcleo de un átomo también tiene un momento magnético asociado con sus protones y neutrones constituyentes. Sin embargo, el momento magnético de un protón o neutrón es pequeño comparado con el momento magnético de un electrón y generalmente puede ser despreciado. Esto puede entenderse al revisar la ecuación 30.32. Como las masas del protón y del neutrón son mucho mayores que las del electrón, sus momentos magnéticos son mucho menores por un factor aproximado de  $10^3$ .

### Magnetización e intensidad de campo magnético

El estado magnético de una sustancia se describe mediante una cantidad llamada **vector de magnetización, M**. La magnitud del vector de magnetización es igual al momento magnético por unidad de volumen de una sustancia. Como es de esperarse, el campo magnético total en una sustancia depende tanto del campo magnético (externo) aplicado como de la magnetización de la sustancia,

Considérese una región donde exista un campo magnético  $B_0$  producido por un conductor que lleva corriente tal como en el interior de un arreglo toroidal. Si llenamos esta región con una sustancia magnética, el campo magnético *total*  $B$  en esta región estará dado por  $B = B_0 + B_m$  donde  $B_m$  es el campo producido por la sustancia magnética. Esta contribución puede expresarse en términos del vector magnetización como  $B_m = \mu_0 M$ ; por lo que el campo total en la sustancia viene a ser

$$B = B_0 + \mu_0 M \tag{30.33}$$

### Momento angular espín

### Magnetón de Bohr

TABLA 30.1 Momentos magnéticos de algunos iones y átomos

Átomo (o ion)	Momento magnético ( $10^{-24}$ J/T)
H	9.27
He	0
Ne	0
Ce <sup>3+</sup>	19.8
Yb <sup>3+</sup>	37.1

Un pequeño imán permanente levantado arriba de un disco del superconductor enfriado a la temperatura del nitrógeno líquido. (Cortesía de IBM Research)

### Magnetización

### Intensidad de campo magnético

Es conveniente introducir otra cantidad de campo  $\mathbf{H}$ , llamada **intensidad de campo magnético**. Esta cantidad vectorial se define por la relación  $\mathbf{H} = (\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{M}$ , o

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (30.34)$$

En unidades del SI, las dimensiones de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$  son A/m.

Para entender mejor estas expresiones, considérese la región en el interior de una bobina toroidal que lleva una corriente  $I$ . Si la región interior está vacía, entonces  $\mathbf{M} = 0$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}$ . Como  $B_0 = \mu_0 nI$  en el interior de un toroide, donde  $n$  es el número de vueltas por unidad de longitud en su devanado, entonces  $H = B_0/\mu_0 = \mu_0 nI/\mu_0$ , o bien

$$H = nI \quad (30.35)$$

Es decir, la intensidad del campo magnético dentro del toroide es debida a la corriente en su devanado.

Si el núcleo del toroide se llena con alguna sustancia, y la corriente  $I$  se mantiene constante, entonces  $\mathbf{H}$  en el interior de la sustancia permanecerá *sin cambio*, con una magnitud  $nI$ . Esto es porque la intensidad del campo magnético  $\mathbf{H}$  se debe sólo a la corriente en la bobina. Sin embargo, el campo magnético total  $\mathbf{B}$  cambia cuando la sustancia es introducida. De la ecuación 30.34, se ve que parte de  $\mathbf{B}$  se debe al término  $\mu_0\mathbf{H}$  asociado con la corriente toroidal; la segunda contribución de  $\mathbf{B}$  es el término  $\mu_0\mathbf{M}$  debido a la magnetización de la sustancia.

Para una gran grupo de sustancias, especialmente sustancias paramagnéticas y diamagnéticas, la magnetización  $\mathbf{M}$  es proporcional a la intensidad del campo magnético  $\mathbf{H}$ . En estas sustancias lineales, se puede escribir

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H} \quad (30.36)$$

donde  $\chi$  es un factor adimensional llamado **susceptibilidad magnética**. Si una muestra es paramagnética,  $\chi$  es positiva, por lo cual  $\mathbf{M}$  está en la misma dirección que  $\mathbf{H}$ . Si la sustancia es diamagnética,  $\chi$  es negativa, y  $\mathbf{M}$  es opuesto a  $\mathbf{H}$ . Es importante hacer notar que esta *relación lineal no es aplicable a las sustancias ferromagnéticas*. Las susceptibilidades de algunas sustancias se dan en la tabla 30.2.

Sustituyendo  $\mathbf{M}$  de la ecuación 30.36 en la ecuación 30.34 se obtiene

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi\mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}$$

o bien

$$\mathbf{B} = \kappa_m\mathbf{H} \quad (30.37)$$

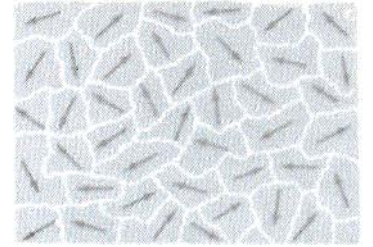
donde la constante  $\kappa_m$  se llama **permeabilidad** de la sustancia y tiene el valor de<sup>4</sup>

$$\kappa_m = \mu_0(1 + \chi) \quad (30.38)$$

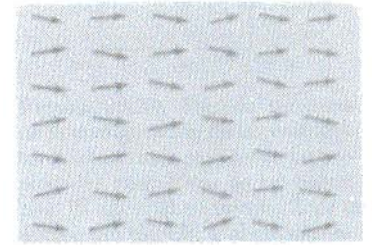
Las sustancias también pueden clasificarse en términos de cómo sus permeabilidades  $\kappa_m$  se comparan con  $\mu_0$  (permeabilidad del espacio libre) como sigue

Paramagnético	$\kappa_m > \mu_0$
Diamagnético	$\kappa_m < \mu_0$
Ferromagnético	$\kappa_m \gg \mu_0$

<sup>4</sup> El símbolo  $\mu$  a veces se utiliza para la permeabilidad, pero se ha utilizado este mismo símbolo para el momento magnético. Por esta razón, se utiliza el símbolo  $\kappa_m$  para la permeabilidad.



a)



b)

**Figura 30.29** a) Momentos magnéticos polares orientados al azar en una sustancia no magnetizada. b) Cuando se aplica un campo externo  $\mathbf{B}_0$ , los dipolos magnéticos atómicos tienden a alinearse con el campo, dándole a la muestra una magnetización total  $\mathbf{M}$ .

**Susceptibilidad magnética**

**Permeabilidad**

**TABLA 30.2 Susceptibilidades magnéticas de algunas sustancias paramagnéticas y diamagnéticas a 300 K**

Sustancia paramagnética	$\chi$	Sustancia diamagnética	$\chi$
Aluminio	$2.3 \times 10^{-5}$	Bismuto	$-1.66 \times 10^{-5}$
Calcio	$1.9 \times 10^{-5}$	Cobre	$-9.8 \times 10^{-6}$
Cloro	$2.7 \times 10^{-4}$	Diamante	$-2.2 \times 10^{-5}$
Litio	$2.1 \times 10^{-5}$	Oro	$-3.6 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1.2 \times 10^{-5}$	Plomo	$-1.7 \times 10^{-5}$
Niobio	$2.6 \times 10^{-4}$	Mercurio	$-2.9 \times 10^{-5}$
Oxígeno (TPE)	$2.1 \times 10^{-6}$	Nitrógeno (TPE)	$-5.0 \times 10^{-9}$
Platino	$2.9 \times 10^{-4}$	Plata	$-2.6 \times 10^{-5}$
Tungsteno	$6.8 \times 10^{-5}$	Silicio	$-4.2 \times 10^{-6}$

Como  $\chi$  es muy pequeña para sustancias paramagnéticas y diamagnéticas (Véase la tabla 30.2),  $\kappa_m$  es aproximadamente igual a  $\mu_0$  en estos casos. Para sustancias ferromagnéticas, sin embargo,  $\kappa_m$  es por lo general algunos cientos de veces mayor que  $\mu_0$ . Aun cuando la ecuación 30.37 da una relación simple entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ , ésta debe ser interpretada con mucho cuidado cuando se trate de sustancias ferromagnéticas. Como se mencionó antes,  $\mathbf{M}$  no es una función lineal de  $\mathbf{H}$  para sustancias ferromagnéticas tales como el hierro, níquel y cobalto. Esto se debe a que el valor de  $\kappa_m$  no es característico de la sustancia, sino que depende del estado previo y del tratamiento de la muestra.

**EJEMPLO 30.10 Toroíde relleno de hierro**

Un devanado toroidal que lleva una corriente de 5 A se hace con 60 vueltas/m de alambre. El núcleo es de hierro, el cual tiene una permeabilidad magnética de  $5000\mu_0$  en las condiciones dadas. Encuéntrese  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  en el interior del núcleo.

**Solución** Utilizando las ecuaciones 30.35 y 30.37, se obtiene

$$H = nI = \left(60 \frac{\text{vueltas}}{\text{m}}\right)(5 \text{ A}) = 300 \frac{\text{A} \cdot \text{vueltas}}{\text{m}}$$

$$\begin{aligned} B &= \kappa_m H = 5000\mu_0 H \\ &= 5000 \left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}\right) \left(300 \frac{\text{A} \cdot \text{vueltas}}{\text{m}}\right) \\ &= 1.88 \text{ T} \end{aligned}$$

¡Este valor de  $\mathbf{B}$  es 5000 veces mayor que el del campo en ausencia de hierro!

**Ejercicio 4** Determine la magnitud y la dirección de la magnetización en el interior del núcleo de hierro.

**Respuesta**  $M = 1.5 \times 10^6 \text{ A/m}$ ;  $\mathbf{M}$  está en la dirección de  $\mathbf{H}$

**Ferromagnetismo**

El hierro, cobalto, níquel, gadolinio y disprosio son materiales fuertemente magnéticos y suele llamárseles ferromagnéticos. Las sustancias ferromagnéticas se utilizan para la fabricación de imanes permanentes. Tales sustancias contienen momentos magnéticos atómicos que tienden a alinearse paralelamente unos de otros en presencia de un fuerte campo magnético externo. Con los momentos alineados, la sustancia permanecerá magnetizada después de quitar el campo magnético externo. Esta alineación permanente se debe a los fuertes acoplamientos entre momentos vecinos, lo que sólo puede ser entendido en términos de la mecánica cuántica.

Todos los materiales ferromagnéticos contienen regiones microscópicas llamadas dominios, en los cuales todos los momentos están alineados. Estos dominios tienen volúmenes aproximadamente de  $10^{-12}$  hasta  $10^{-8} \text{ m}^3$  y contiene de  $10^{17}$  hasta  $10^{21}$  átomos. Las fronteras entre varios dominios que tienen diferentes orientaciones se llaman paredes de dominio. En una muestra no magnetizada, los dominios están orientados al azar de tal manera que el campo magnético total es cero como se muestra en la figura 30.29a. Cuando la muestra se coloca en un campo magnético externo, los dominios tienden a alinearse con el campo girando ligeramente, con lo cual resulta una muestra magnetizada, como en la figura 30.29b.



Las observaciones muestran que los dominios inicialmente orientados a lo largo del campo externo crecerán en tamaño a expensas de los dominios con orientación menos favorable. Cuando se quita el campo magnético externo, la muestra retiene la magnetización neta en la dirección del campo original.<sup>5</sup> A temperaturas ambientales, la agitación térmica no es suficientemente alta para alterar esta orientación preferencial de los momentos magnéticos.

Un arreglo experimental común utilizado para medir las propiedades magnéticas de un material ferromagnético consta de una muestra de forma toroidal construida con  $N$  vueltas de alambre, como en la figura 30.30. Esta configuración es a veces referida como **anillo de Rowland**. Una bobina secundaria conectada a un galvanómetro se utiliza para medir el flujo magnético. El campo magnético  $B$  en el interior del núcleo de un toroide se mide por el incremento de la corriente en la bobina del toroide desde cero hasta  $I$ . Como la corriente cambia, el flujo magnético a través de la bobina secundaria cambia por  $BA$ , donde  $A$  es el área de la sección transversal del toroide. Debido a este cambio de flujo, una fem es inducida en la bobina secundaria, la cual es proporcional a la rapidez del cambio de flujo magnético. Si el galvanómetro en el circuito secundario se calibra en forma apropiada, se puede obtener el valor de  $B$  correspondiente a cualquier valor de la corriente en la bobina toroidal. El campo magnético  $B$  se mide primero en la bobina vacía y después con la bobina llena de sustancia magnética. Las propiedades magnéticas de la sustancia se obtienen entonces de la comparación de las dos medidas.

Ahora considérese una bobina toroidal cuyo núcleo conste de hierro no magnetizado. Si la corriente se incrementa desde cero hasta un valor  $I$ , la intensidad de  $H$  aumenta linealmente con  $I$  de acuerdo con la expresión  $H = nI$ . Además, el campo total  $B$  también se incrementa cuando aumenta la corriente como se muestra en la figura 30.31. En el punto  $O$ , los dominios están orientados al azar, correspondiendo a  $B_m = 0$ . Cuando el campo externo aumenta, los dominios tienden a alinearse y están completamente alineados en el punto  $a$ . En este punto, el núcleo de hierro está próximo a la saturación. (La condición de saturación corresponde al caso donde todos los dominios están alineados en una misma dirección.) Después, supóngase que la corriente se reduce hasta cero, eliminando así el campo externo. La curva de  $B$  en función de  $H$ , llamada **curva de magnetización**, ahora sigue la trayectoria  $ab$  que se ve en la figura 30.31. Nótese que en el punto  $b$  el campo  $B$  no es cero, aún cuando el campo externo es  $B_0 = 0$ . Esto se explica por el hecho de que el núcleo de hierro está ahora magnetizado debido a la alineación de un gran número de dominios (es decir,  $B = B_m$ ). En este punto, se dice que el hierro tiene una **magnetización remanente**. Si se invierte el campo externo en dirección y se incrementa su intensidad con una corriente inversa, los dominios dentro de la muestra se reorientarán hasta llegar a desmagnetizarse en el punto  $c$  donde  $B = 0$ . Al seguir aumentando la corriente inversa ocasiona que el hierro sea magnetizado en dirección opuesta, aproximándose a la saturación en el punto  $d$ . Una secuencia similar de eventos ocurre cuando la corriente se reduce hasta cero y entonces se incrementa en la dirección original (positiva). En este caso, la curva de magnetización sigue la trayectoria  $def$ . Si la corriente se aumenta lo suficiente, la curva de magnetización regresa al punto  $a$ , donde la muestra nuevamente tiene su máxima magnetización.

El efecto descrito, llamado **histéresis magnética**, muestra que la magnetización de las sustancias ferromagnéticas depende de la historia de la sustancia así como de la intensidad del campo aplicado. (La palabra *histéresis* literalmente significa "estar retrasado".) Se dice en algunas ocasiones que las sustancias

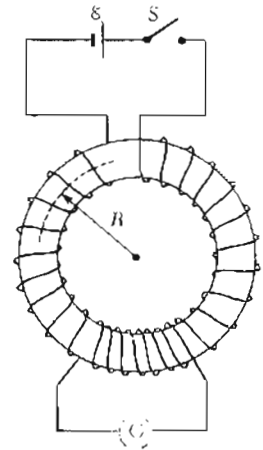


Figura 30.30 Sección transversal de la configuración de un enrollado toroidal utilizado para medir las propiedades magnéticas de las sustancias. El material en estudio llena el núcleo del toroide, y el circuito secundario tiene un galvanómetro para medir el flujo magnético.

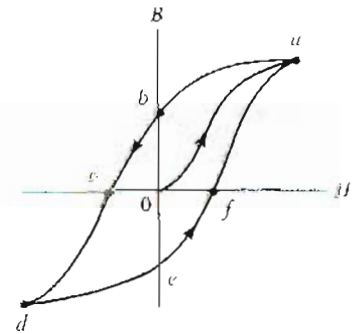


Figura 30.31 Curva de histéresis para un material ferromagnético.

<sup>5</sup> Es posible observar directamente las paredes de dominios con un microscopio y seguir sus movimientos. En esta técnica, una suspensión líquida de una sustancia ferromagnética finamente pulverizada se aplica a la muestra. Las partículas finas tienden a acumularse en las paredes del dominio y se trasladan con ellas.

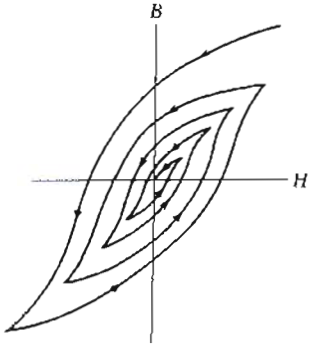


Figura 30.33 Desmagnetización de un material ferromagnético llevándolo a través de ciclos sucesivos de histéresis.

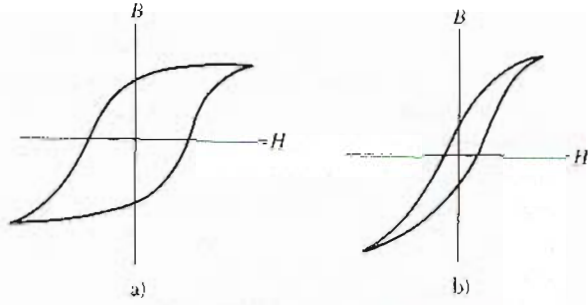


Figura 30.32 Curvas de histéresis para: a) un material ferromagnético duro y b) un material ferromagnético suave.

ferromagnéticas tienen memoria ya que permanecen magnetizadas después de que se retira el campo magnético externo. El ciclo cerrado que se muestra en la figura 30.31 se denomina *ciclo de histéresis*. Su forma y tamaño dependen de las propiedades de la sustancia ferromagnética y de la intensidad del campo magnético aplicado. El ciclo de histéresis para un material ferromagnético "duro" (utilizado en imanes permanentes) se caracteriza por ser ancho como en la figura 30.32a, lo cual corresponde a una gran magnetización remanente. Por ello los materiales no pueden ser fácilmente desmagnetizados por un campo externo. Esto contrasta con los materiales ferromagnéticos "suaves", tales como el hierro, que tiene un ciclo delgado y una magnetización remanente pequeña (Fig. 30.32b). Tales materiales son magnetizados y desmagnetizados con facilidad. El ferromagnético "suave" ideal no presentaría histéresis y por lo tanto no tendría magnetización remanente. Una sustancia ferromagnética puede ser desmagnetizada al llevar la sustancia a través de ciclos sucesivos de histéresis, disminuyendo en forma gradual el campo aplicado como en la figura 30.33.

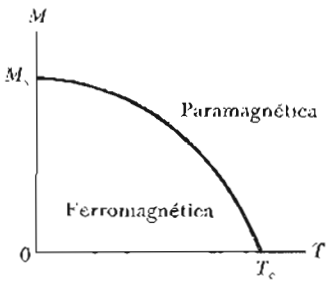


Figura 30.34 Gráfica de la magnetización en función de la temperatura absoluta para una sustancia ferromagnética. Los momentos magnéticos son alineados (ordenados) por debajo de la temperatura de Curie  $T_c$ , donde la sustancia es ferromagnética. La sustancia se transforma en paramagnética (desordenada) por encima de  $T_c$ .

La curva de magnetización se utiliza por otras razones. El *área encerrada por la curva de magnetización representa el trabajo requerido para llevar el material a través del ciclo de histéresis*. La energía adquirida por la muestra en el proceso de magnetización se origina en la fuente del campo externo, es decir, la fem en el circuito de la bobina toroidal. Cuando el ciclo de magnetización se repite, los procesos disipativos dentro del material se deben al realineamiento de los dominios dando por resultado la transformación de energía magnética en energía térmica interna, la cual aumenta la temperatura de la sustancia. Por esta razón, los aparatos sujetos a campos alternos (como los transformadores) utilizan núcleos hechos de sustancias ferromagnéticas suaves, con lo cual se asegura que los ciclos de histéresis son delgados y por lo tanto es menor la energía perdida por ciclo.

### Paramagnetismo

Las sustancias **paramagnéticas** tienen un pequeño y positivo valor de susceptibilidad ( $0 < \chi \ll 1$ ), lo cual se debe a la presencia de átomos (o iones) con momentos magnéticos permanentes. Estos dipolos sólo interactúan fuertemente entre ellos y están orientados en forma aleatoria en ausencia de un campo magnético externo. Cuando la sustancia se coloca en un campo magnético externo, sus dipolos atómicos tienden a alinearse con el campo. Sin embargo, este proceso de alineamiento debe competir con los efectos del movimiento térmico, el cual tiende a desorientar los dipolos.

Por vía experimental, se encuentra que la magnetización en una sustancia paramagnética es proporcional al campo aplicado e inversamente proporcional a la temperatura absoluta sobre una amplia gama de condiciones. Es decir,



$$M = C \frac{B}{T} \quad (30.39)$$

Esto se conoce como **ley de Curie** en honor de su descubridor Pierre Curie (1859-1906), y la constante  $C$  se llama **constante de Curie**. Esto muestra que la magnetización se incrementa cuando aumenta el campo aplicado y cuando decrece la temperatura. Cuando  $B = 0$ , la magnetización es cero, correspondiendo a la orientación al azar de los dipolos. Para altos campos y bajas temperaturas, la magnetización se aproxima a su máximo, o saturación, valor que corresponde a la alineación completa de los dipolos y la ecuación 30.39 ya no es válida.

Es interesante hacer notar que cuando la temperatura de una sustancia ferromagnética se acerca o excede una temperatura crítica, llamada **temperatura de Curie**, la sustancia pierde su magnetización espontánea y se convierte en paramagnética (véase la figura 30.34). Por debajo de la temperatura de Curie, los momentos magnéticos están alineados y la sustancia es ferromagnética. Por arriba de la temperatura de Curie, la energía térmica es tan grande que ocasiona el desorden de las orientaciones de los dipolos, por lo que la sustancia se convierte en paramagnética. Por ejemplo, la temperatura de Curie para el hierro es 1043 K. Una lista de temperaturas de Curie para varias sustancias ferromagnéticas está dada en la tabla 30.3.

### Diamagnetismo

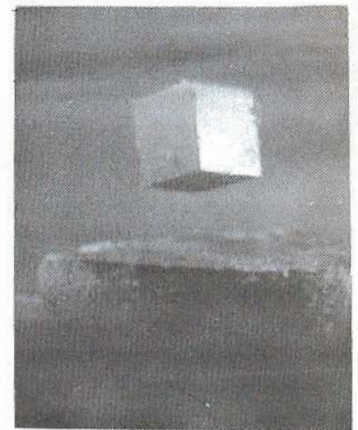
Una sustancia diamagnética es aquella cuyos átomos no tienen momento dipolar magnético permanente. Cuando se aplica un campo magnético externo a una sustancia diamagnética como el bismuto o la plata, un momento dipolar débil es inducido en la dirección opuesta al campo aplicado. Aun cuando el efecto diamagnético está presente en toda la materia, éste es más débil que el paramagnetismo y el ferromagnetismo.

Se puede comprender el diamagnetismo al considerar dos electrones de un átomo orbitando el núcleo en direcciones opuestas pero con la misma rapidez. Los electrones permanecerán en sus órbitas debido a la fuerza electrostática atractiva (fuerza centrípeta) de la carga positiva del núcleo. Dado que los momentos magnéticos de los dos electrones son iguales en magnitud y opuestos en dirección, se cancelan uno al otro y el momento dipolar del átomo es cero. Cuando se aplica un campo magnético externo, los electrones experimentan una fuerza adicional  $qv \times B$ . Esta fuerza adicional modifica la fuerza centrípeta incrementando la rapidez orbital del electrón cuyo momento magnético es antiparalelo al campo y disminuyendo la rapidez del electrón cuyo momento magnético es paralelo al campo. Como resultado de esto, los momentos magnéticos de los electrones no se cancelan y la sustancia adquiere un momento dipolar neto opuesto al campo aplicado.

Como recordará haber visto en el capítulo 27, los superconductores son sustancias cuya resistencia es *cero* por debajo de una temperatura crítica característica de cada sustancia. Cierta tipo de superconductores también presentan *diamagnetismo perfecto* en estado de superconductividad. Como resultado de esto, un campo magnético aplicado es *expelido* por el superconductor de tal manera que el campo es *cero* en su interior. Este fenómeno de expulsión de flujo se conoce como **efecto Meissner**. Si un imán permanente se acerca a un superconductor, las dos sustancias se repelerán una a la otra. Esto se aprecia en la fotografía, en la cual se muestra un pequeño imán permanente levitando encima de un superconductor que se mantiene a 77 K. Una descripción más detallada de esta inusual propiedad de los superconductores será expuesta en el capítulo 44 de la versión ampliada de este texto.

TABLA 30.3 Temperatura de Curie para algunas sustancias ferromagnéticas

Sustancia	$T_c$ (K)
Hierro	1043
Cobalto	1394
Níquel	631
Gadolinio	317
$Fe_2O_3$	893



Un pequeño imán permanente levitando arriba de un disco del superconductor enfriado a la temperatura del nitrógeno líquido. (Cortesía de IBM Research)

**EJEMPLO 30.11 Saturación en magnetización**

Estímese la *máxima magnetización* de un cilindro largo de hierro, suponiendo que existe un espín de electrón no apareado por átomo.

**Solución** La máxima magnetización, llamada *saturación en magnetización*, se obtiene cuando todos los momentos magnéticos de la muestra están alineados. Si la muestra contiene  $n$  átomos por unidad de volumen, entonces la saturación en magnetización  $M_s$  tiene un valor

$$M_s = n\mu$$

donde  $\mu$  es el momento magnético por átomo. Como el

peso molecular del hierro es 55 g/mol y su densidad es de 7.9 g/cm<sup>3</sup>, el valor de  $n$  es  $8.5 \times 10^{28}$  átomos/m<sup>3</sup>. Suponiendo que cada átomo contribuye con un magnetón de Bohr (debido a un espín impar) al momento magnético, se obtiene

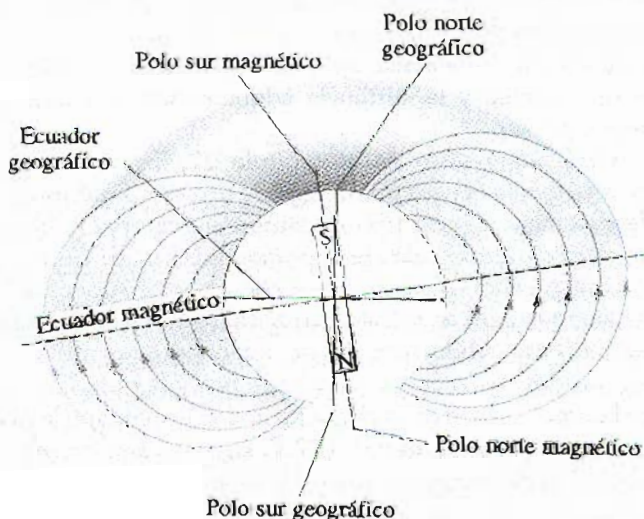
$$\begin{aligned} M_s &= \left( 8.5 \times 10^{28} \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3} \right) \left( 9.27 \times 10^{-24} \frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{átomo}} \right) \\ &= 7.9 \times 10^5 \text{ A/m} \end{aligned}$$

Esto es casi la mitad de la saturación en magnetización experimentalmente obtenida para el hierro, lo cual indica que existen dos espines de electrones impares por átomo.

**\*30.10 CAMPO MAGNÉTICO DE LA TIERRA**

Cuando se habló de que un pequeño imán de barra tenía un polo norte y un polo sur, se debería decir que tiende a “buscar el polo norte” y a “buscar el polo sur”. Así se entendería por qué un imán se utiliza como brújula, ya que uno de sus extremos buscará o apuntará hacia el polo norte geográfico de la Tierra. Entonces, se concluye que *el polo norte magnético está localizado cerca del polo sur geográfico, y que el polo sur magnético está localizado cerca del polo norte geográfico*. En efecto, la configuración del campo magnético terrestre, que se ve en la figura 30.35, es muy parecida a la que se tendría sepultando una barra magnética en el interior de la Tierra.

Si se suspende una brújula tenderá a girar tanto en el plano vertical como en el plano horizontal, y estará horizontal con respecto a la superficie de la Tierra sólo cerca del ecuador. Cuando el dispositivo se mueve hacia el norte, la brújula gira de tal manera que apunta más y más hacia la superficie de la Tierra. Por último, en un punto precisamente al norte de la Bahía Hudson en Canadá, el polo norte de la brújula estará apuntando directo hacia abajo. Esta posición, establecida por primera vez en 1832, se considera como la posición del polo sur magnético de la Tierra. Este sitio está aproximadamente a 1300 millas del polo norte geográfico y varía con el tiempo. De manera similar, el polo norte magnético de la Tierra está separado unas 1200 millas del polo sur geográfico. Así que sólo es aproximadamente correcto decir que una brújula apunta al norte. La diferencia



**Figura 30.35** Líneas de campo magnético de la Tierra. Obsérvese que el polo sur magnético está en el polo norte geográfico y que el polo norte magnético está en el polo sur geográfico.

entre el norte verdadero, definido como norte geográfico, y el norte que indica una brújula varía de punto a punto sobre la Tierra, y esta diferencia se conoce como *declinación magnética*. Por ejemplo, a lo largo de una línea a través de Florida y los Grandes Lagos, la brújula indicaría que el norte verdadero estaría en el estado de Washington, que está alineado  $25^\circ$  al este del verdadero norte.

Aun cuando el patrón del campo magnético terrestre es similar al que tendría una barra de imán en el interior de la Tierra, es fácil entender que la fuente del campo magnético de la Tierra no es una gran masa de material magnetizado permanentemente. La Tierra tiene grandes depósitos de hierro en las profundidades de su superficie, pero las altas temperaturas de la Tierra en su núcleo hacen suponer que el hierro no retiene ninguna magnetización permanente. Si se considera con más detenimiento se verá que la fuente verdadera son las corrientes convectivas de carga en el núcleo de la Tierra.

La circulación de iones o electrones en el líquido interior pudieran producir un campo magnético, tal como una corriente en una espira de alambre produce un campo magnético. Existe también fuerte evidencia de que la intensidad del campo de la Tierra está relacionada con la rapidez de rotación de ésta. Por ejemplo, Júpiter gira tan rápido como la Tierra, y recientes pruebas espaciales indican que el campo magnético de Júpiter es tan intenso como el nuestro. Por otro lado, Venus gira más lento que la Tierra y se ha encontrado que su campo magnético es débil. Continúan las investigaciones sobre las causas del magnetismo de la Tierra.

Existe un interesante punto de vista concerniente al campo magnético de la Tierra. Se ha encontrado que la dirección del campo se ha invertido varias veces durante el último millón de años. Se han encontrado evidencias de esto en el basalto (un tipo de rocas que contienen hierro) que se obtiene de las rocas que son expulsadas en la actividad volcánica sobre el piso del océano. Cuando la lava se enfría, los sólidos retienen una especie de fotografía de la dirección del campo magnético de la Tierra. Las rocas pueden fecharse por otros medios que proporcionan evidencia de la reversibilidad periódica del campo magnético.

## RESUMEN

La **ley de Biot-Savart** dice que el campo magnético  $d\mathbf{B}$  en un punto  $P$  debido a un elemento de corriente  $d\mathbf{s}$  que lleva una corriente estable  $I$  es

$$d\mathbf{B} = k_m \frac{I d\mathbf{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (30.1)$$

donde  $k_m = 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$  y  $r$  es la distancia desde el elemento hasta el punto  $P$ . Para determinar el campo total en  $P$  debido a un conductor que lleva corriente, se debe integrar esta expresión vectorial sobre todo el conductor.

El **campo magnético** a una distancia  $a$  de un alambre recto largo que lleva una corriente  $I$  está dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (30.7)$$

donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$  es la **permeabilidad del espacio libre**. Las líneas de campo son círculos concéntricos con el alambre.

La fuerza por unidad de longitud entre dos alambres paralelos separados una distancia  $a$  que lleven corrientes  $I_1$  e  $I_2$  tiene una magnitud dada por

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (30.13)$$

Ley de Biot-Savart

Campo magnético de un alambre infinitamente largo

Fuerza por unidad de longitud entre dos alambres

La fuerza es atractiva si las corrientes son en el mismo sentido y repulsiva si son en sentidos opuestos.

La **ley de Ampère** dice que la integral de línea de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente total estacionaria que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada. Es decir,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (30.15)$$

Utilizando la ley de Ampère, se encuentra que los campos en el interior de un toroide y un solenoide están dados por

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (30.18)$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 n I \quad (30.20)$$

donde  $N$  es el número total de vueltas.

El **flujo magnético**  $\Phi_m$  a través de una superficie está definido por la integral

$$\Phi_m \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (30.23)$$

La **ley de Gauss del magnetismo** establece que el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es cero. Esto es, no existen los polos magnéticos aislados (o monopolos).

La **corriente de desplazamiento**  $I_d$  surge de la variación del flujo eléctrico en el tiempo, y está definida como

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (30.26)$$

La **forma generalizada de la ley de Ampère**, la cual incluye la corriente de desplazamiento, está dada por

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (30.27)$$

La ley describe el hecho de que el campo magnético se produce tanto por la corriente de conducción como por el cambio del campo eléctrico.

Las fuentes fundamentales de todos los campos magnéticos son los dipolos magnéticos asociados con los átomos. El momento dipolar atómico puede deberse tanto al movimiento orbital de los electrones como a la propiedad intrínseca del electrón llamada *espín*.

Las propiedades magnéticas de las sustancias pueden ser descritas en términos de su respuesta a un campo externo. En este sentido, los materiales pueden describirse como *ferromagnéticos*, *paramagnéticos* o *diamagnéticos*. Los átomos de los materiales **ferromagnéticos** y **paramagnéticos** tienen momentos magnéticos permanentes. Los materiales **diamagnéticos** constan de átomos con momentos magnéticos no permanentes.

Cuando un material paramagnético o ferromagnético se coloca en un campo magnético externo, sus dipolos tienden a alinearse paralelamente al campo, y esta alineación se convierte en un aumento en el campo total. El aumento en el campo debido a materiales paramagnéticos es pequeño. Esto se debe a que los dipolos magnéticos en una sustancia paramagnética están orientados al azar en ausencia del campo. Los dipolos se alinean parcialmente en presencia de un campo aplicado.

## Ley de Ampère

### Campo magnético en el interior de un toroide

### Campo magnético en el interior de un solenoide

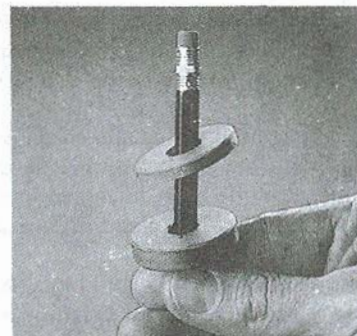
## Flujo magnético

## Corriente de desplazamiento

## Ley de Ampère-Maxwell

## PREGUNTAS

1. ¿El campo magnético debido a una espira de corriente es uniforme? Dé una explicación.
2. Una corriente en un conductor produce un campo magnético el cual puede calcularse utilizando la ley de Biot-Savart. Como la corriente está definida como la rapidez del flujo de carga, ¿qué puede concluir acerca del campo magnético debido a cargas estacionarias? ¿Y qué acerca de cargas en movimiento?
3. Dos alambres paralelos llevan corrientes en direcciones opuestas. Describa la naturaleza del campo magnético resultante (debido a los dos alambres en los puntos: a) entre los alambre y b) afuera de los alambres en el plano que los contiene.
4. Explique por qué dos alambres que lleven corrientes en direcciones opuestas se repelen uno al otro.
5. Dos alambres que llevan corrientes iguales y opuestas están oscilando juntos en la construcción de un circuito. ¿Por qué esta técnica reduce los campos magnéticos perdidos?
6. ¿La ley de Ampère es válida para toda trayectoria cerrada alrededor de un conductor? ¿Por qué no se utiliza para el cálculo de  $\mathbf{B}$  para todas esas trayectorias?
7. Compare la ley de Ampère con la ley de Biot-Savart. ¿Cuál es el método más general para el cálculo de  $\mathbf{B}$  de un conductor que lleve una corriente?
8. ¿El campo magnético en el interior de un toroide es uniforme? Dé una explicación.
9. Describa las similitudes entre la ley de Ampère en el magnetismo y la ley de Gauss en electrostática.
10. Un tubo hueco de cobre lleva una corriente. ¿Por qué  $\mathbf{B} = 0$  en el interior del tubo? ¿ $\mathbf{B}$  es diferente de cero en el exterior del tubo?
11. ¿Por qué  $\mathbf{B}$  no es cero en el exterior de un solenoide? ¿Por qué  $\mathbf{B} = 0$  en el exterior del toroide? (Las líneas de  $\mathbf{B}$  deben ser trayectorias cerradas.)
12. Describa el cambio en el campo magnético en el interior de un solenoide que lleva una corriente estable  $I$  si: a) la longitud del solenoide se duplica, pero el número de vueltas es el mismo, y b) el número de vueltas se duplica y la longitud es la misma.
13. Una espira conductora plana se coloca en un campo magnético uniforme que está dirigido hacia el eje  $x$  positivo. ¿En qué orientación de la espira el flujo a través de ella es máximo? ¿Para qué orientación el flujo es mínimo?
14. ¿Qué nuevo concepto introdujo Maxwell al generalizar la ley de Ampère?
15. Un imán atrae una pieza de hierro. El hierro entonces puede atraer otra pieza de hierro. Con base en la alineación de dominios, explique qué sucede en cada pieza de hierro.
16. Suponga que usted es un astronauta que se encuentra en un planeta sin equipo de prueba ni minerales alrededor, y además no sabe si el planeta tiene campo magnético. Si tiene dos barras de hierro, una magnetizada y otra no, ¿cómo podría determinar cuál es la magnetizada?
17. ¿Por qué al golpear un imán con un martillo se disminuirá su magnetismo?
18. ¿Por qué un clavo será atraído hacia un polo magnético? Explique qué pasa en el interior del clavo.
19. El polo norte de una brújula es atraído hacia el polo norte geográfico de la Tierra. Si polos iguales se repelen, ¿cuál es la forma de resolver este dilema?
20. Un gobernador hindú alguna vez sugirió que fuera sepultado en un féretro magnético con la polaridad en tal forma que quedara suspendido para siempre entre el cielo y la tierra. ¿Es posible tal forma de levitación magnética? Explique.
21. ¿Por qué  $M = 0$  en el vacío? ¿Cuál es la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en el vacío?
22. Explique por qué algunos átomos tienen momentos magnéticos dipolares y otros no.
23. ¿Qué factores pueden contribuir al momento dipolar magnético total de un átomo?
24. ¿Por qué la susceptibilidad de una sustancia diamagnética es negativa?
25. ¿Por qué el efecto del diamagnetismo puede ser despreciado en una sustancia paramagnética?
26. Explique el significado de la temperatura de Curie para una sustancia ferromagnética?
27. Analice las diferencias entre sustancias ferromagnéticas, paramagnéticas y diamagnéticas.
28. ¿Cuál es la diferencia entre materiales ferromagnéticos duros y suaves?
29. ¿La superficie de un disco de computadora debe ser de un material ferromagnético duro o suave?
30. Explique por qué es deseable utilizar materiales ferromagnéticos duros al hacer imanes permanentes.
31. ¿Por qué un clavo ordinario de acero desmagnetizado es atraído por un imán permanente?
32. ¿Esperaría que una cinta de grabación fuera atraída por un imán? Pruebe esto, pero no con una cinta que tenga grabado algo que desee conservar.
33. Dados un imán potente y un desarmador, a) ¿cómo podría magnetizar el desarmador? y b) ¿cómo podría desmagnetizar el desarmador?
34. La fotografía de abajo muestra dos imanes permanentes con hoyos a través de sus centros. Observe que el imán de arriba está levitando sobre el imán de abajo. ¿Cómo ocurre esto? b) ¿Qué papel juega el lápiz? c) ¿Qué se puede decir acerca de los polos de los imanes? d) Si el imán de arriba se invierte, ¿qué supone que sucederá?



Pregunta 34. Levitación magnética utilizando dos imanes cerámicos. (Cortesía de CENCO)

**PROBLEMAS**

**Sección 30.1 Ley de Biot-Savart**

1. Calcule la magnitud del campo magnético en un punto a 100 cm de un conductor largo y delgado que lleva una corriente de 1 A.
2. Un conductor largo y delgado lleva una corriente de 10 A. A qué distancia del conductor la magnitud del campo magnético resultante es igual a  $10^{-4}$  T?
3. Un alambre en el que existe una corriente de 5 A está doblado de tal forma que hace una espira circular. Si el campo magnético en el centro de la espira debe ser de  $10 \mu\text{T}$ , ¿cuál debe ser el valor del radio de la espira?
4. En el modelo para el átomo de Neils Bohr (1913), un electrón circula al protón a una distancia de  $5.3 \times 10^{-11}$  m con una velocidad de  $2.2 \times 10^6$  m/s. Calcule la intensidad del campo magnético producido por el movimiento del electrón en la posición del protón.
5. Un conductor que forma un cuadrado de longitud de lado  $\ell = 0.4$  m lleva una corriente  $I = 10$  A (Fig. 30.36). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el centro del cuadrado.

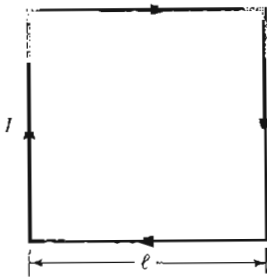


Figura 30.36 (Problemas 5 y 7).

6. Una espira rectangular de  $12 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$  de alambre superconductor lleva una corriente de 30 A. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético en el centro de la espira?
7. Si la longitud total del conductor del problema 5 se conforma en una sola espira circular con la misma corriente, ¿cuál es el valor del campo magnético en el centro de la espira?
8. ¿De cuántas vueltas deberá ser una bobina circular delgada de radio 0.1 m para que una corriente de 10 A produzca un campo magnético de  $3 \times 10^{-3}$  T en su centro?
9. Determine la magnitud del campo en un punto  $P$  que está a una distancia  $x$  de la esquina de un alambre infinitamente largo que hace un ángulo recto, como se muestra en la figura 30.37. El alambre lleva una corriente estable  $I$ .
10. Un segmento de alambre de longitud total  $4r$  se modela con la forma que se presenta en la figura 30.38 y lleva una corriente  $I = 6$  A. Encuentre la magnitud y la dirección del campo magnético en el punto  $P$  cuando  $r = 2\pi \text{ cm}$ .

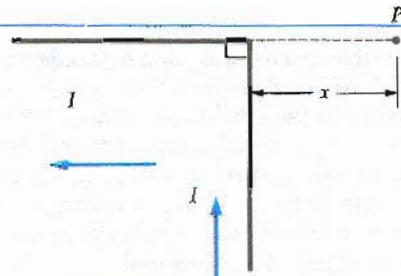


Figura 30.37 (Problema 9).

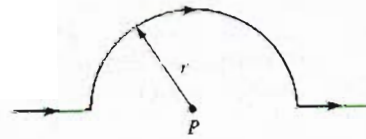


Figura 30.38 (Problema 10).

11. La trayectoria de corriente de la figura 30.39 produce un campo magnético en  $P$ , el centro del arco. Si el arco sustenta un ángulo de  $30^\circ$  y la longitud total del cable en parte en forma de rebanada de pastel de la trayectoria es 1,2 m, ¿cuál es la magnitud y la dirección del campo producido en  $P$  si la corriente es de 3 A? Ignore la contribución al campo debida a la corriente en los arcos cortos cercanos a  $P$ .

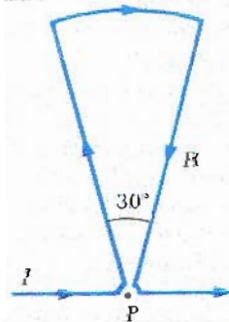


Figura 30.39 (Problema 11).

12. Utilice la ley de Biot-Savart para calcular la magnitud y la dirección del campo magnético en un punto  $P$  localizado en el centro de círculos concéntricos de radios  $a = 5 \text{ cm}$  y  $b = 8 \text{ cm}$  (Fig. 30.40) cuando una corriente  $I = 2$  A se mantiene en el circuito de la espira.

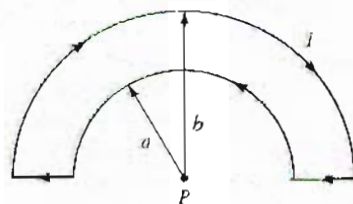


Figura 30.40 (Problema 12).

13. Considere una bobina circular delgada de radio  $R$  que lleva una corriente  $I$ . Si la bobina se encuentra en el plano  $yz$  con su centro en el origen, ¿en qué coordenada  $x$  (expresada en términos de  $R$ ) la magnitud del campo será: a) la mitad de la del origen? b) un décimo de la del origen?
14. Recordando que la densidad de corriente  $J = nqv_d$  (Ec. 27.6), demuestre que la ley de Biot-Savart puede escribirse como

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv_d \times \hat{r}}{r^2} n dV$$

donde  $dV$  es el elemento de volumen de un conductor y  $v_d$  es la velocidad de deriva definida en el capítulo 27.

**Sección 30.2 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos**

15. Dos conductores largos paralelos, separados por una distancia  $a = 10$  cm, llevan corrientes en la misma dirección. Si  $I_1 = 5$  A e  $I_2 = 8$  A, ¿cuál es la fuerza por unidad de longitud sobre cada alambre debida al otro?
16. Para el arreglo de conductores paralelos descrito en el problema 15 y mostrado en la figura 30.41, calcule la magnitud y la dirección del campo magnético en el punto  $P$  localizado 2 cm a la izquierda del conductor con corriente  $I_2$ .

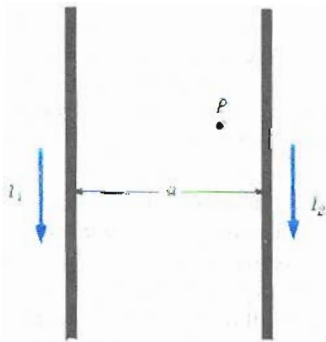


Figura 30.41 (Problemas 15 y 16).

17. Dos conductores paralelos cada uno de 5 cm de longitud llevan corrientes de 10 A en direcciones opuestas. a) ¿Qué distancia de separación entre centro y centro deberán tener si se repelen con una fuerza de 1.0 N? b) ¿Es esto físicamente posible?
18. Compute la fuerza magnética por unidad de longitud entre dos devanados adyacentes de un solenoide si cada uno lleva corriente de 100 A y la distancia de centro a centro de los alambres es de 4 mm.
19. Para el arreglo de la figura 30.42, la corriente en el conductor largo y recto es de  $I_1 = 5$  A y está colocado en el mismo plano de la espira rectangular, la cual lleva una corriente  $I_2 = 10$  A. Las dimensiones son  $c = 0.1$  m,  $a = 0.15$  m y  $\ell = 0.45$  m. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza total ejercida sobre la espira rectangular por el campo magnético del conductor recto que lleva corriente.

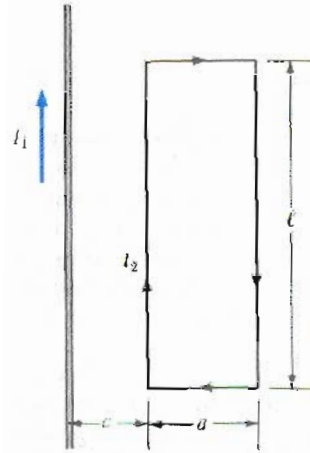


Figura 30.42 (Problema 19).

20. Cuatro conductores largos y paralelos llevan la misma corriente de 5 A. Una vista del extremo de los conductores se muestra en la figura 30.43. La dirección de la corriente es hacia afuera de la página en los puntos  $A$  y  $B$  (indicados por puntos) y hacia adentro de la página en los puntos  $C$  y  $D$  (indicados por cruces). Calcule la magnitud y la dirección del campo en el punto  $P$ , localizado en el centro del cuadrado de lado 0.2 m.

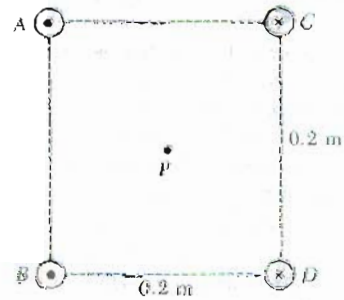


Figura 30.43 (Problema 20).

21. Dos conductores largos paralelos llevan corrientes  $I_1 = 3$  A e  $I_2 = 3$  A, ambas dirigidas hacia el interior de la página, figura 30.44. Los conductores están separados por una distancia de 13 cm. Determine la magnitud y la dirección del campo magnético resultante en el punto  $P$ , localizado a 5 cm desde  $I_1$  y a 12 cm desde  $I_2$ .

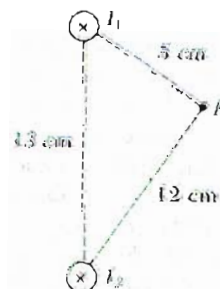


Figura 30.44 (Problema 21).

### Sección 30.3 Ley de Ampère y Sección 30.4 Campo magnético de un solenoide

22. Un solenoide cuyas espiras se han devanado estrechamente sobre 30 cm de longitud tiene un campo magnético en su centro  $B = 5 \times 10^{-4}$  T debido a una corriente  $I = 1$  A. ¿Cuántas vueltas de alambre tiene el solenoide?
23. Se está diseñando un solenoide superconductor para generar un campo magnético de 10 T. a) Si el devanado del solenoide tiene 2000 vueltas/metro, ¿qué corriente se requiere? b) ¿Qué fuerza por unidad de longitud se ejerce sobre el devanado de alambre por este campo magnético?
24. ¿Qué corriente se requiere en el devanado de un solenoide que tiene 1000 vueltas uniformemente distribuidas sobre una longitud de 0.4 m para producir un campo magnético de magnitud  $1.0 \times 10^{-4}$  T en el centro del solenoide?
25. Algunas aleaciones superconductoras a muy bajas temperaturas pueden llevar corrientes muy altas. Por ejemplo, alambre de  $Nb_3Sn$  a 10 K puede llevar  $10^3$  A y mantener su superconductividad. Determine el máximo campo  $B$  que puede ser alcanzado en un solenoide de 25 cm de longitud si 1000 vueltas de alambre de  $Nb_3Sn$  se devanan en la superficie exterior.
26. Un devanado toroidal (Fig. 30.11) tiene un total de 400 vueltas sobre un núcleo de radio interior  $a = 4$  cm y radio exterior  $b = 6$  cm. Calcule la magnitud del campo magnético en un punto medio entre la pared interna y externa del núcleo cuando existe una corriente de 0.5 A mantenida en el devanado.
27. Las bobinas magnéticas del reactor de fusión de Tokamak tienen la forma de un toroide con radio interno de 0.7 m y radio externo de 1.3 m. En el interior del toroide está el plasma. Si el toroide tiene 900 vueltas de un alambre de gran diámetro, el cual transporta una corriente de 14 000 A, encuentre la intensidad de campo magnético a lo largo de: a) el radio interno del toroide y b) el radio externo del toroide.
28. Un conductor cilíndrico de radio  $R = 2.5$  cm lleva una corriente  $I = 2.5$  A a lo largo de su longitud, esta corriente está uniformemente distribuida a través del área de la sección transversal del conductor. Calcule el campo magnético en el punto medio a lo largo del radio del conductor (es decir, en  $r = R/2$ ).
29. Para el conductor descrito en el problema 28, encuentre la distancia a partir de la superficie del conductor para la cual la magnitud del campo magnético tiene el mismo valor que tiene la magnitud del campo para  $r = R/2$ .
30. El metal niobio se convierte en superconductor (cuando la resistencia eléctrica es igual a cero) cuando se enfría hasta 9 K. Si la superconductividad se destruye cuando el campo magnético superficial excede 0.1 T, determine la magnitud de la corriente máxima que un alambre de 2 mm de diámetro de niobio puede transportar permaneciendo como superconductor.
31. Un paquete compacto de 100 alambres rectos largos y aislados forman un cilindro de radio  $R = 0.5$  cm. a) Si cada alambre lleva una corriente de 2 A, ¿cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre un alambre localizado a 2 cm

del centro del paquete? b) Sería mayor o menor la fuerza que experimenta un alambre externo del paquete comparada con la de un alambre que estuviera a 2 cm del centro?

32. Considere un arreglo coaxial con un alambre de radio  $a$  a lo largo del eje de un cascarón cilíndrico de radio  $b$ , como en la figura 30.45. La corriente está dirigida hacia adentro de la página a lo largo del centro del alambre y regresa hacia afuera de la página a lo largo del cascarón cilíndrico. Si  $I = 5$  A,  $a = 0.6$  cm y  $b = 1.2$  cm, calcule el campo magnético: a) en el punto  $P_1$  a una distancia  $r_1 = 1$  cm y b) en el punto  $P_2$ , a una distancia  $r_2 = 2.4$  cm del centro del alambre.

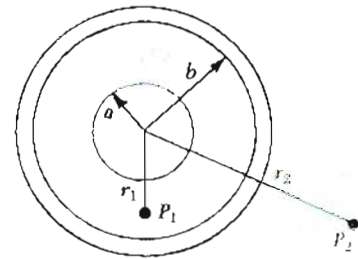


Figura 30.45 (Problema 32).

### \*Sección 30.5 Campo magnético a lo largo del eje de un solenoide

33. Un solenoide corto, con una longitud de 10 cm y radio de 5 cm, consta de 200 vueltas de un alambre delgado que lleva una corriente de 15 A. ¿Cuál es la fuerza de campo  $B$  en el centro del solenoide? Para el mismo número de vueltas por unidad de longitud, ¿cuál es el valor de  $B$  que resultaría para  $l \rightarrow \infty$ ?
34. Un solenoide de 900 vueltas, que lleva una corriente de 3 A, tiene una longitud de 80 cm y radio de 2.5 cm. Calcule el campo magnético a lo largo de su eje en: a) en el centro y b) en un punto cercano al extremo.
35. Un solenoide tiene 500 vueltas, una longitud de 50 cm, un radio de 5 cm y lleva una corriente de 4 A. Calcule la magnitud del campo en un punto axial, a una distancia de 15 cm del centro (es decir, a 10 cm de uno de sus extremos).

### Sección 30.6 Flujo magnético

36. Un toroide está construido de  $N$  vueltas rectangulares de alambre. Cada vuelta tiene una altura  $h$ . El toroide tiene un radio interno  $a$  y un radio externo  $b$ . a) Si el toroide lleva una corriente  $I$ , demuestre que el flujo magnético a través de las vueltas del toroide es proporcional al  $\ln(b/a)$ . b) Evalúe este flujo si  $N = 200$  vueltas,  $h = 1.5$  cm,  $a = 2$  cm,  $b = 5$  cm e  $I = 2$  A.
37. Un cubo de lado  $\ell = 2.5$  cm está colocado como se muestra en la figura 30.46. Existe un campo magnético uniforme a través de esta región dado por la expresión  $\mathbf{B} = (5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$  T. a) Calcule el flujo a través de la cara sombreada del cubo. b) ¿Cuál es el flujo total a través de las seis caras del cubo?



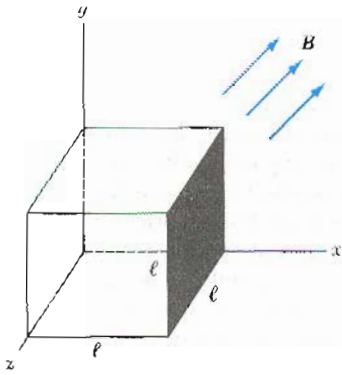


Figura 30.46 (Problema 37).

38. Un solenoide de 2.5 cm de diámetro y 30 cm de longitud tiene 300 vueltas y lleva una corriente de 12 A. Calcule el flujo a través de la superficie de un disco de 5 cm de radio que está posicionado de forma perpendicular y centrado al eje del solenoide, como en la figura 30.47.

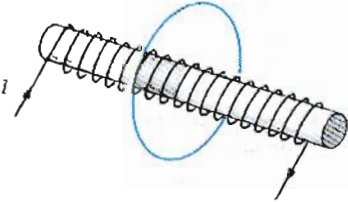


Figura 30.47 (Problema 38).

39. La figura 30.48 muestra una vista del extremo del solenoide descrito en el problema 38. Calcule el flujo a través del área azul definida por un anillo cuyo radio interno es 0.4 cm y radio externo es 0.8 cm.

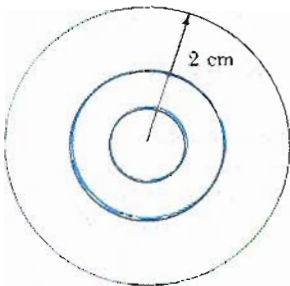


Figura 30.48 (Problema 39).

40. Una espira circular de alambre de radio  $R$  se coloca en un campo magnético uniforme  $B$  y entonces se impulsa para que gire con una velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje a través de su diámetro. Determine el flujo magnético a través de la espira como función del tiempo si el eje de rotación está: a) perpendicular a  $B$  y b) paralelo a  $B$ .

**Sección 30.8 Corriente de desplazamiento y ley de Ampère generalizada**

41. El voltaje aplicado a través de las placas de un capacitor de  $4 \mu\text{F}$  varía con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$V_{ap} = (8 \text{ V})(1 - e^{-t/4})$$

donde  $t$  está en s. Calcule: a) la corriente de desplazamiento como función del tiempo y b) el valor de la corriente para  $t = 4 \text{ s}$ .

42. Un capacitor de capacitancia  $C$  tiene una carga  $Q$  para  $t = 0$ . En este instante, una resistencia de resistencia  $R$  se conecta a las placas del capacitor cargado. a) Encuentre la corriente de desplazamiento en el dieléctrico entre las placas del capacitor como una función del tiempo. b) Evalúe esta corriente de desplazamiento para el tiempo  $t = 0.1 \text{ s}$ , si  $C = 2 \mu\text{F}$ ,  $Q = 20 \mu\text{C}$  y  $R = 500 \text{ k}\Omega$ . c) ¿Cuál es la rapidez del cambio del flujo eléctrico entre las placas del capacitor al cambiar a  $t = 0.1 \text{ s}$ ?
43. Una corriente de 0.1 A está cargando un capacitor con placas cuadradas de 5 cm de lado. Si la separación de las placas es de 4 mm, encuentre: a) la rapidez del cambio de flujo eléctrico  $\frac{d\Phi_E}{dt}$  entre las placas y b) la corriente de desplazamiento  $I_d$  entre las placas.
44. Una corriente de 0.2 A está cargando un capacitor con placas circulares de 10 cm de radio. Si la separación de las placas es de 4 mm, a) ¿cuál es la rapidez de incremento de campo eléctrico  $dE/dt$  entre las placas? b) ¿Cuál es el campo magnético entre las placas para un radio de 5 cm del centro?

**Sección 30.9 Magnetismo en la materia**

45. ¿Cuál es la permeabilidad relativa de los materiales que tienen una susceptibilidad magnética de  $10^{-4}$ ?
46. El núcleo de hierro de un toroide está devanado con 250 vueltas de alambre por metro de su longitud. La corriente en el devanado es de 8 A. Tomando la permeabilidad magnética del hierro como  $k_m = 5000\mu_0$ , calcule: a) la intensidad del campo magnético,  $H$  y b) la densidad de flujo magnético,  $B$ .
47. Un devanado toroidal con radio medio de 20 cm y 630 vueltas (como en la figura 30.30) se llena con material acerado cuya susceptibilidad  $\chi$  es 100. Si la corriente en el devanado es de 3 A, encuentre  $B$  (suponiéndolo uniforme) dentro del toroide.
48. Un toroide tiene un radio promedio de 9 cm. La corriente en la bobina es de 0.5 A. ¿Cuántas vueltas se requieren para producir una intensidad de campo magnético de  $700 \text{ A} \cdot \text{vuelta/m}$  en el interior del toroide?
49. Un campo magnético de densidad de flujo 1.3 T debe estar en el interior del núcleo de hierro de un toroide. El toroide tiene un radio promedio de 10 cm y permeabilidad magnética de  $5000\mu_0$ . ¿Cuál es la corriente requerida si existen 470 vueltas de alambre en el devanado?
50. Un solenoide toroidal tiene un radio promedio de 10 cm y una área de sección trasversal de  $1 \text{ cm}^2$ . Existen 400 vueltas de alambre sobre un núcleo de hierro suave, cuya permeabilidad es de  $800\mu_0$ . Calcule la corriente necesaria para producir un flujo magnético de  $5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  a través de la sección trasversal del núcleo.
51. Una bobina de 500 vueltas se construye en un anillo de hierro ( $\kappa_m = 750\mu_0$ ) de 20 cm de radio promedio y  $8 \text{ cm}^2$  de área de sección trasversal. Calcule el flujo magnético

$\Phi$  en este anillo de Rowland cuando la corriente en la bobina es de 0.5 A.

52. Demuestre que el producto de la intensidad del campo magnético  $H$  y la densidad de flujo magnético  $B$  tiene unidades en el SI de  $J/m^3$ .
53. En el texto, se encontró que una descripción alternativa para el campo magnético  $B$  en términos de la intensidad de campo magnético  $H$  y la magnetización  $M$  es  $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ . Relacione la susceptibilidad magnética  $\chi$  para  $|H|$  y  $|M|$  para materiales paramagnéticos y diamagnéticos.
54. Calcule la intensidad del campo magnético  $H$  de una sustancia magnetizada caracterizada por una magnetización de  $0.88 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{vuelta/m}$  y un campo magnético de densidad de flujo de 4.4 T. (Sugerencia: véase el problema 53.)
55. Un cilindro de hierro magnetizado tiene un campo magnético  $B = 0.04 \text{ T}$  en su interior. El magneto tiene 3 cm de diámetro y 20 cm de longitud. Si el mismo campo magnético debe ser producido por una corriente llevada por un solenoide de núcleo de aire que tiene las mismas dimensiones que el magneto cilíndrico, ¿cuántas vueltas de alambre debe tener el solenoide?
56. En el modelo de Bohr de 1913 del átomo de hidrógeno, el electrón está en una órbita circular de radio  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ , y su rapidez es de  $2.2 \times 10^6 \text{ m/s}$ . a) ¿Cuál es la magnitud del momento magnético debido al movimiento del electrón? b) Si la órbita del electrón es un círculo horizontal que se recorre en la dirección de las manecillas del reloj, ¿cuál es la dirección del vector momento magnético?
57. En la saturación, el alineamiento de los espines en el hierro puede contribuir cuando mucho en 2 T al campo magnético total  $B$ . Si cada electrón contribuye con un momento magnético  $9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$  (un magnetón de Bohr), ¿cuántos electrones por átomo contribuyen a la saturación del campo del hierro? (Sugerencia: existen  $8.5 \times 10^{28}$  átomos de hierro/ $\text{m}^3$ .)

### \*Sección 30.10 Magnetismo de la Tierra

58. Una bobina circular de 5 vueltas y diámetro de 30 cm está orientada en el plano vertical con su eje perpendicular a la componente horizontal del campo magnético terrestre. Una brújula horizontal colocada en el centro de la bobina está desviada  $45^\circ$  del norte magnético por una corriente de 0.60 A en la bobina. Si la aguja de "inclinación" de la brújula orientada en un plano vertical norte-sur hace un ángulo de  $13^\circ$  con la vertical, ¿cuál es la intensidad total del campo magnético terrestre en ese lugar?
59. El momento magnético de la Tierra es de aproximadamente  $8.7 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . a) Si esto fuera causado por la magnetización completa de un enorme depósito de hierro, ¿a cuántos electrones sin pareja correspondería esto? b) Para 2 electrones sin pareja por átomo de hierro, ¿a cuántos kilogramos de hierro correspondería esto? (La densidad del hierro es  $7900 \text{ kg/m}^3$  y existen aproximadamente  $8.5 \times 10^{28}$  átomos de hierro/ $\text{m}^3$ .)

### PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

60. Un relámpago puede llevar una corriente de  $10^4 \text{ A}$  por un corto periodo de tiempo. ¿Cuál es el campo magnético resultante en un punto a 100 m del relámpago?
61. Medidas del campo magnético en un gran tornado fueron realizadas en el Observatorio Geofísico en Tulsa, Oklahoma, en 1962. Si el campo del tornado fue  $B = 1.5 \times 10^{-8} \text{ T}$  apuntando hacia el norte cuando el tornado estaba a 9 km al este del observatorio, ¿qué corriente llevaba de arriba a abajo el embudo del tornado?
62. En el acelerador Fermilab, en Weston, Illinois, protones con momentos de  $4.8 \times 10^{-16} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  son confinados en trayectorias circulares de radio de 1 km por un campo magnético dirigido hacia arriba. ¿Cuál es el campo magnético  $B$  que debe ser utilizado para mantener los protones en sus órbitas?
63. Dos largos conductores paralelos están llevando corrientes en la misma dirección como en la figura 30.49. El conductor A lleva una corriente de 150 A y está fijado firmemente a su posición. El conductor B lleva una corriente  $I_B$  y puede moverse con libertad hacia arriba o hacia abajo (paralelo a A) entre las guías no conductoras. Si la densidad lineal del conductor B es de 0.10 g/cm, ¿cuál es el valor de la corriente  $I_B$  que daría por resultado el equilibrio cuando la distancia entre los conductores es de 2.5 cm?

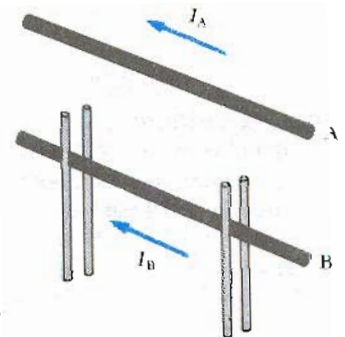


Figura 30.49 (Problema 63).

64. Dos conductores paralelos llevan corriente en direcciones opuestas como se muestra en la figura 30.50. Un conductor lleva una corriente de 10 A. El punto A está a la mitad de la distancia entre los alambres y el punto

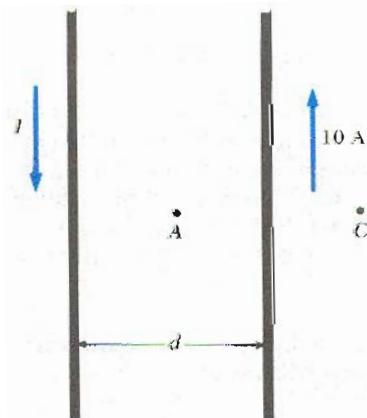


Figura 30.50 (Problema 64).

$C$  está a una distancia  $d/2$  a la derecha de la corriente de 10 A. Si  $d = 18$  cm e  $I$  se ajusta de tal manera que el campo magnético en  $C$  sea cero, encuentre: a) el valor de  $I$  y b) el valor del campo magnético en  $A$ .

65. Una lámina de metal delgada y larga de ancho  $w$  lleva una corriente  $I$  a lo largo de su longitud como en la figura 30.51. Encuentre el campo magnético en el plano de la lámina (en un punto externo  $P$ ) a una distancia  $b$  de uno de sus extremos.

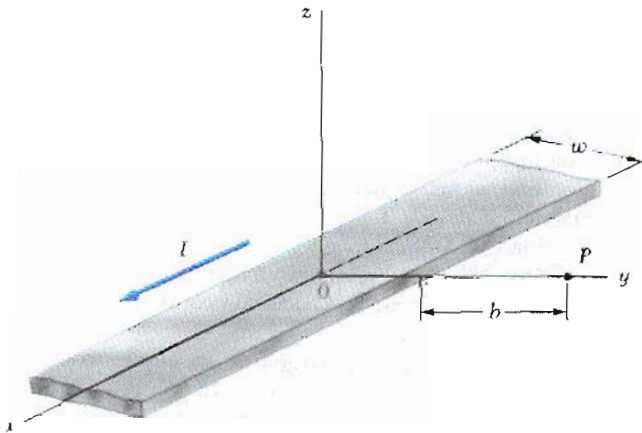


Figura 30.51 (Problema 65).

66. Una banda larga no conductora con una densidad de carga superficial  $\sigma$  se mueve con una velocidad  $v$  sobre un conjunto de rodillos como se muestra en la figura 30.52. Considere un punto precisamente arriba de la superficie de la banda en movimiento. a) Encuentre una expresión para la magnitud del campo magnético  $B$  en ese punto. b) Si la banda está cargada positivamente, ¿cuál es la dirección de  $B$ ? (Note que la banda puede ser considerada como una placa infinita.)

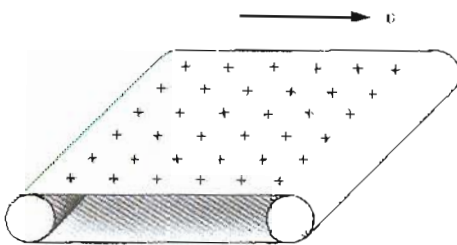


Figura 30.52 (Problema 66).

67. Un alambre recto localizado en el ecuador está orientado paralelo a la Tierra en la dirección este-oeste. El campo magnético de la Tierra en ese punto es horizontal y tiene una magnitud de  $3.3 \times 10^{-5}$  T. Si la masa por unidad de longitud del alambre es  $2 \times 10^{-3}$  kg/m, ¿qué corriente debe llevar el alambre de tal manera que la fuerza magnética balancee el peso del alambre?

68. El campo magnético de la Tierra cerca del polo es de unos  $0.7$  G =  $7 \times 10^{-5}$  T. Utilizando un modelo en el cual se suponga que este campo se produce por una espira de corriente alrededor del ecuador, determine la corriente que generaría dicho campo. ( $R_1 = 6.37 \times 10^6$  m.)

69. Un anillo no conductor de radio  $R$  está uniformemente cargado con una carga total positiva  $q$ . El anillo gira con una velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje a través de su centro, perpendicular al plano del anillo. Si  $R = 0.1$  m,  $q = 10 \mu\text{C}$  y  $\omega = 20$  rad/s, ¿cuál es el campo magnético resultante en el eje del anillo a una distancia de  $0.05$  m de su centro?

70. Considere un disco delgado de radio  $R$  montado de tal manera que gira alrededor del eje  $x$  en el plano  $yz$ . El disco tiene una densidad de carga superficial uniforme  $\sigma$  y una velocidad angular  $\omega$ . Demuestre que el campo magnético en el centro del disco está dado por  $B = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R$ .

71. Dos bobinas circulares de radio  $R$  están perpendiculares a un eje común. Las bobinas centradas están apartadas una distancia  $R$  y una corriente constante  $I$  fluye en la misma dirección de cada bobina como se muestra en la figura 30.53. a) Demuestre que el campo magnético sobre el eje a una distancia  $x$  del centro de una de las bobinas es

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[ \frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(2R^2 + x^2 - 2Rx)^{3/2}} \right]$$

- b) Demuestre que  $dB/dx$  y  $d^2B/dx^2$  ambas son cero en el punto medio entre las bobinas. Esto significa que el campo magnético en la región media entre las bobinas es uniforme. Esta configuración de bobinas se llama bobinas de Helmholtz.

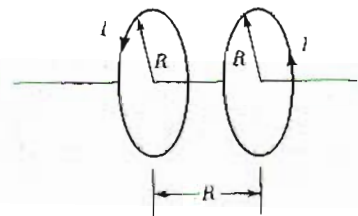


Figura 30.53 (Problema 71).

72. Dos bobinas circulares idénticas, delgadas de alambre tienen cada una 100 vueltas y un radio de  $0.50$  m. Si estas bobinas se colocan como bobinas de Helmholtz y cada una lleva una corriente de  $10$  A, determine la magnitud del campo magnético en el punto medio entre las bobinas sobre el eje de éstas. (Véase la figura 30.53).

73. Un conductor cilíndrico largo de radio  $R$  lleva una corriente  $I$  como en la figura 30.54. Sin embargo, la densidad de corriente  $J$  no es uniforme sobre la sección transversal del conductor pero está en función del radio de acuerdo con la expresión  $J = br$ , donde  $b$  es una constante. Encuentre una expresión para la magnitud

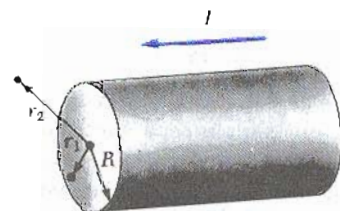


Figura 30.54 (Problema 73).

del campo magnético  $B$ : a) a una distancia  $r_1 < R$  y b) a una distancia  $r_2 > R$ , medidas desde el eje.

74. La figura 30.55 muestra la sección transversal de un cilindro no conductor que tiene  $N$  alambres paralelos al eje del cilindro uniformemente espaciados alrededor de la superficie curvada. El cilindro tiene un radio  $R$  y la corriente en cada conductor es  $I$  y está dirigida hacia afuera del plano de la figura. Suponiendo que  $N$  es un número muy grande y que el radio de cada alambre es muy pequeño comparado con el radio del cilindro, encuentre una expresión para el campo magnético  $B$ : a) en  $r_1 < R$  y b) en  $r_2 > R$ . c) Obtenga el valor numérico para  $B$  cuando  $N = 100$ ,  $R = 5$  cm,  $I = 10$  A y  $r_2 = 15$  cm.

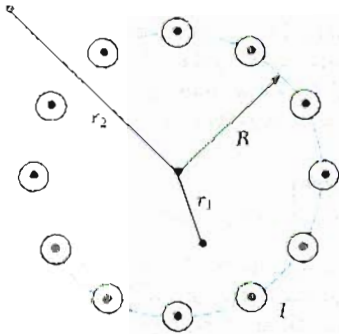


Figura 30.55 (Problema 74).

75. Una corriente  $I$  fluye a través de una trayectoria cerrada en el plano horizontal del circuito cerrado de la figura 30.56. La trayectoria consta de seis arcos con radios alternativos  $r_1$  y  $r_2$  conectados por segmentos radiales. Cada segmento de arco sustenta un ángulo de  $60^\circ$  con un centro común  $P$ , con  $r_2/r_1 = 2/3$ . Esta trayectoria produce un campo magnético  $B$  en el punto  $P$ . Si la trayectoria se modifica para que la razón  $r_2/r_1 = 1/3$ , ¿por qué factor deberá multiplicarse la corriente  $I$  para que el campo en  $P$  sea el mismo?

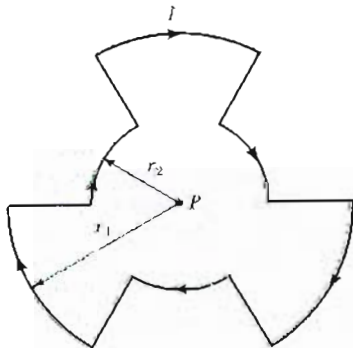


Figura 30.56 (Problema 75).

76. Un alambre de 4 m de longitud y 2 mm de diámetro se devana en una simple capa alrededor de un cilindro hueco de radio 2 cm. Cada vuelta se pone en contacto con la siguiente. (Suponga que las vueltas que están en contacto están aisladas eléctricamente una de la otra, pero desprecie el espesor de la capa aislante.) Una corriente estable de 11 A se mantiene en el alambre. a)

Calcule el valor del campo magnético en el centro del solenoide. b) ¿Cuál sería su respuesta en el inciso a si se utiliza la misma longitud total de alambre para hacer un devanado de una sola capa en un solenoide de radio de 1 cm?

77. Un devanado toroidal se llena con una sustancia magnética y lleva una corriente estable de 2 A. La bobina consta de 1505 vueltas, tiene un radio promedio de 4 cm y el núcleo tiene un área de sección transversal de  $1.21$  cm<sup>2</sup>. El flujo magnético total medido a través de la sección transversal del toroide es  $3 \times 10^{-5}$  Wb. Se supone que la densidad de flujo es constante. a) ¿Cuál es la intensidad del campo magnético  $H$  en el interior del núcleo? b) Determine la permeabilidad del material del núcleo.

78. Una sustancia paramagnética alcanza 10% de su saturación en magnetización cuando se coloca en un campo magnético de 5.0 T a una temperatura de 4.0 K. La densidad de átomos magnéticos en la muestra es  $8 \times 10^{27}$  átomos/m<sup>3</sup> y el momento magnético por átomo es 5 magnetones de Bohr. Calcule la constante de Curie para esta sustancia.

79. La densidad de un espécimen de un supuesto nuevo elemento se determina como de 4.15 g/cm<sup>3</sup>. La saturación en magnetismo para este material se encuentra que debe ser  $7.6 \times 10^4$  A/m, y el momento magnético atómico medido es de 1.2 magnetones de Bohr. Calcule el valor esperado del peso atómico del elemento basado en estos valores.

80. La fuerza sobre un dipolo magnético  $M$  alineado con un campo magnético no uniforme en la dirección  $x$  está dada por  $F_x = M \frac{dB}{dx}$ . Suponga que 2 espiras de alambre delgadas tienen cada una un radio  $R$  y llevan una corriente  $I$ . Si las espiras se acomodan coaxialmente y están separadas por una gran distancia variable  $x$ , demuestre que la fuerza magnética entre ellas varía como  $1/x^4$ . b) Evalúe la magnitud de esta fuerza si  $I = 10$  A,  $R = 0.5$  cm y  $x = 5.0$  cm.

81. Un alambre se conforma dentro de una forma cuadrada de longitud de lado  $L$  (Fig. 30.57). Demuestre que cuando la corriente en la espira es  $I$ , el campo magnético en el punto  $P$  a una distancia  $x$  del centro del cuadro a lo largo de su eje está dado por

$$B = \frac{\mu_0 I L^2}{2\pi \left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right) \sqrt{x^2 + \frac{L^2}{2}}}$$

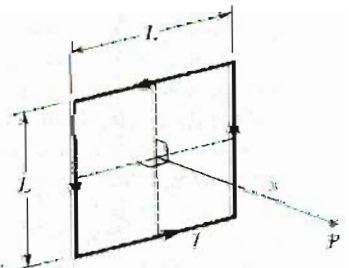


Figura 30.57 (Problema 81).

82. Un alambre se dobla para darle la forma que se ve en la figura 30.58a, y se mide el campo magnético en  $P_1$

cuando la corriente en el alambre es  $I$ . El mismo alambre ahora se dobla para darle la forma que aparece en la figura 30.58b y se mide el campo magnético en el punto  $P_2$  cuando la corriente es nuevamente  $I$ . Si la longitud total del alambre es la misma en cada caso, ¿cuál es la razón de  $B_1/B_2$ ?

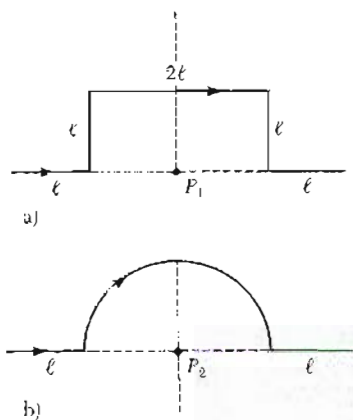


Figura 30.58 (Problema 82).

83. Un alambre que lleva una corriente  $I$  se dobla para darle la forma de una espiral exponencial,  $r = e^\theta$ , donde  $\theta = 0$  para  $\theta = 2\pi$  como en la figura 30.59. Para completar la espira, los extremos de la espira se conectan por un alambre recto a lo largo del eje  $x$ . Encuentre la magnitud

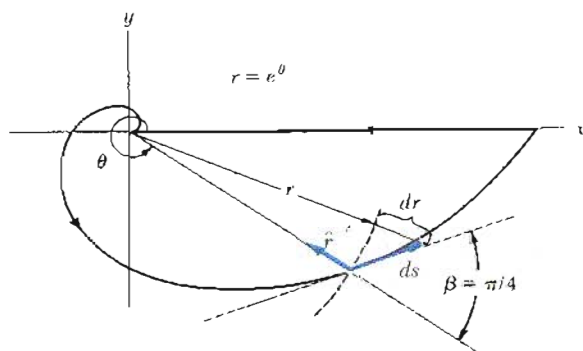


Figura 30.59 (Problema 83).

y la dirección de  $B$  en el origen. (Sugerencias: utilice la ley de Biot-Savart. El ángulo  $\beta$  entre la línea radial y la línea tangencial en cualquier punto de la curva  $r = f(\theta)$  está relacionado con la función de la siguiente forma

$$\tan \beta = \frac{r}{dr/d\theta}$$

En este caso  $r = e^\theta$ , entonces  $\tan \beta = 1$  y  $\beta = \pi/4$ . Por lo tanto, el ángulo entre  $ds$  y  $\hat{r}$  es  $\pi - \beta = 3\pi/4$ . Así que

$$ds = \frac{dr}{\sin \pi/4} = \sqrt{2} dr$$

84. Un conductor cilíndrico largo de radio  $a$  tiene dos cavidades de diámetro  $a$  a través de toda su longitud, como se muestra en la figura 30.60. Una corriente  $I$ , dirigida hacia afuera de la página, es uniforme a través de la sección transversal del conductor. Determine la dirección y la magnitud del campo magnético en el punto  $P_1$  en términos de  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $r$  y  $a$ .

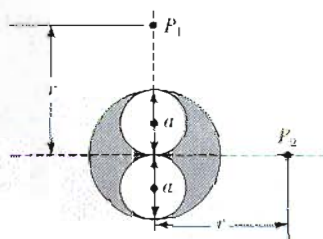


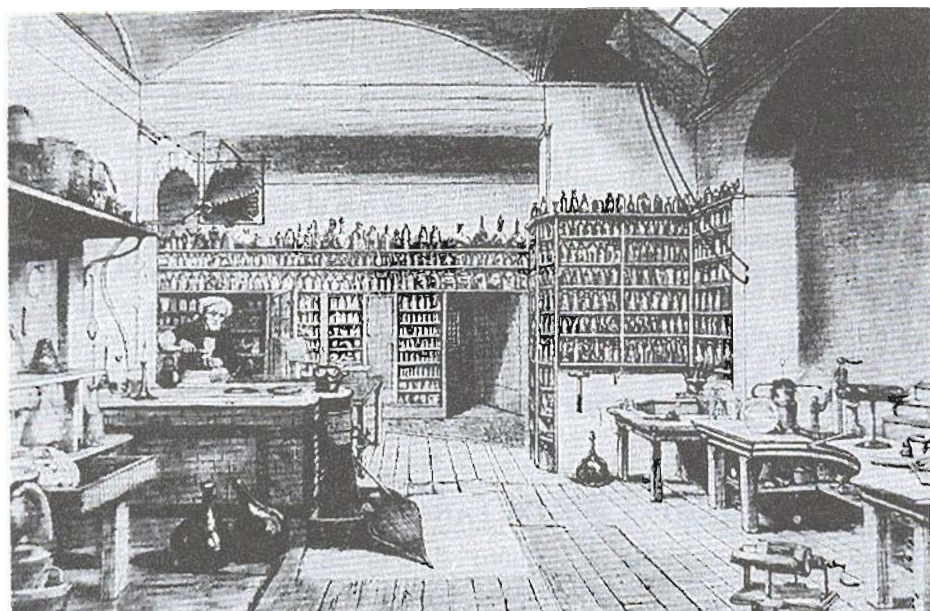
Figura 30.60 (Problemas 84 y 85).

85. Dado el mismo conductor descrito en el problema 84, encuentre la magnitud y la dirección del campo magnético en el punto  $P_2$  que se muestra en la figura 30.60 en términos de  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $r$  y  $a$ .

**PROBLEMAS PARA CALCULADORA/COMPUTADORA**

86. Considere una espira plana de corriente de radio  $R$  llevando una corriente  $I$ . Elija el eje  $x$  a lo largo del eje de la espira con el origen en el centro de la espira. Trace la gráfica de la relación de la magnitud del campo magnético en la coordenada  $x$  a la de la magnitud en el origen, desde  $x = 0$  hasta  $x = 5R$ . Una calculadora programable o una pequeña computadora pueden ser útiles en este problema.

## Ley de Faraday



*Michael Faraday en su laboratorio en el Royal Institute, Londres, en 1860. (Cortesía del Archivo de Bettmann)*

Nuestro estudio ha estado relacionado con campos eléctricos debidos a cargas estacionarias y campos magnéticos producidos por cargas en movimiento. En este capítulo se tratarán campos eléctricos originados por campos magnéticos variables.

Los experimentos llevados a cabo por Michael Faraday en Inglaterra en 1831 e independientemente por Joseph Henry en los Estados Unidos en el mismo año, demostraron que una corriente eléctrica podría ser inducida en un circuito por un campo magnético variable. Los resultados de estos experimentos produjeron una muy básica e importante ley del electromagnetismo conocida como *ley de inducción de Faraday*. Esta ley dice que la magnitud de la fem inducida en un circuito es igual a la razón de cambio del flujo magnético a través del circuito.

Como se verá, la fem inducida puede producirse de varias formas. Por ejemplo, una fem inducida y una corriente inducida pueden producirse en una espira de alambre cerrada cuando el alambre se mueve dentro de un campo magnético. Se describirán tales experimentos junto con un importante número de aplicaciones que hacen uso del fenómeno de inducción electromagnética.

Con el estudio de la ley de Faraday, se completa la introducción a las leyes fundamentales del electromagnetismo. Estas leyes pueden resumirse en un conjunto de cuatro ecuaciones llamadas *ecuaciones de Maxwell*. Junto con la ley de la fuerza de Lorentz, la cual se abordará brevemente, representan una teoría completa para la descripción de las interacciones de objetos cargados. Las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes fundamentales, es decir, las cargas eléctricas.



## Bosquejo biográfico

**Joseph Henry**  
(1797-1878)

Joseph Henry, físico americano quien realizó los primeros experimentos de inducción eléctrica, nació en Albany, Nueva York, en 1797. Hijo de un obrero, Henry tuvo poca escuela y se vio forzado a trabajar desde muy temprana edad. Después de estudiar medicina en la Academia de Albany y más tarde ingeniería. Henry fue profesor de matemáticas y de Física en 1826. Más tarde es profesor de filosofía natural en el Colegio de Nueva Jersey (ahora Princeton University).

En 1848, llega a ser el primer director del Instituto Smithsonian, donde introduce un sistema de predicción climatológica basado en información meteorológica recibida por el telégrafo eléctrico. Fue también el primer presidente de la Academia de Ciencias Naturales, posición que mantuvo hasta su muerte en 1878.

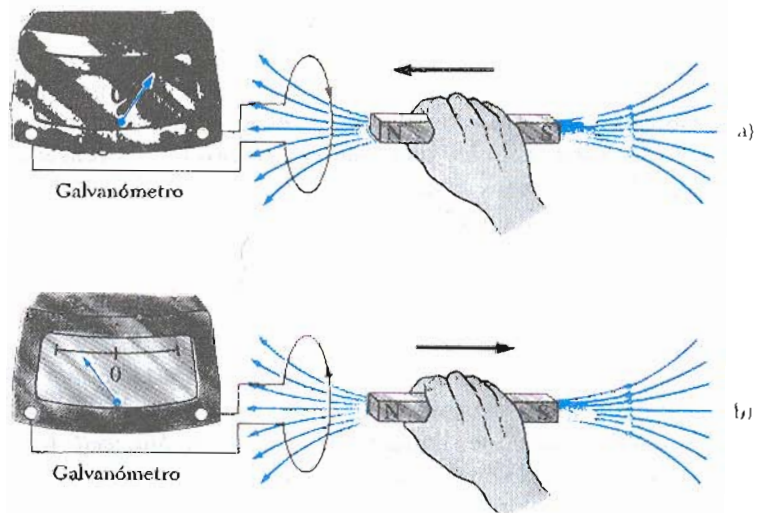
Muchos de los experimentos de Henry fueron con electromagnetismo. Improvisó el electroimán de William Sturgeon y construyó uno de los primeros motores electromagnéticos. En 1830, Henry hace un poderoso electroimán utilizando muchas vueltas de alambre delgado aislado alrededor de un núcleo de acero. Descubrió el fenómeno de autoinducción pero tardó en publicarlo, por lo que el crédito fue dado a Michael Faraday.

Las contribuciones de Henry a la ciencia fueron al fin reconocidas: en 1893 la unidad de inductancia fue llamada el henry.

(Cortesía de AIP, Biblioteca Niels Bohr, Colección de E. Scott Barr)

### 31.1 LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

Se principiará describiendo dos experimentos sencillos que demuestran que una corriente puede ser producida por un campo magnético cambiante. Primero, considérese una espira de alambre conectada a un galvanómetro como en la figura 31.1. Si un imán se mueve hacia la espira, la aguja del galvanómetro se desviará en una dirección, como se muestra en la figura 31.1a. Si el imán se mueve alejándose de la espira, la aguja del galvanómetro se desviará en dirección opuesta, como en la figura 31.1b. Si el imán se mantiene estacionario en relación a la espira, no se observará desviación. Finalmente, si el imán permanece estacionario y la espira se mueve acercándola y alejándola del imán, la aguja del



**Figura 31.1** a) Cuando el imán se mueve hacia la espira de alambre conectada a un galvanómetro, éste se desvía como se muestra. Esto demuestra que una corriente es inducida en la espira. b) Cuando el imán se mueve alejándose de la espira, el galvanómetro se desvía en dirección opuesta, indicando que la corriente inducida es opuesta a la mostrada en la parte a.

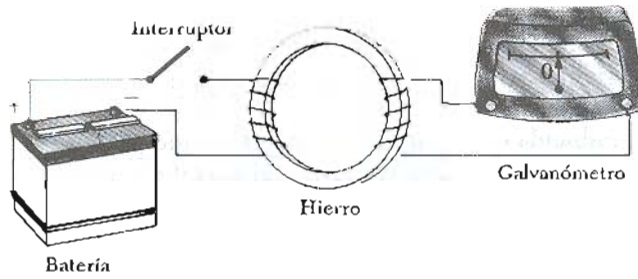


Figura 31.2 Experimento de Faraday. Cuando el interruptor en el circuito primario, a la izquierda, se cierra, el galvanómetro en el circuito secundario, a la derecha, se desvía momentáneamente. La fem inducida en el secundario es producida por el campo magnético variable a través de la bobina en este circuito.

galvanómetro también se deflejará. A partir de estas observaciones, se puede concluir que *siempre que exista un movimiento relativo entre el imán y el circuito de la espira se generará una corriente en el circuito.*<sup>1</sup>

Estos resultados son muy importantes en vista del hecho de que *se crea una corriente en el circuito ¡aun cuando no exista batería en el circuito!* Esta corriente se denominó *corriente inducida*, la cual se produce por una *fem inducida*.

Ahora se describirá un experimento, realizado por primera vez por Faraday, el cual se representa en la figura 31.2. Parte del aparato consta de una bobina conectada a una batería y a un interruptor. Se hará referencia a esta bobina como la *bobina primaria* y a su correspondiente circuito como circuito primario. La bobina se devana alrededor de un anillo (núcleo) de hierro para intensificar el campo producido por la corriente a través de la bobina. Una segunda bobina a la derecha, también se devana alrededor del anillo de hierro y se conecta a un galvanómetro. Se hará referencia a ésta como *bobina secundaria* y a su correspondiente circuito como circuito secundario. No existe batería en el circuito secundario y la bobina secundaria no está conectada con la bobina primaria. El único propósito de este circuito es detectar cualquier corriente que pueda ser producida por un cambio en el campo magnético.

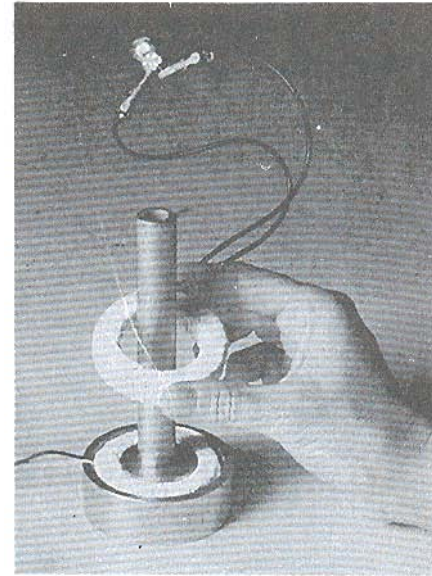
La primera impresión que se puede tener es que no debería de detectar ninguna corriente en el circuito secundario. Sin embargo, algo sucede cuando de repente se abre y se cierra el interruptor. En el instante que se cierra el interruptor en el circuito primario, el galvanómetro en el circuito secundario se desvía en una dirección y luego regresa a cero. Cuando se abre el interruptor, el galvanómetro se desvía en la dirección opuesta y de nuevo regresa a cero. Finalmente, el galvanómetro da una lectura de cero cuando la corriente es estable en el circuito primario.

Como resultado de estas observaciones, Faraday concluyó que *una corriente eléctrica puede ser producida por cambios en el campo magnético*. Una corriente no puede ser producida por un campo magnético estable. La corriente que se produce en el circuito secundario ocurre sólo en el instante en que el campo magnético a través de la bobina secundaria está cambiando. En efecto, el circuito secundario se comporta como si existiera una fem conectada en un corto instante. Esto se puede enunciar diciendo que:

**una fem inducida es producida en el circuito secundario por los cambios en el campo magnético.**

Estos dos experimentos tienen algo en común. En ambos casos, una fem es inducida en un circuito cuando el *flujo magnético* a través del circuito *cambia con*

<sup>1</sup> La magnitud exacta de la corriente depende en particular de la resistencia del circuito, pero la existencia de la corriente (o el signo algebraico) no.



Demostración de la inducción electromagnética. Un voltaje AC se aplica a la bobina inferior. Un voltaje es inducido en la bobina superior lo cual se indica al encenderse la lámpara conectada a la bobina superior. ¿Qué cree que le sucede a la intensidad de la lámpara a medida que la bobina superior se mueve sobre el tubo vertical? (Cortesía de CENCO)



el tiempo. En efecto, un enunciado que puede resumir tales experimentos que implican corrientes y fem inducidas es el siguiente:

**La fem inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez de cambio del flujo magnético a través del circuito.**

Este enunciado, conocido como **Ley de inducción de Faraday**, puede escribirse como:

**Ley de Faraday**

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (31.1)$$

donde  $\Phi_m$  es el flujo magnético que abarca el circuito (Sec. 30.6), el cual puede ser expresado como

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (31.2)$$

La integral dada por la ecuación 31.2 debe tomarse sobre el área limitada por el circuito. El significado del signo negativo de la ecuación 31.1 es una consecuencia de la ley de Lenz la cual será descrita en la sección 31.3. Si el circuito consta de una bobina de  $N$  espiras, todas de la misma área, y si el flujo pasa a través de todas las espiras, la fem inducida está dada por

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (31.3)$$

Supóngase que el flujo magnético es uniforme en un circuito de área  $A$  que está en un plano como el de la figura 31.3. En este caso, el flujo a través del circuito es igual a  $BA \cos \theta$ , entonces la fem inducida puede expresarse como

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} (BA \cos \theta) \quad (31.4)$$

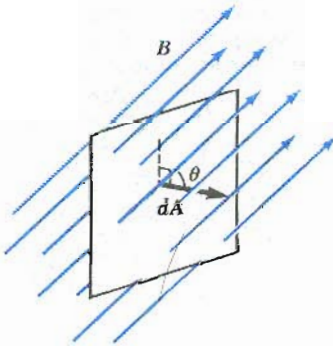


Figura 31.3 Espira conductora de área  $A$  en presencia de un campo magnético uniforme  $B$ , el cual hace un ángulo  $\theta$  con la normal a la espira.

De esta expresión, se ve que la fem puede ser inducida en el circuito de varias formas: 1) variando la magnitud de  $B$  con respecto al tiempo, 2) variando el área del circuito con respecto al tiempo, 3) cambiando el ángulo  $\theta$  entre  $B$  y la normal al plano con respecto al tiempo y 4) o bien cualquier combinación de éstas.

Los siguientes ejemplos muestran casos donde la fem es inducida en un circuito como resultado de la variación del campo magnético como función del tiempo.

**EJEMPLO 31.1 Aplicación de la ley de Faraday**

Una bobina consta de 200 vueltas de alambre enrolladas sobre el perímetro de una estructura cuadrada cuyo lado es de 18 cm. Cada vuelta tiene la misma área, igual a la de la estructura y la resistencia total de la bobina es de  $2 \Omega$ . Se aplica un campo magnético uniforme y perpendicular al plano de la bobina. Si el campo cambia linealmente desde 0 hasta  $0.5 \text{ Wb/m}^2$  en un tiempo de 8 s, encuéntrese la magnitud de la fem inducida en la bobina mientras el campo está cambiando.

**Solución** El área de la espira es  $(0.18\text{m})^2 = 0.0324 \text{ m}^2$ . El flujo magnético a través de la espira para  $t = 0$  es cero por

lo que  $B = 0$ . Para  $t = 0.8 \text{ s}$ , el flujo magnético a través de la espira es

$$\Phi_m = BA = (0.5 \text{ Wb/m}^2)(0.0324 \text{ m}^2) = 0.0162 \text{ Wb}$$

Por lo tanto, la magnitud de la fem inducida es

$$|\mathcal{E}| = \frac{N \Delta\Phi_m}{\Delta t} = \frac{200(0.0162 \text{ Wb} - 0 \text{ Wb})}{0.8 \text{ s}} = 4.05 \text{ V}$$

(Nótese que  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$ )

**Ejercicio 1** ¿Cuál es la magnitud de la corriente inducida en la bobina mientras el campo está cambiando?

**Respuesta** 2.03 A.

### EJEMPLO 31.2 Campo $B$ con decaimiento exponencial

Una espira plana de alambre de área  $A$  se coloca en una región del espacio donde el campo magnético es **perpendicular** al plano. La magnitud de  $B$  varía con el tiempo de acuerdo con la expresión  $B = B_0 e^{-at}$ . Es decir, para  $t = 0$  el campo es  $B_0$  y para  $t > 0$ , el campo decrece exponencialmente con el tiempo (Fig. 31.4). Encuéntrese la fem inducida en la espira como función del tiempo.

**Solución** Ya que  $B$  es perpendicular al plano de la espira, el flujo a través de la espira al tiempo  $t > 0$  está dado por

$$\Phi_m = BA = AB_0 e^{-at}$$

Como los coeficientes  $AB_0$  y el parámetro  $a$  son constantes, la fem inducida puede ser calculada de la ecuación 31.1:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -AB_0 \frac{d}{dt} e^{-at} = aAB_0 e^{-at}$$

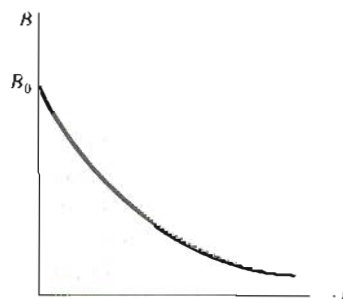


Figura 31.4 (Ejemplo 31.2) Decrecimiento exponencial del campo magnético con el tiempo. La fem inducida y la corriente inducida tienen una variación similar con el tiempo.

Es decir, la fem inducida decae exponencialmente en el tiempo. Obsérvese que la máxima fem ocurre para  $t = 0$ , donde  $\mathcal{E}_{\text{máx}} = aAB_0$ . ¿Por qué esto es cierto? La gráfica de  $\mathcal{E}$  en función del tiempo es similar a la curva de  $B$  en función del tiempo de la figura 31.4.

Michael Faraday fue un físico y químico inglés quien se distinguió por ser un gran científico experimental en los años de 1800. Dentro de sus contribuciones al estudio de la electricidad se incluyen la invención del motor eléctrico, generador eléctrico y transformador, así como el descubrimiento de la inducción electromagnética, las leyes de la electrólisis, el descubrimiento del benceno y la teoría que el plano de polarización de la luz se rota en un campo eléctrico.

Faraday nació en 1791 en el campo de Inglaterra, pero su familia se mudó a Londres cuando era pequeño. Al ser uno de los diez hijos de un herrero, Faraday recibió una mínima educación y se convirtió en aprendiz de encuadernador a los 14 años. Fue fascinándose por los artículos de electricidad y química y fue afortunado al tener un empleador que fomentó en él la lectura de libros sobre todo lo científico. Recibió alguna educación en ciencia de la City Philosophical Society.

Cuando Faraday terminó su aprendizaje en 1812, esperaba dedicarse a encuadernar libros más que a la ciencia. Ese mismo año escuchó una conferencia de Humphry Davy, quien hizo varias contribuciones en el campo del calor y la termodinámica. Faraday envió 386 páginas de notas, forradas en piel, a Davy, quien fue impresionado y apoyó a Faraday para que fuera su asistente permanente en la Royal Institution. Faraday viajó de Francia a Italia con Davy de 1813 a 1815 visitando a los principales científicos de la época como Volta y Vauquelin.

A pesar de su limitada habilidad matemática, Faraday tuvo éxito en hacer los descubrimientos básicos de los cuales virtualmente dependen todos nuestros usos de la electricidad. Concibe la naturaleza básica del magnetismo y, en buena medida, la de la electricidad y la luz.

Un hombre modesto que se contentó con servir a la ciencia como mejor pudo, Faraday declinó un título de nobleza y un ofrecimiento para ser presidente de la Royal Society. Fue también un hombre moral; rechazó participar en la preparación de un gas venenoso en la guerra de Crimea.

Faraday muere en 1867. Sus logros son reconocidos al utilizar su nombre. La constante de Faraday es la cantidad constante de electricidad necesaria para liberar una cantidad estándar de sustancia en la electrólisis, y en el SI la unidad de capacitancia es el farad.

(Cortesía de AIP, Biblioteca Niels Bohr)



### Bosquejo biográfico

**Michael Faraday**  
(1791-1867)

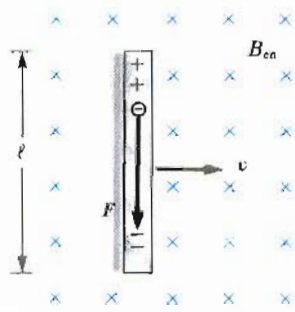


Figura 31.5 Una barra conductora recta de longitud  $l$  moviéndose con una velocidad  $v$  a través de un campo magnético  $B$  dirigido perpendicularmente a  $v$ . Una fem igual a  $Bv$  se induce entre los extremos de la barra.

### 31.2 FEM DE MOVIMIENTO

En los ejemplos 31.1 y 31.2 se consideraron casos en los cuales una fem es producida en un circuito cuando el campo magnético cambia en función del tiempo. En esta sección se describirá lo que se llama **fem de movimiento**, la cual es la fem producida en un conductor moviéndose a través de un campo magnético.

Primero, considérese un conductor recto de longitud  $l$  moviéndose con velocidad constante a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia dentro de la página como el de la figura 31.5. Para facilitar la comprensión, supóngase que el conductor se mueve perpendicularmente al campo. Los electrones en el conductor experimentarán una fuerza a lo largo del conductor dada por  $F = qv \times B$ . Con la influencia de esta fuerza, los electrones se moverán hacia el extremo inferior acumulándose en ese sitio, dejando una carga neta positiva en el extremo superior. Un campo eléctrico es por lo tanto producido en el interior del conductor debido a la separación de cargas. La carga en los extremos va aumentando hasta que la fuerza magnética  $qvB$  es balanceada por la fuerza eléctrica  $qE$ . En ese momento, las cargas dejen de fluir y la condición de equilibrio requerida es

$$qE = qvB \quad \text{o} \quad E = vB$$

Como el campo eléctrico es constante, el campo eléctrico en el conductor está relacionado con la diferencia de potencial entre sus extremos de acuerdo con la relación  $V = E\ell$ . Así,

$$V = E\ell = B\ell v$$

donde el extremo superior está a mayor potencial que el extremo inferior. Así, una diferencia de potencial se mantiene mientras exista movimiento a través del campo. Si el movimiento es en sentido contrario, la polaridad de  $V$  también se invierte.

Una situación más interesante ocurre si ahora se considera qué sucede cuando el conductor en movimiento es parte de un trayectoria conductora cerrada. Esta situación es particularmente utilizada para mostrar cómo un cambio en el flujo magnético puede producir una corriente inducida en un circuito cerrado. Considérese un circuito que consta de un barra conductora de longitud  $l$  deslizándose a lo largo de dos rieles conductores paralelos como en la figura 31.6a. Para simplificar, se supone que la barra en movimiento tiene resistencia cero y que la parte estacionaria del circuito tiene una resistencia  $R$ . Un campo magnético  $B$  uniforme y constante se aplica perpendicularmente al plano del circuito. Cuando la barra se jala hacia la derecha con una velocidad  $v$ , con la influencia de una fuerza aplicada  $F_{ap}$ , las cargas libres de la barra experimentan una fuerza magnética a lo largo de la longitud de la barra. Esta fuerza, a su vez, produce una corriente inducida ya que las cargas son libres de moverse en el circuito conductor cerrado. En este caso, la rapidez de cambio de flujo magnético a través de la espira y la correspondiente fem inducida a través de la barra en movimiento es proporcional al cambio en área de la espira cuando la barra se mueve a través del campo magnético. Como se ve, la barra se jala hacia la derecha con una velocidad constante, el trabajo realizado por la fuerza aplicada se disipa en forma de calor de Joule en el elemento resistivo del circuito.

Como el área del circuito en cualquier instante es  $\ell x$ , el flujo magnético externo a través del circuito está dado por

$$\Phi_m = B\ell x$$

donde  $x$  es el ancho del circuito, el cual cambia con el tiempo. Utilizando la ley de Faraday, se encuentra que la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell \frac{dx}{dt}$$

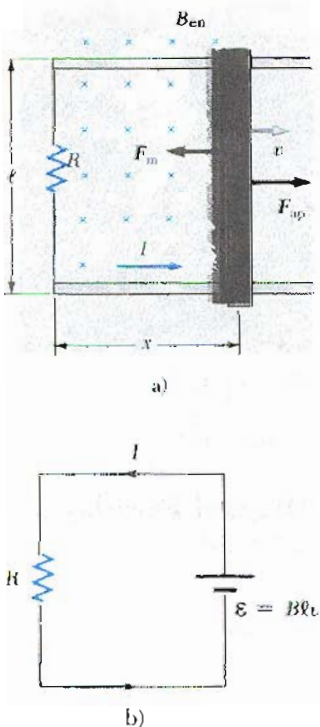


Figura 31.6 a) Una barra conductora deslizándose con velocidad  $v$  a lo largo de dos rieles conductores con la acción de una fuerza aplicada  $F_{ap}$ . La fuerza magnética  $F_m$  se opone al movimiento y una corriente se induce en la espira en dirección contraria a las manecillas del reloj. b) Circuito equivalente de la parte a.

$$\mathcal{E} = -B\ell v \quad (31.5)$$

Si la resistencia del circuito es  $R$ , la magnitud de la corriente inducida está dada por

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R} \quad (31.6)$$

El diagrama del circuito equivalente para este ejemplo se muestra en la figura 31.6b.

Examínese el sistema utilizando consideraciones de energía. Como no existe una batería real en el circuito, uno se podría preguntar sobre el origen de la corriente inducida y la energía eléctrica del sistema. Se puede dar una explicación a esto si se observa que la fuerza externa realiza trabajo sobre el conductor, por esta razón las cargas se mueven a través de un campo magnético. Esto provoca que las cargas se muevan con cierta velocidad de deriva, y de aquí que se establezca una corriente. Desde el punto de vista de la conservación de la energía, el trabajo realizado por la fuerza aplicada durante el intervalo de tiempo debe ser igual a la energía eléctrica que la fem inducida suministra en ese mismo periodo. Además, si la barra se mueve con velocidad constante, el trabajo realizado debe ser igual a la energía disipada como calor en la resistencia en este intervalo de tiempo.

Cuando el conductor de longitud  $\ell$  se mueve a través de un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ , experimenta una fuerza magnética  $\mathbf{F}_m$  de magnitud  $I\ell B$  (Sec. 29.3). La dirección de esta fuerza es opuesta al movimiento de la barra, esto es hacia la izquierda en la figura 31.6a.

Si la barra se mueve con velocidad constante, la fuerza aplicada debe ser igual y en dirección opuesta a la fuerza magnética, es decir, hacia la derecha en la figura 31.6a. Si la fuerza magnética actúa en la dirección del movimiento, ocasionaría que la barra se acelerara, con lo cual su velocidad aumentaría. Este estado de cosas representaría una violación al principio de conservación de la energía. Usando la ecuación 31.6 y el hecho de que  $F_{ap} = I\ell B$ , se encuentra que la potencia disipada por la fuerza aplicada es

$$P = F_{ap} v = (I\ell B)v = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R} \quad (31.7)$$

Esta potencia es igual a la rapidez con la cual la energía se disipa en la resistencia,  $I^2 R$ , como era de esperarse. Ésta también es igual a la potencia  $I\mathcal{E}$  suministrada por la fem inducida. Este ejemplo es una clara demostración de la conversión de la energía mecánica en energía eléctrica y finalmente en energía térmica (calentamiento joule).

### EJEMPLO 31.3 Fem inducida en una barra que gira

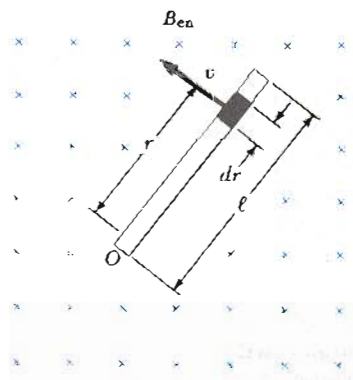
Una barra conductora de longitud  $l$  gira con una velocidad constante  $\omega$  alrededor de un pivote fijo en su extremo. Un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  está dirigido perpendicularmente al plano de rotación, como en la figura 31.7. Encuéntrese la fem inducida entre los extremos de la barra.

**Solución** Considérese un segmento de la barra de longitud  $dr$ , cuya velocidad es  $\mathbf{v}$ . De acuerdo con la ecuación 31.5, la fem inducida en el conductor en esta longitud moviéndose perpendicularmente al campo  $\mathbf{B}$  está dada por

$$(1) \quad d\mathcal{E} = Bv \, dr$$

Cada segmento de la barra se está moviendo perpendicularmente a  $\mathbf{B}$ , así que existe una fem generada a través de cada segmento, el valor de esta fem está dado por la ecuación (1). Sumando las fem a través de todos los elementos, los cuales están en serie, da la fem total entre los extremos de la barra. Esto es,

$$\mathcal{E} = \int Bv \, dr$$



**Figura 31.7** (Ejemplo 31.3) Barra conductora que gira alrededor de un pivote en uno de sus extremos en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano de rotación. Una fem se induce entre los extremos de la barra.

Para integrar esta expresión, obsérvese que la velocidad lineal de un elemento está relacionada con la velocidad angular  $\omega$  a través de la relación  $v = r\omega$ . Por lo tanto, como  $B$  y  $\omega$  son constantes, se encuentra que

$$\mathcal{E} = B \int v \, dr = B\omega \int_0^\ell r \, dr = \frac{1}{2}B\omega\ell^2$$

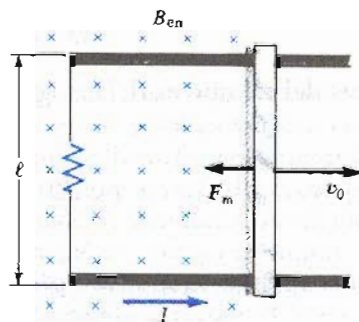
#### EJEMPLO 31.4 Fuerza magnética sobre una barra que se desliza $\square$

Una barra de masa  $m$  y longitud  $\ell$  se mueve sobre dos rieles sin fricción paralelos en presencia de un campo magnético dirigido hacia dentro de la página (Fig. 31.8). Se le imprime a la barra una velocidad inicial  $v_0$  hacia la derecha y después se libera. Encuéntrese la velocidad de la barra como función del tiempo.

**Solución** Primero obsérvese que la corriente inducida circula en sentido contrario a las manecillas del reloj y la fuerza magnética es  $F_m = -I\ell B$ , donde el signo negativo denota que la fuerza está hacia la izquierda y retarda el movimiento. Ésta es la única fuerza horizontal que actúa sobre la barra, así que aplicando la segunda ley de Newton al movimiento en dirección horizontal se obtiene

$$F_x = ma = m \frac{dv}{dt} = -I\ell B$$

Como la corriente inducida está dada por la ecuación 31.6,  $I = B\ell v/R$ , se puede escribir esta expresión como



**Figura 31.8** (Ejemplo 31.4) Una barra conductora de longitud  $\ell$  que se desliza sobre dos rieles conductores con una velocidad inicial  $v_0$  hacia la derecha.

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{R} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right) dt$$

Integrando esta última ecuación, utilizando como condiciones iniciales que  $v = v_0$  para  $t = 0$ , se encuentra que

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right) t = -\frac{t}{\tau}$$

donde la constante  $\tau = mR/B^2\ell^2$ . De aquí, se ve que la velocidad puede ser expresada en forma exponencial como

$$v = v_0 e^{-t/\tau}$$

Por lo tanto, la velocidad de la barra disminuye exponencialmente con el tiempo con la acción de una fuerza magnética retardadora. Además, si se sustituye este resultado en las ecuaciones 31.5 y 31.6, se encuentra que la fem inducida y la corriente inducida también disminuirán en forma exponencial con el tiempo. Esto es,

$$I = \frac{B\ell v}{R} = \frac{B\ell v_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$\mathcal{E} = IR = B\ell v_0 e^{-t/\tau}$$

### 31.3 LEY DE LENZ

La dirección de la fem inducida y la corriente inducida pueden ser determinadas de la ley de Lenz,<sup>2</sup> la cual puede ser establecida como sigue:

La polaridad de la fem inducida es tal que ésta tiende a producir una corriente que crea un flujo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético a través del circuito.

<sup>2</sup> Desarrollada por el físico alemán Heinrich Lenz (1804-1865).

Es decir, la corriente inducida tiende a mantener el flujo original a través del circuito. La interpretación de este enunciado depende de las circunstancias. Como se verá, esta ley es una consecuencia de la ley de conservación de la energía.

Para comprender mejor la ley de Lenz regrésese al ejemplo de la barra que se mueve hacia la derecha sobre dos rieles paralelos en presencia de un campo magnético dirigido perpendicularmente hacia dentro del papel (Fig. 31.9a). Cuando la barra se mueve hacia la derecha, el flujo magnético a través del circuito aumenta con el tiempo ya que el área de la espira aumenta. La ley de Lenz dice que la corriente inducida debe ser en la dirección tal que el flujo *que* produzca se oponga al cambio en el flujo magnético externo. Como el flujo debido al campo externo aumenta hacia dentro del papel, la corriente inducida, si ésta se debe oponer al cambio, debe producir un flujo hacia *afuera* del papel. Por lo tanto, la corriente inducida debe circular en dirección contraria a las manecillas del reloj cuando la barra se mueva hacia la derecha para dar un flujo hacia afuera del papel en la región *interna* del circuito. (Utilícese la regla de la mano derecha para verificar esta dirección.) Por otro lado, si la barra se mueve hacia la izquierda, como en la figura 31.9b, el flujo magnético a través del circuito disminuye con el tiempo. Como el flujo está hacia dentro del papel, la corriente inducida tiene que circular en dirección de las manecillas del reloj para producir un flujo hacia dentro del papel en el interior del circuito. En ambos casos, la corriente inducida tiende a mantener el flujo original a través del circuito.

Se verá esta situación desde el punto de vista de consideraciones energéticas. Supóngase que a la barra se le da un ligero empujón hacia la derecha. En el análisis anterior se encontró que este movimiento genera en el circuito una corriente que circula en dirección contraria a las manecillas del reloj. Ahora véase qué sucede si se supone que la corriente circula en dirección de las manecillas del reloj. Para una corriente  $I$ , que circula en la dirección de las manecillas del reloj, la dirección de la fuerza magnética sobre una barra que se desliza sería hacia la derecha. Esta fuerza aceleraría a la barra y aumentaría su velocidad. Esto, a su vez, ocasionaría que el área del circuito aumentara más rápido, lo que aumentaría la corriente inducida, con lo cual se incrementaría la fuerza, con lo cual se incrementaría la corriente, con lo cual... En efecto, el sistema adquiriría energía sin necesidad de darle energía. Esto es claramente incongruente con la experiencia y con la ley de la conservación de la energía. Así que se ve uno forzado a concluir que la corriente debe circular en dirección contraria a las manecillas del reloj.

Considérese otra situación, una en la cual un imán de barra se mueva hacia la derecha introduciéndose en una espira estacionaria, como en la figura 31.10a. Cuando el imán se mueve hacia la derecha introduciéndose en la espira, el flujo magnético a través de la espira aumenta con el tiempo. Para contrarrestar este

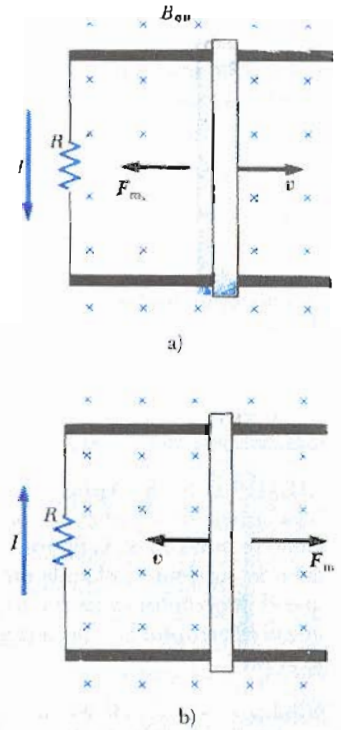


Figura 31.9 a) Cuando una barra conductora se desliza sobre dos rieles conductores, el flujo a través de la espira aumenta con el tiempo. Por la ley de Lenz, la corriente inducida debe estar en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, así que produce un flujo en dirección contraria saliendo del papel. b) Cuando la barra se mueve hacia la izquierda, la corriente inducida debe ser en la dirección de las manecillas del reloj. ¿Por qué?

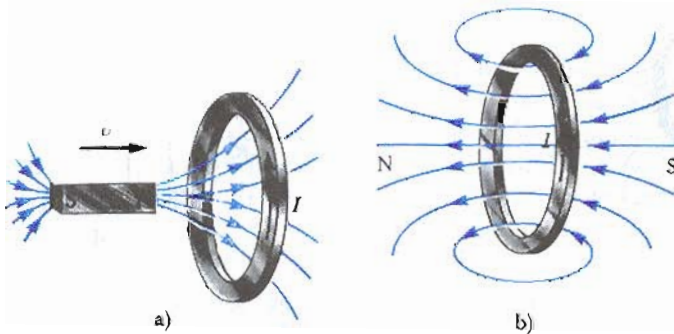


Figura 31.10 a) Cuando el imán se mueve hacia la espira conductora estacionaria, una corriente se induce en la dirección mostrada. b) Esta corriente inducida produce su propio flujo hacia la izquierda para contrarrestar el incremento del flujo externo hacia la derecha.

aumento en el flujo hacia la derecha, la corriente inducida produce un flujo hacia la izquierda, como en la figura 31.10b; por lo que la corriente inducida está en la dirección mostrada. Obsérvese que las líneas de campo magnético asociadas con la corriente inducida se oponen al movimiento del imán. Por lo tanto, en la cara izquierda de la espira de corriente está el polo norte y en la cara derecha está el polo sur.

Por otro lado, si el imán se estuviera moviendo hacia la izquierda, su flujo a través de la espira, el cual está hacia la derecha, disminuiría con el tiempo. En estas circunstancias, la corriente inducida en la espira deberá ser en una dirección tal que genere un campo en la espira de izquierda a derecha que permita mantener constante el número de líneas de flujo. Por lo tanto, la corriente inducida en la espira deberá ser opuesta a la mostrada en la figura 31.10b. En este caso, la cara izquierda de la espira sería el polo sur y la cara derecha sería el polo norte.

**EJEMPLO 31.5 Aplicación de la ley de Lenz**

Una bobina de alambre se coloca cerca de un electroimán como se muestra en la figura 31.11a. Encuéntrese la dirección de corriente inducida en la bobina; a) en el instante que el interruptor se cierra, b) varios segundos después de que el interruptor ha sido cerrado y c) cuando el interruptor se abre.

**Solución** a) Cuando el interruptor se cierra, la situación cambia desde una condición en la cual no pasan líneas de flujo a través de la bobina, a una en la cual las líneas de flujo pasan a través de ella en la dirección que se ve en la figura 31.11b. Para contrarrestar este cambio en el número de líneas, la bobina debe generar un campo de izquierda a derecha como en la figura. Esto requiere que la corriente esté dirigida como se muestra en la figura 31.11b.

b) Después de varios segundos de haber cerrado el interruptor, no existe cambio en el número de líneas a través de la espira; por lo tanto la corriente inducida es cero.

c) Abrir el interruptor causa que el campo magnético cambie de una condición en la cual las líneas de flujo mantenidas a través de la espira de derecha a izquierda hasta una condición de cero flujo. La corriente inducida debe entonces ser como se muestra en la figura 31.11c, para que genere un campo de derecha a izquierda que mantenga el flujo.

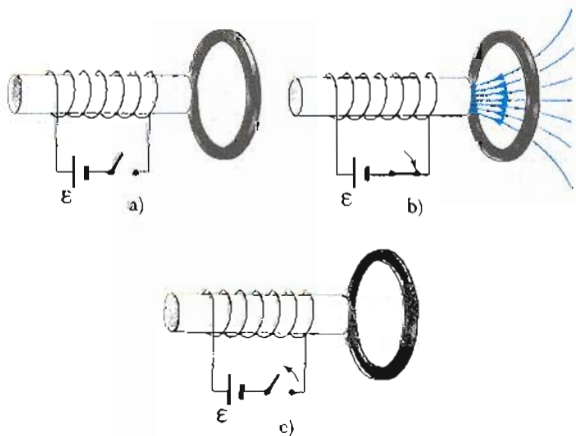


Figura 31.11 (Ejemplo 31.5).

**EJEMPLO 31.6. Una espira que se mueve a través de un campo B**

Una espira rectangular de dimensiones  $\ell$  y  $w$  y resistencia  $R$  se mueve con rapidez constante  $v$  hacia la derecha, como en la figura 31.12a. Continúa su movimiento con rapidez constante a través de una región que contiene un campo magnético uniforme  $B$  dirigido hacia dentro del papel y con una extensión de  $3w$ . Grafíquese el flujo, la fem inducida y la fuerza externa que actúa sobre la espira como función de la posición de la espira en el campo.

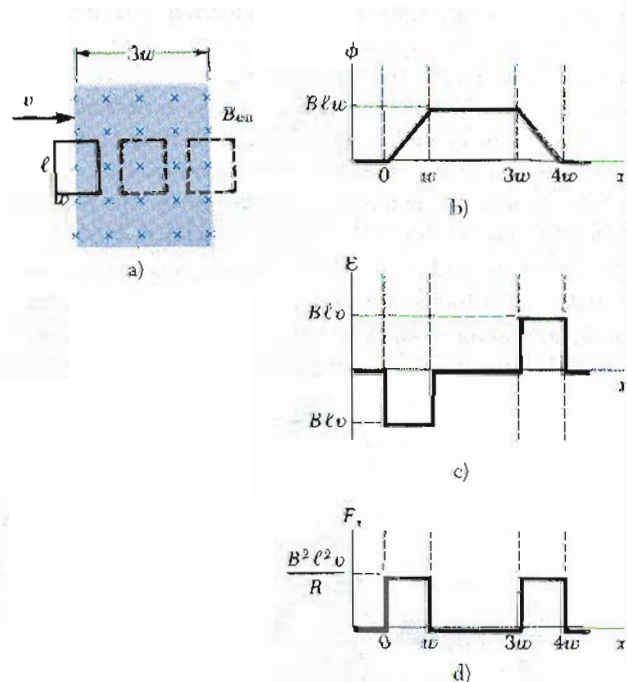


Figura 31.12 (Ejemplo 31.6) a) Una espira rectangular conductora de ancho  $w$  y longitud  $\ell$  se mueve con velocidad  $v$  a través de un campo magnético uniforme que se extiende a una distancia de  $3w$ . b) Gráfica del flujo en función de la posición del circuito. c) Gráfica de la fem inducida en función de la posición del lado de adelante. d) Gráfica de la fuerza en función de la posición tal que la velocidad del circuito permanezca constante.

**Solución** La figura 31.12b muestra el flujo a través de la espira como función de la posición de la espira. Antes de que la espira entre al campo, el flujo es cero. Cuando entra al campo, el flujo aumenta en forma lineal con la posición. Por último, el flujo disminuye linealmente hasta cero cuando la espira sale del campo.

Antes de que la espira entre al campo, no existe fem inducida ya que no hay campo presente (Fig. 31.12c). Cuando el lado derecho de la espira entra al campo, un flujo que entra a la página comienza a incrementarse. Por lo que, de acuerdo con la ley de Lenz, la corriente inducida estará circulando en dirección contraria a las manecillas del reloj y la fem inducida está dada por  $-B\ell v$ . Esta fem de movimiento aparece de la fuerza magnética experimentada por las cargas en el lado derecho de la espira. Cuando la espira entra por completo en el campo, el cambio en el flujo es cero, y por lo tanto la fem desaparece.

Desde otro punto de vista, el lado derecho y el lado izquierdo de la espira experimentan fuerzas magnéticas que tienden a crear corrientes que se cancelan una a otra. Cuando el lado derecho de la espira sale del campo, el flujo hacia dentro comienza a disminuir, una corriente en la dirección de las manecillas del reloj se induce, y la fem inducida es  $B\ell v$ . Del mismo modo cuando el lado izquierdo sale del campo, la fem cae hasta cero.

La fuerza externa que debe actuar sobre la espira para mantenerla en este movimiento está graficada en la figura 31.12d. Cuando la espira no está en el campo, no existe fuerza magnética sobre ella, por lo que la fuerza externa sobre ésta debe ser cero si  $v$  es constante. Cuando el lado derecho de la espira entra al campo, la fuerza externa necesaria para mantener constante la rapidez debe ser igual y opuesta que la magnitud de la fuerza magnética sobre el lado dada por  $F_m = -I\ell B = -B^2\ell^2 v/R$ . Cuando la espira está totalmente dentro del campo, el flujo a través de la espira no cambia con el tiempo. Por lo que la fem inducida total en la espira es cero y la corriente también es cero. Por lo tanto, no es necesaria fuerza externa para mantener el movimiento de la espira. (Desde otro punto de vista, el lado derecho y el lado izquierdo de la espira experimentan fuerzas externas iguales y opuestas por lo que la fuerza total externa es cero.) Por último, cuando el lado derecho de la espira sale del campo, la fuerza externa debe ser igual y opuesta a la fuerza magnética sobre el lado izquierdo de la espira. De este análisis, se puede concluir que la potencia es sólo suministrada cuando la espira está entrando o saliendo del campo. Además, ¡este ejemplo muestra que la fem inducida en la espira puede ser cero aun cuando exista movimiento a través del campo! De nuevo se hace hincapié que una fem es inducida en una espira sólo cuando el flujo magnético a través de la espira *cambia* con el tiempo.

### 31.4 FEM INDUCIDAS Y CAMPOS ELÉCTRICOS

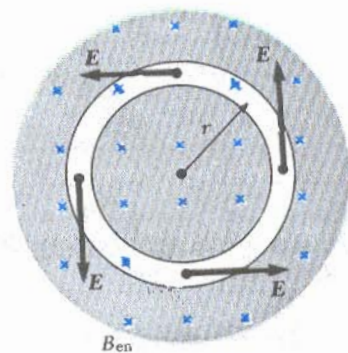
Se ha visto que un flujo magnético variable induce una fem y una corriente en una espira conductora. Se debe, en consecuencia, concluir que *se genera un campo eléctrico en el conductor como resultado del flujo magnético variable*. En efecto, la ley de la inducción electromagnética muestra que un *campo eléctrico siempre se genera por flujo magnético variable*, incluso en el espacio libre donde no existan cargas eléctricas. Sin embargo, el campo eléctrico inducido tiene propiedades que son muy diferentes de aquellas de un campo eléctrico producido por cargas estacionarias.

Este punto se puede mostrar si se considera una espira conductora de radio  $r$  situada en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano de la espira, como en la figura 31.13. Si el campo magnético cambia con el tiempo, entonces la ley de Faraday dice que una fem dada por  $\mathcal{E} = -d\Phi_m/dt$  es inducida en la espira. La corriente inducida que resulta implica la presencia de un campo eléctrico  $E$ , que debe ser tangente a la espira puesto que todos los puntos de ella son equivalentes. El trabajo que se realiza para mover una carga de prueba  $q$  una vez alrededor de la espira es igual a  $q\mathcal{E}$ . Como la fuerza eléctrica sobre la carga es  $qE$ , el trabajo realizado por esta fuerza para mover la carga una vez alrededor de la espira está dado por  $qE(2\pi r)$ , donde  $2\pi r$  es la circunferencia de la espira. Estas dos expresiones para el trabajo pueden ser igualadas; por lo tanto, se ve que

$$q\mathcal{E} = qE(2\pi r)$$

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

Utilizando este resultado, la ley de Faraday, y el hecho de que  $\Phi_m = BA = \pi r^2 B$  para una espira circular, se encuentra que el campo eléctrico inducido puede expresarse como



**Figura 31.13** Espira de radio  $r$  en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira. Si  $B$  cambia con el tiempo, un campo eléctrico es inducido en la dirección tangente a la espira.



$$E = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (31.8)$$

Si se especifica la variación del campo magnético con el tiempo, entonces se puede calcular fácilmente el campo eléctrico de la ecuación 31.8. El signo negativo indica que el campo eléctrico inducido  $E$  se opone al cambio del campo magnético. Es importante entender que *este resultado también es válido en ausencia de conductor*. Es decir, una carga libre colocada en un campo magnético variable también experimentará el mismo campo eléctrico.

La fem para cualquier trayectoria cerrada puede ser expresada como la integral de línea de  $E \cdot ds$  sobre la trayectoria. En casos más generales,  $E$  puede no ser constante y la trayectoria puede no ser un círculo. Por lo que la ley de inducción de Faraday  $\epsilon = -d\Phi_m/dt$ , puede escribirse como:

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (31.9)$$

Es importante reconocer que *el campo eléctrico inducido  $E$  que aparece en la ecuación 31.9 no es conservativo, varía con el tiempo y que se genera por la variación de un campo magnético*. El campo  $E$  que satisface la ecuación 31.9 no tendría posibilidad de ser un campo electrostático por la siguiente razón. Si el campo fuera electrostático, y por lo tanto conservativo, la integral de línea  $E \cdot ds$  sobre la espira cerrada sería cero, lo que contradice a la ecuación 31.9.

### Ley de Faraday

#### EJEMPLO 31.7 Campo eléctrico debido a un solenoide

Un solenoide largo de radio  $R$  tiene  $n$  vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente que varía con el tiempo sinusoidalmente como  $I = I_0 \cos \omega t$ , donde  $I_0$  es la corriente máxima y  $\omega$  es la frecuencia angular de la fuente de corriente (Fig. 31.14). a) Determinése el campo eléctrico en el exterior del solenoide, a una distancia  $r$  de su eje.

**Solución** Primero, considérese un punto exterior y tómese la trayectoria de la integral de línea como un círculo centrado en el solenoide, como en la figura 31.14. Por simetría se ve que la magnitud del campo eléctrico  $E$  es constante sobre toda la trayectoria y tangente a ésta. El flujo magnético a través de esta trayectoria está dado por  $BA = B(\pi R^2)$ , y por lo tanto la ecuación 31.9 da

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d}{dt} [B(\pi R^2)] = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E(2\pi r) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Como el campo magnético en el interior de un solenoide largo está dado por la ecuación 30.20,  $B = \mu_0 n I$  e  $I = I_0 \cos \omega t$ , se encuentra que

$$E(2\pi r) = -\pi R^2 \mu_0 n I_0 \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = \pi R^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega R^2}{2r} \sin \omega t \quad (\text{para } r > R)$$

Por lo que, el campo eléctrico varía sinusoidalmente con el tiempo y su amplitud cae como  $1/r$  en el exterior del solenoide.

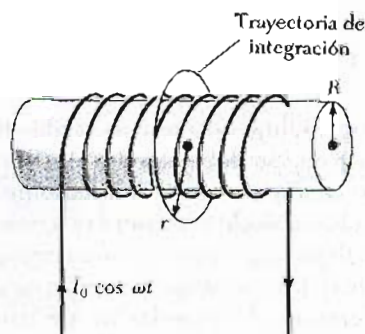


Figura 31.14 (Ejemplo 31.7) Un solenoide largo que lleva una corriente que varía con el tiempo como  $I = I_0 \cos \omega t$ . Se induce un campo eléctrico tanto en el interior como en el exterior del solenoide.

b) ¿Cuál es el campo eléctrico en el interior del solenoide, a una distancia  $r$  de su eje?

Para un punto interior,  $r < R$ , el flujo obtenido por integración de una espira está dado por  $B(\pi r^2)$ . Utilizando el mismo procedimiento que en el inciso a), se encuentra que

$$E(2\pi r) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} r \sin \omega t \quad (\text{para } r < R)$$

Esto demuestra que la amplitud del campo eléctrico en el interior del solenoide aumenta linealmente con el radio y varía sinusoidalmente con el tiempo.

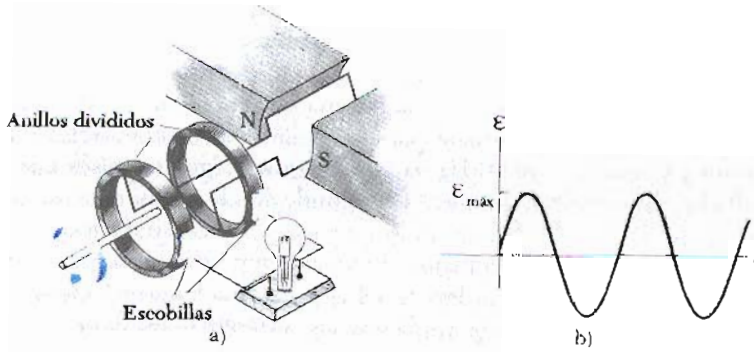


Figura 31.15 a) Diagrama esquemático de un generador de AC. Se induce una fem en la bobina que gira por una acción externa en un campo magnético. b) Gráfica de fem alterna inducida en el circuito en función del tiempo.

### 31.5 GENERADORES Y MOTORES

Los generadores y los motores son importantes dispositivos que operan con el principio de la inducción electromagnética. Primero, se tratará el **generador de corriente alterna** (o generador de AC), un dispositivo que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. En su forma simple, un generador AC consta de una espira de alambre girando por algún medio externo en un campo magnético (Fig. 31.15a). En una planta de potencia comercial, la energía requerida para girar la espira puede ser derivada de varias fuentes. Por ejemplo, en una planta hidroeléctrica, la caída de agua dirigida a los alerones de una turbina produce el movimiento de rotación; en una planta de carbón, el calor producido al quemar el carbón se utiliza para convertir el agua en vapor y éste se dirige nuevamente a los alerones de la turbina. Cuando la espira gira, el flujo magnético a través de ésta cambia con el tiempo, induciendo una fem y una corriente en un circuito externo. Los extremos de la espira se conectan a unos anillos colectores que giran con la espira. Las conexiones al circuito externo se hacen mediante escobillas estacionarias en contacto con los anillos colectores.

Para que la descripción del generador tenga carácter cuantitativo, supóngase que la espira tiene  $N$  vueltas (una situación más práctica), todas de la misma área  $A$ , y supóngase que la espira gira con una velocidad angular constante  $\omega$ . Si  $\theta$  es el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano de la espira como en la figura 31.16, entonces el flujo magnético a través de la espira en cualquier tiempo  $t$  está dada por

$$\Phi_m = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

donde se ha utilizado la relación entre el desplazamiento angular y la velocidad angular,  $\theta = \omega t$ . (Se ha puesto el reloj de tal forma que  $t = 0$  para  $\theta = 0$ .) Por lo tanto, la fem inducida en el bobina está dada por

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -NAB \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = NAB\omega \sin \omega t \quad (31.10)$$

Este resultado muestra que la fem varía sinusoidalmente con el tiempo, como la gráfica de la figura 31.15b. De la ecuación 31.10 se ve que la máxima fem tiene un valor

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NAB\omega \quad (31.11)$$

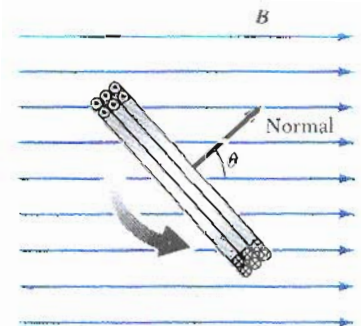


Figura 31.16 Una espira de área  $A$  que consta de  $N$  vueltas, gira con velocidad angular constante  $\omega$  en presencia de un campo magnético. La fem inducida en la espira varía sinusoidalmente con el tiempo.

lo cual ocurre cuando  $\omega t = 90^\circ$  o  $270^\circ$ . En otras palabras,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}}$  cuando el campo magnético está en el plano de la bobina y la razón de cambio de flujo con el tiempo es máxima. Además, la fem es cero cuando  $\omega t = 0$  o  $180^\circ$ , es decir, cuando  $B$  es perpendicular al plano de la bobina y la razón de cambio del flujo con el tiempo es cero. La frecuencia para los generadores comerciales en los Estados Unidos y Canadá es de 60 Hz, sin embargo en algunos países europeos, se utilizan 50 Hz. (Recuérdese que  $\omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia en hertz.)

**EJEMPLO 31.8 Fem inducida en un generador**

Un generador AC consta de 8 vueltas de alambre cada una de área  $A = 0.09 \text{ m}^2$  y una resistencia total de  $12 \ \Omega$ . El circuito gira en un campo magnético  $B = 0.5 \text{ T}$  con una frecuencia constante de 60 Hz. a) Encuéntrese la fem inducida máxima.

**Solución** Primero obsérvese que  $\omega = 2\pi f = 2\pi(60 \text{ Hz}) = 377 \text{ s}^{-1}$ . Utilizando la ecuación 31.11 con los valores numéricos apropiados da

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NAB\omega = 8(0.09 \text{ m}^2)(0.5 \text{ T})(377 \text{ s}^{-1}) = 136 \text{ V}$$

b) ¿Cuál es la máxima corriente inducida?

De la ley de Ohm y del resultado del inciso a), se encuentra que la máxima corriente inducida es

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{R} = \frac{136 \text{ V}}{12 \ \Omega} = 11.3 \text{ A}$$

**Ejercicio 2** Determinése la variación con el tiempo de la fem inducida y de la corriente inducida cuando las terminales de salida están conectadas por un conductor de baja resistencia.

**Respuestas:**

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t = (136 \text{ V}) \text{ sen } 377t$$

$$I = I_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t = (11.3 \text{ A}) \text{ sen } 377t$$

El generador de corriente directa (CD) está representado en la figura 31.17a. Dicho generador se emplea, por ejemplo, para cargar baterías de vehículos automotores. Las componentes son esencialmente las mismas de un generador de AC, excepto que los contactos del circuito que gira se hacen utilizando un anillo dividido o conmutador.

En esta configuración, el voltaje de salida siempre tiene la misma polaridad y la corriente es una corriente directa pulsante, como se ve en la figura 31.17b. Puede comprenderse la razón de esto, si se observa que los contactos en el anillo invierten su papel cada medio ciclo. Al mismo tiempo, la polaridad de la fem inducida se invierte; por lo tanto, la polaridad del conmutador (que es la misma polaridad del voltaje de salida) permanece siendo la misma.

Una corriente CD pulsante no es recomendable para la mayoría de las aplicaciones. Para obtener una corriente CD más estable, los generadores comer-

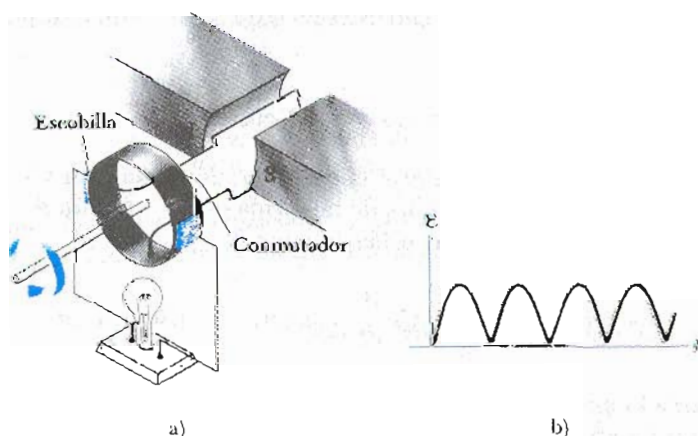


Figura 31.17 a) Diagrama esquemático de un generador CD. b) La fem en función del tiempo varía en magnitud pero siempre tiene la misma polaridad.

ciales utilizan varias bobinas en la armadura y conmutadores distribuidos en forma tal que los pulsos senoidales de las diferentes bobinas estén fuera de fase. Cuando estos pulsos se superponen, la CD de salida está prácticamente libre de fluctuaciones.

Los **motores** son dispositivos que convierten la energía eléctrica en energía mecánica. Esencialmente, *un motor es un generador operando al inverso*. En vez de generar una corriente por la rotación de una espira, se suministra corriente a la bobina por medio de una batería y el momento de una fuerza que actúa sobre la espira portadora es la que provoca la rotación.

Se puede generar trabajo útil si se conecta la armadura giratoria a algún dispositivo externo. Sin embargo, a medida que la bobina gira, el flujo variable induce una fem en ella; esta fem *siempre* actúa para reducir la corriente en la bobina. Si esto no fuera el caso, se violaría la ley de Lenz. Esta contra fem aumenta en magnitud con el aumento de la rapidez rotacional de la armadura. (La frase *contra fem* se utiliza para indicar que la fem tiende a reducir la corriente suministrada.) Puesto que el voltaje disponible para suministrar la corriente es igual a la diferencia entre el voltaje aplicado y la contra fem, la corriente a través de la armadura está limitado por la contra fem.

Cuando un motor arranca, no existe contra fem y la corriente es muy grande puesto que sólo está limitada por la resistencia de la bobina. Cuando la bobina comienza a girar, la contra fem inducida se opone al voltaje aplicado y la corriente en la bobina se reduce. Con una carga mecánica considerable, el motor disminuirá su velocidad, lo cual hace que disminuya la contra fem. Esta reducción en la contra fem aumenta la corriente en las bobinas y por consiguiente, la potencia suministrada por la fuente externa de voltaje. Por esta razón, los requisitos de potencia son mayores para el arranque de un motor y para accionarlo con cargas pesadas. Si se permite que el motor funcione sin carga mecánica, la contra fem reduce la corriente a un valor suficientemente grande para contrarrestar las pérdidas de energía por calentamiento joule y la fricción.

### EJEMPLO 31.9 Corriente inducida en un motor

Supóngase que un motor que tenga bobinas con una resistencia de  $10 \Omega$  está siendo alimentado con un voltaje de  $120 \text{ V}$ . Cuando el motor está trabajando a su máxima velocidad, la contra fem es de  $70 \text{ V}$ . Encuéntrese la corriente en las bobinas: a) cuando el motor se arranca y b) cuando el motor ha alcanzado su máxima rapidez.

**Solución** a) Cuando un motor se arranca, la contra fem es cero. (Las bobinas no están en movimiento.) Entonces la corriente en las bobinas es máxima e igual a

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{120 \text{ V}}{10 \Omega} = 12 \text{ A}$$

b) Para la máxima rapidez, la contra fem tiene su valor máximo. Así, el voltaje suministrado es ahora el voltaje externo menos la contra fem. Por lo tanto, la corriente se reduce a

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{contra}}}{R} = \frac{120 \text{ V} - 70 \text{ V}}{10 \Omega} = \frac{50 \text{ V}}{10 \Omega} = 5 \text{ A}$$

**Ejercicio 3** Si la corriente en el motor es de  $8 \text{ A}$  en cierto instante, ¿cuál es la contra fem en ese instante?

**Respuesta**  $40 \text{ V}$ .

## \*31.6 CORRIENTES DE EDDY (PARÁSITAS)

Como se ha visto, se induce una fem y una corriente en un circuito mediante un flujo magnético variable. En la misma forma, corrientes circundantes, llamadas corriente de Eddy (parásitas), se originan en las piezas voluminosas de metal que se mueven a través de un campo magnético. Esto puede fácilmente comprobarse permitiendo que una placa plana metálica en el extremo de una barra rígida oscile como péndulo a través de un campo magnético (Fig. 31.18). El metal deberá ser de un material como aluminio o cobre. Cuando la placa entra al campo, el cambio

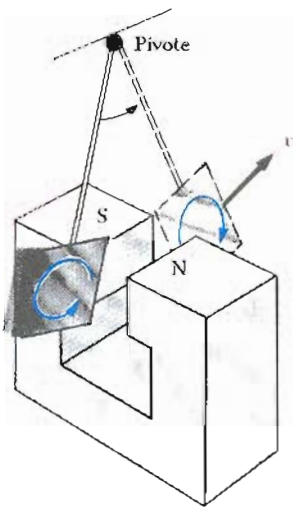


Figura 31.18 Un aparato que muestra la formación de corrientes de Eddy (parásitas) en un conductor que se mueve en un campo magnético. Cuando la placa entra o sale del campo, la variación en el flujo genera una fem inducida, que causa las corrientes de Eddy.

en el flujo crea una fem inducida en la placa, la cual a su vez provoca que los electrones libres en el metal se muevan, produciéndose corrientes de Eddy. Según la ley de Lenz, la dirección de las corrientes de Eddy debe oponerse al cambio que las produce. Por esta razón, las corrientes de Eddy deben producir polos magnéticos efectivos en la placa, los cuales son repelidos por los polos del imán, entonces el resultado es una fuerza repulsiva que se opone al movimiento del péndulo. (Si lo contrario fuera cierto, el péndulo aceleraría y su energía aumentaría después de cada oscilación, lo que viola la ley de conservación de la energía.) Por otra parte, la fuerza retardadora se puede sentir jalando una lámina metálica a través del campo de un imán muy intenso.

Como se indica en la figura 31.19, con  $B$  introduciéndose al papel, las corrientes de Eddy circulan en sentido contrario a las manecillas del reloj, cuando la placa oscilante entra al campo en la posición 1. Esto se debe a que el flujo externo que entra al papel está aumentando y, en consecuencia, por la ley de Lenz, la corriente inducida debe provocar un flujo que salga del papel. Lo opuesto también es cierto, cuando la placa sale del campo en la posición 2, la corriente es en la dirección de las manecillas del reloj. Puesto que la corriente de Eddy inducida siempre produce una fuerza retardadora  $F$  cuando la placa entra o sale del campo, la placa oscilante finalmente se quedará en reposo.

Si se hacen cortes/ranurados en la placa metálica, como en la figura 31.20, se reducen en forma considerable las corrientes de Eddy y su correspondiente fuerza retardadora. Esto puede entenderse si se observa que las ranuras practicadas en la placa son círculos abiertos para grandes espiras de corriente que de otro modo se podrían formar.

En los sistemas de frenado de muchos trenes subterráneos y vehículos rápidos se emplea la inducción electromagnética y las corrientes de Eddy. Cerca de los rieles de acero se instala un electroimán que puede energizarse con corriente. La acción de frenado se produce cuando circula una corriente muy grande a través del electroimán. El movimiento relativo entre el imán y los rieles induce corrientes de Eddy en los rieles, y la dirección de esas corrientes produce una fuerza retardadora sobre el vehículo en movimiento. La energía mecánica perdida por el vehículo es transformada en calor por efecto joule. Como las corrientes de Eddy decrecen continuamente en magnitud, cuando el vehículo se va frenando, el efec-

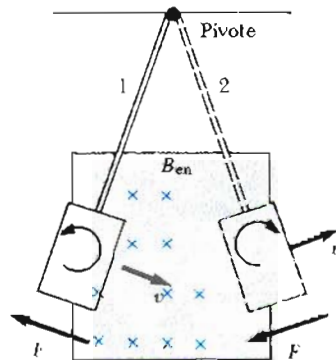


Figura 31.19 Cuando una placa conductora entra al campo en la posición 1, la corriente de Eddy es en la dirección contraria a las manecillas del reloj. Sin embargo, en la posición 2, la corriente es en la dirección de las manecillas del reloj. En ambos casos, la placa es frenada por el imán por lo que eventualmente queda en reposo.

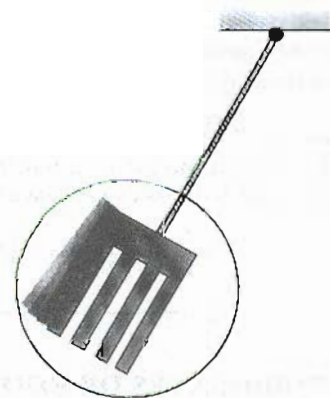


Figura 31.20 Cuando se practican ranuras en la placa conductora, las corrientes de Eddy se reducen y la placa se balancea más libremente a través del campo magnético.

to de frenado es muy suave. Los frenos por corrientes de Eddy también se emplean en algunas balanzas mecánicas y en varias máquinas.

Con mucha frecuencia, las corrientes de Eddy resultan indeseables puesto que disipan energía en forma de calor. Para reducir esta pérdida de energía, las partes conductoras móviles con frecuencia se laminan, es decir, se construyen en forma de capas delgadas separadas por un material aislante, como barniz o algún óxido metálico. Esta estructura laminada aumenta la resistencia contra posibles trayectorias de corrientes de Eddy y confina efectivamente a las corrientes a capas individuales. Esta estructura laminar se utiliza en los núcleos de los transformadores y motores para reducir al mínimo las corrientes de Eddy y en consecuencia incrementar el rendimiento de tales mecanismos.

### 31.7 LAS MARAVILLOSAS ECUACIONES DE MAXWELL

Este capítulo concluirá con la presentación de cuatro ecuaciones que pueden considerarse como las piedras angulares de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Estas ecuaciones conocidas como **ecuaciones de Maxwell**, después de James Clerk Maxwell, son tan fundamentales para los fenómenos electromagnéticos como las leyes de Newton lo son al estudio de fenómenos mecánicos. En realidad, la teoría desarrollada por Maxwell fue de mucho mayores alcances que lo que él imaginó en su época, puesto que resultaron estar en completa concordancia con la teoría especial de la relatividad que Einstein demostró en 1905. Como se verá, las ecuaciones de Maxwell representan las leyes principales de la electricidad y del magnetismo que previamente se han discutido. Sin embargo, las ecuaciones tienen consecuencias adicionales de vital importancia. En el capítulo 34 se mostrará que estas ecuaciones predicen la existencia de ondas electromagnéticas (patrones viajeros de campos eléctricos y magnéticos), los cuales viajan con una velocidad  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3 \times 10^8$  m/s, la velocidad de la luz. Además, la teoría demuestra que tales ondas son radiadas por cargas aceleradas.

Por razones de comodidad, las **ecuaciones de Maxwell** se presentan aplicadas en el espacio libre, es decir, en ausencia de cualquier material dieléctrico o magnético. Las cuatro ecuaciones son:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (31.12) \quad \text{Ley de Gauss}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (31.13) \quad \text{Ley de Gauss del magnetismo}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (31.14) \quad \text{Ley de Faraday}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (31.15) \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell}$$

Ahora se analizarán estas ecuaciones una por una. La ecuación 31.12 es la *ley de Gauss*, la cual establece que el *flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta dentro de esa superficie dividida entre la constante  $\epsilon_0$* . Esta ley relaciona el campo eléctrico con la distribución de carga, donde las líneas de campo eléctrico se originan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas.

La ecuación 31.13, la cual puede ser considerada la *ley de Gauss del magnetismo*, establece que el *flujo magnético total a través de una superficie cerrada es cero*. Es decir, el número de líneas de campo magnético que entran en un volumen cerrado debe ser igual al número de líneas que abandonan el volumen. Esto implica que las líneas de campo magnético no pueden empezar o terminar en

ningún punto. Si lo hicieran esto significaría que existirían monopolos magnéticos aislados en esos puntos. El hecho de que hasta el momento no se han observado polos aislados o monopolos es una confirmación de la ecuación 31.13.

La ecuación 31.14 es la *ley de inducción de Faraday*, la cual describe la relación entre un campo eléctrico y un flujo magnético variable. La ley enuncia que *la integral de línea del campo eléctrico alrededor de cualquier trayectoria cerrada (la cual es igual a la fem) es igual a la razón de variación del flujo magnético a través de cualquier área superficial limitada por esa trayectoria*. Una consecuencia de la ley de Faraday es la corriente inducida en una espira conductora colocada en un campo magnético que varía con el tiempo.

La ecuación 31.15 es la forma generalizada de la ley de Ampère, la cual describe la relación entre los campos eléctrico y magnético y las corrientes eléctricas. Esto es, *la integral de línea del campo magnético alrededor de cualquier trayectoria cerrada se determina mediante la suma de la corriente de conducción total a través de la trayectoria y la razón de variación de flujo eléctrico a través de cualquier superficie limitada por esa trayectoria*.

Una vez que se conocen los campos eléctricos y magnéticos en algún punto determinado del espacio, la fuerza que actúa sobre una partícula de carga  $q$  puede calcularse con la expresión

### Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (31.16)$$

Ésta se denomina *fuerza de Lorentz*. Las ecuaciones de Maxwell, junto con esta ley de fuerza, proporcionan una descripción completa de todas las interacciones electromagnéticas.

Es interesante hacer notar la simetría que guardan las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones 31.12 y 31.13 son simétricas, con excepción de la ausencia del término monopolo magnético en la ecuación 31.13. Además, las ecuaciones 31.14 y 31.15 son simétricas, ya que las integrales de línea de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  alrededor de una trayectoria cerrada se relacionan con la razón de variación del flujo magnético y del flujo eléctrico respectivamente. "Las maravillosas ecuaciones de Maxwell" como las llamó John R. Pierce,<sup>3</sup> tienen una gran importancia no sólo en el campo de la electrónica sino en toda la ciencia. Heinrich Hertz una vez escribió: "No se puede escapar del sentimiento de admiración por estas fórmulas matemáticas que tienen una existencia independiente y una inteligencia innata, que son más sabias de lo que pudiéramos ser, más sabias aún que sus descubridores; que se puede obtener mucho más de ellas que lo que nosotros pudiéramos poner en ellas."

<sup>3</sup> John R. Pierce, *Electrons and Waves*, Nueva York, Doubleday Study Series, 1964. Se recomienda la lectura del capítulo 6 de este interesante libro.

### RESUMEN

La **ley de inducción de Faraday** establece que la fem inducida en un circuito es directamente proporcional a la razón de variación del flujo magnético a través del circuito. Esto es,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (31.1)$$

donde  $\Phi_m$  es el flujo magnético, dado por

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

### Ley de Faraday

Cuando una barra conductora de longitud  $l$  se mueve a través de un campo magnético  $\mathbf{B}$  con velocidad  $v$  tal que  $\mathbf{B}$  es perpendicular a la barra, la fem inducida en la barra (llamada **fem de movimiento**) está dada por

$$\mathcal{E} = -B\ell v \quad (31.5)$$

La **ley de Lenz** establece que la corriente inducida y la fem inducida en un conductor están en una dirección tal que se oponen al cambio que las produce.

Una forma general de la **ley de inducción de Faraday** es

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (31.9)$$

donde  $\mathbf{E}$  es no conservativo, variable con el tiempo y que se produce por un flujo magnético variable.

Cuando se utiliza conjuntamente la ley de fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  y las **ecuaciones de Maxwell**, dadas a continuación en forma integral, quedan descritos todos los fenómenos electromagnéticos.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (31.12)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (31.13)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (31.14)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (31.15)$$

Las dos últimas ecuaciones tienen particular importancia para los temas que se expusieron en este capítulo. La ley de Faraday describe la forma en que puede inducirse un campo eléctrico mediante un flujo magnético variable. Similarmente, la ley de Ampère-Maxwell describe cómo un campo magnético puede ser producido mediante un flujo eléctrico variable y una corriente de conducción.

Fem de movimiento

Ley de Faraday en forma general

Ley de Gauss (electricidad)

Ley de Gauss (magnetismo)

Ley de Faraday

Ley de Ampère-Maxwell

## PREGUNTAS

1. ¿Cuál es la diferencia entre el flujo magnético y el campo magnético?
2. Una espira circular está colocada en un campo magnético uniforme y constante. Describa cómo una fem puede ser inducida en la espira en esta situación.
3. Una espira de alambre se coloca en un campo magnético uniforme. ¿Para qué orientación de la espira es el flujo magnético máximo? ¿Para qué orientación es cero el flujo?
4. Cuando la barra conductora de la figura 31.21 se mueve hacia la derecha, un campo eléctrico se crea dirigido hacia abajo. Si la barra se moviera hacia la izquierda, explique por qué el campo eléctrico sería hacia arriba.
5. Cuando la barra de la figura 31.21 se mueve perpendicular al campo, ¿se requiere una fuerza externa para mantener su movimiento con velocidad constante?

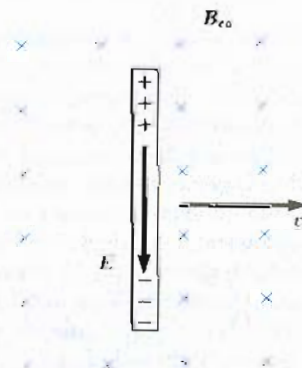


Figura 31.21 (Preguntas 4 y 5).



6. La barra en la figura 31.22 se mueve sobre rieles hacia la derecha con velocidad  $v$ , y el campo magnético uniforme y constante está hacia afuera de la página. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida? Si la barra se moviera hacia la izquierda, ¿cuál sería la dirección de la corriente inducida?

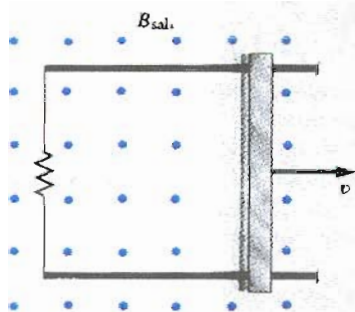


Figura 31.22 (Preguntas 6 y 7).

7. Explique por qué una fuerza externa es necesaria para mantener la barra en la figura 31.22 moviéndose con una velocidad constante.
8. Una espira circular grande de alambre reposa en el plano horizontal. Un imán de barra se deja caer a través de la espira. Si los ejes del imán permanecen horizontales cuando está cayendo, describa la fem inducida en la espira. ¿Cómo se altera la situación si los ejes del imán permanecen verticales cuando está cayendo?
9. Cuando un pequeño imán se mueve hacia el interior de un solenoide, una fem es inducida en la bobina. Sin embargo, si el imán se mueve alrededor dentro de una bobina toroidal, no existe fem inducida. Explique.
10. ¿Si se dejara caer un imán dentro de un largo tubo de cobre produciría corriente en el tubo? Explique
11. ¿Cómo se produce la energía eléctrica en las presas? (Es

decir, ¿cómo se convierte la energía de movimiento en energía eléctrica?)

12. Como brazo de la escala de la balanza, una placa de aluminio es en algunas ocasiones utilizada para disminuir las oscilaciones del brazo cerca del equilibrio. La placa está montada en el extremo de un barra y se mueve entre los polos de un pequeño imán de herradura que sirve de marco. ¿Por qué son las oscilaciones del brazo fuertemente amortiguadas cerca del equilibrio?
13. ¿Qué sucede cuando la bobina de un generador gira con gran rapidez?
14. ¿Habrá corriente inducida en una bobina al girar un imán en su interior? Si es así, ¿cómo?
15. Cuando el interruptor en el circuito de la figura 31.23a se cierra, una corriente se genera en la bobina y el anillo metálico salta hacia arriba (véase la figura 31.23b). Explique este comportamiento.

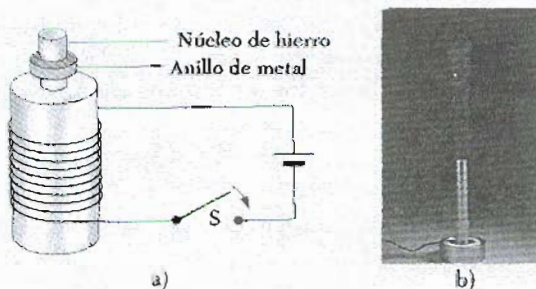


Figura 31.23 (Preguntas 15 y 16). (Cortesía de CENCO)

16. Suponga que la batería en la figura 31.23a se reemplaza por una fuente de corriente alterna y que el interruptor está cerrado. Si el anillo metálico se mantiene sobre el solenoide, éste se calentará. ¿Por qué?
17. Identifique las generalidades asociadas con cada una de las cuatro ecuaciones de Maxwell.
18. ¿Permiten las ecuaciones de Maxwell (Sec. 31.7) la existencia de "cargas magnéticas", es decir, polos N o S aislados?

**PROBLEMAS**

**Sección 31.1 Ley de inducción de Faraday**

- Una bobina rectangular de 50 vueltas de dimensiones 5 cm × 10 cm se deja "caer" desde una posición donde el campo magnético  $B = 0$  hasta una nueva posición donde  $B = 0.5$  T y está dirigido perpendicularmente al plano de la bobina. Calcule la fem promedio resultante en la bobina si el desplazamiento ocurre en 0.25 s.
- Una espira plana de alambre consta de una vuelta de área en su sección trasversal de 8.0 cm<sup>2</sup>, está perpendicular a un campo magnético que incrementa uniformemente su magnitud desde 0.5 T hasta 2.5 T en un tiempo de 1.0 s. ¿Cuál es la corriente inducida resultante si la bobina tiene una resistencia de 2 Ω?
- Un poderoso electroimán tiene un campo de 1.6 T y un área de sección trasversal de 0.2 m<sup>2</sup>. Si se coloca una

bobina de 200 vueltas con resistencia total de 20 Ω alrededor del electroimán, y entonces se corta la potencia para el electroimán en 0.02 s, ¿cuál será la corriente inducida en la bobina?

- Una espira cuadrada de una sola vuelta de 0.20 m de lado se coloca con su plano perpendicular a un campo magnético constante. Una fem de 18 mV es inducida en el alambre cuando el área de la bobina disminuye con una rapidez de 0.1 m<sup>2</sup>/s. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?
- El plano de una bobina rectangular de dimensiones 5 cm por 8 cm es perpendicular a la dirección de un campo magnético  $B$ . Si la bobina tiene 75 vueltas y una resistencia total de 8 Ω, ¿con qué rapidez debe cambiar la magnitud de  $B$  de manera que la corriente inducida en el alambre sea de 0.1 A?

6. Una bobina circular angosta tiene 50 vueltas, cada una de radio 0.1 m. Un campo magnético uniforme se coloca a lo largo de una dirección perpendicular al plano de la bobina. Si el campo aumenta linealmente desde 0 hasta 0.6 T en un tiempo de 0.2 s, ¿cuál es la fem inducida en la bobina?
7. Una bobina circular de 30 vueltas de radio 4 cm y resistencia 1 Ω se coloca en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina. La magnitud del campo magnético varía en el tiempo de acuerdo con la expresión  $B = 0.01t + 0.04t^2$ , donde  $t$  está en s y  $B$  está en T. Calcule la fem inducida en la bobina para  $t = 5$  s.
8. Una bobina plana de alambre de 10 vueltas, cada una con área de 14 cm<sup>2</sup> está perpendicular a un campo magnético cuya magnitud cambia con el tiempo de acuerdo con  $B = (0.5 \text{ T})\sin(60\pi t)$ . ¿Cuál es la fem inducida como función del tiempo?
9. Una bobina plana de área 14 cm<sup>2</sup> con 2 vueltas es perpendicular a un campo magnético cuya magnitud disminuye en el tiempo de acuerdo con  $B = (0.5 \text{ T})e^{-t/\tau}$ . ¿Cuál es la fem inducida como función del tiempo?
10. Una espira rectangular de área  $A$  se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la bobina. La magnitud del campo varía como función del tiempo de acuerdo con  $B = B_0 e^{-t/\tau}$ . Donde  $B_0$  y  $\tau$  son constantes. El campo tiene un valor de  $B_0$  para  $t \leq 0$ . a) Utilice la ley de Faraday para demostrar que la fem inducida en la espira está dada por

$$\mathcal{E} = \frac{AB_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

- b) Obtenga el valor numérico para la fem para  $t = 4$  s cuando  $A = 0.16 \text{ m}^2$ ,  $B_0 = 0.35 \text{ T}$  y  $\tau = 2$  s. c) Para los valores de  $A$ ,  $B_0$  y  $\tau$  dados en el inciso b), ¿cuál es el valor máximo de  $\mathcal{E}$ ?
11. Un solenoide largo tiene  $n$  vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente  $I = I_0(1 - e^{-\alpha t})$  con  $I_0 = 30 \text{ A}$  y  $\alpha = 1.6 \text{ s}^{-1}$ . En el interior del solenoide y coaxialmente con ella está una espira que tiene un radio  $R = 6 \text{ cm}$  y consta de un total de  $N$  vueltas de alambre delgado. ¿Cuál es la fem inducida en la espira por la corriente variable? Tome  $n = 400$  vueltas/m y  $N = 250$  vueltas. (Véase la figura 31.24.)

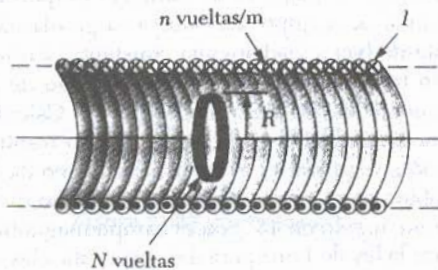


Figura 31.24 (Problema 11).

12. Un campo magnético de 0.2 T existe en el interior de un solenoide de 500 vueltas y diámetro de 10 cm. ¿Cuán rápido (esto es, cuál es el periodo de tiempo) debe ser

reducido a cero la magnitud si la magnitud promedio de la fem inducida en la bobina durante este intervalo de tiempo es de 10 kV?

13. Una bobina formada por 50 vueltas bien apretadas de alambre con forma cuadrada, está colocada en un campo magnético de tal manera que la normal al plano de la espira forma un ángulo de 30° con la dirección del campo. Se observa que si el campo magnético incrementa su magnitud uniformemente desde 200 μT hasta 600 μT en 4 s, una fem de 80 mV se induce en la bobina. ¿Cuál es la longitud total del alambre?
14. Un alambre recto largo lleva una corriente  $I = I_0 \sin(\omega t + \delta)$  y se coloca en el plano de una espira rectangular de  $N$  vueltas de alambre, como se muestra en la figura 31.25. Las cantidades  $I_0$ ,  $\omega$ , y  $\delta$  son constantes. Determine la fem inducida en la espira por el campo magnético debido a la corriente en el alambre recto. Suponga que  $I_0 = 50 \text{ A}$ ,  $\omega = 200\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 100$ ,  $a = b = 5 \text{ cm}$  y  $\ell = 20 \text{ cm}$ .

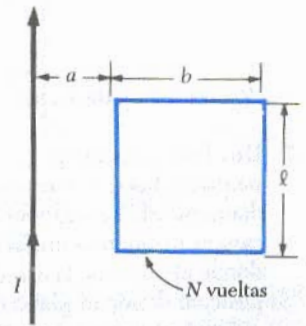


Figura 31.25 (Problema 14).

15. Una espira circular de radio  $R$  consta de  $N$  vueltas de alambre y es penetrada por un campo magnético externo dirigido perpendicularmente al plano de la espira. La magnitud del campo en el plano de la espira es  $B = B_0(1 - r/2R) \cos \omega t$ , donde  $R$  es el radio de la espira y donde  $r$  es medida desde el centro de la espira, como se muestra en la figura 31.26. Determine la fem inducida en la espira.

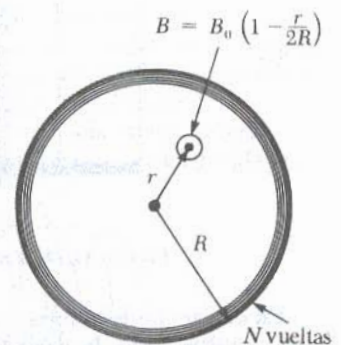


Figura 31.26 (Problema 15).

16. Un toroide de sección transversal rectangular ( $a = 2 \text{ cm}$  por  $b = 3 \text{ cm}$ ) y radio interior  $R = 4 \text{ cm}$  consta de 500 vueltas de alambre que llevan una corriente  $I = I_0 \sin \omega t$ , con  $I_0 = 50 \text{ A}$  y una frecuencia angular  $f = \omega/2\pi = 60 \text{ Hz}$ . Una espira que consta de 20 vueltas de alambre

se une al toroide como se muestra en la figura 31.27. Determine la fem inducida en la espira por la corriente variable.

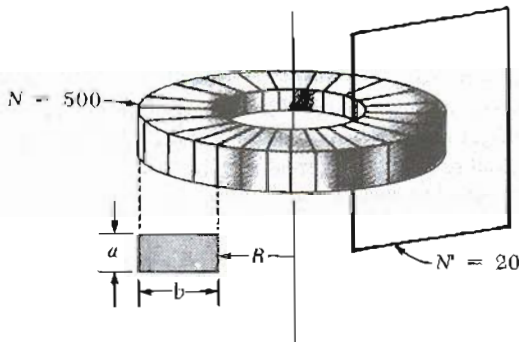


Figura 31.27 (Problema 16).

Sección 31.2 Fem de movimiento y  
Sección 31.3 Ley de Lenz

17. Una fem inducida promedio de 30 mV se mide en una pequeña bobina circular de 600 vueltas y 4 cm de diámetro en las siguientes condiciones: Se gira en un campo magnético uniforme en 0.5 s desde la posición donde el plano de la espira es paralelo al campo hasta la posición donde el plano de la espira hace un ángulo de 45° con el campo. ¿Cuál es el valor de  $B$  en la región donde se tomó la medida?
18. Considere el arreglo de la figura 31.28. Suponga que  $R = 6 \Omega$ ,  $\ell = 1.2$  m y que un campo magnético uniforme de 2.5 T está dirigido hacia dentro de la página. ¿Con qué velocidad debería moverse la barra para producir una corriente de 0.5 A en la resistencia?

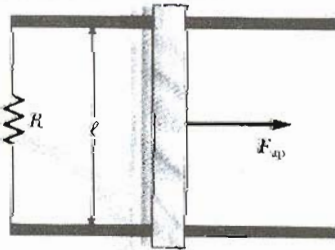


Figura 31.28 (Problemas 18, 19 y 20).

19. En el arreglo de la figura 31.28, una barra conductora se mueve hacia la derecha a lo largo de dos rieles conductores paralelos sin fricción conectados en uno de sus extremos por una resistencia de 6  $\Omega$ . Un campo magnético de 2.5 T está dirigido hacia dentro del papel. Sea  $\ell = 1.2$  m y desprecie la masa de la barra. a) Calcule la fuerza aplicada requerida para mover la barra hacia la derecha con una rapidez constante de 2 m/s. b) ¿Cuál es la potencia disipada en la resistencia?

20. Una barra conductora de longitud  $\ell$  se mueve sobre dos rieles horizontales sin fricción como se muestra en la figura 31.28. Si una fuerza constante de 1 N es necesaria para mover la barra a 2 m/s a través de un campo magnético  $B$  que está entrando a la página: a) ¿cuál es la corriente a través de una resistencia de 8  $\Omega$ ? b) ¿Cuál es la potencia disipada en la resistencia? c) ¿Cuál es la potencia mecánica desarrollada por la fuerza  $F$ ?
21. Sobre una región donde la componente vertical del campo magnético terrestre es 40  $\mu$ T dirigido hacia abajo, un alambre de 5 m de longitud se coloca a lo largo de la dirección este-oeste y se mueve horizontalmente hacia el norte con una rapidez de 10 m/s. Calcule la diferencia de potencial entre los extremos del alambre y determine cuál es el extremo positivo.
22. Un pequeño aeroplano con alas de 14 m está volando hacia el norte con una rapidez de 70 m/s sobre una región donde la componente vertical del campo magnético terrestre es 1.2  $\mu$ T. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial desarrollada entre los extremos de las alas? b) ¿Cómo cambiaría la respuesta del inciso a) si el aeroplano estuviera volando hacia el este?
23. Un helicóptero tiene unas aspas de 3 m de longitud que giran a 2 rev/s alrededor del eje central. Si la componente vertical del campo magnético de la Tierra es de  $0.5 \times 10^{-4}$  T, ¿cuál es la fem inducida entre la punta del aspa y el eje central?
24. Un aspa de metal gira con rapidez constante en el campo magnético terrestre como en la figura 31.7. La rotación ocurre en una región donde la componente del campo magnético terrestre perpendicular al plano de rotación es  $3.3 \times 10^{-5}$  T. Si el aspa tiene 1 m de longitud y su velocidad angular es  $5\pi$  rad/s, ¿cuál es la diferencia de potencial desarrollada entre sus extremos?
25. Una barra delgada rígida conductora de longitud  $L$  está girando mecánicamente con una velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje perpendicular a la barra y a través de su centro. Si un campo magnético uniforme existe paralelo al eje de rotación de la barra, a) demuestre que la fem inducida entre el centro de la barra y uno de sus extremos es proporcional a  $L^2$ . b) Evalúe la magnitud de esta fem para  $L = 0.2$  m,  $\omega = 60$  rad/s y  $|B| = 1.2$  T.
26. Una bobina circular de 200 vueltas de radio 10 cm se coloca en un campo magnético uniforme de 0.8 T de tal manera que el plano de la bobina es perpendicular a la dirección del campo. La bobina es girada con rapidez constante (velocidad angular constante) a través de 90° en un tiempo de 1.5 s, así que el plano de la bobina finalmente es paralelo al campo. a) Calcule la fem promedio inducida en la bobina como resultado de la rotación. b) ¿Cuál es el valor instantáneo de la fem en la bobina en el momento en que el plano de la bobina hace un ángulo de 45° con el campo magnético?
27. Utilice la ley de Lenz para dar respuesta a las siguientes preguntas concernientes a la dirección de corrientes inducidas. a) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la resistencia de la figura 31.29a cuando el imán de barra se mueve hacia la izquierda? b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la resistencia  $R$  precisamente después de que se cierra el interruptor  $S$

en el circuito de la figura 31.29b) c) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en  $R$  cuando  $I$  en la figura 31.29c disminuye rápido hasta cero? d) Una barra de cobre se mueve hacia la derecha mientras su eje se mantiene perpendicular al campo magnético, como en la figura 31.29d. Si el extremo superior de la barra es positivo en relación con el inferior, ¿cuál es la dirección del campo magnético?

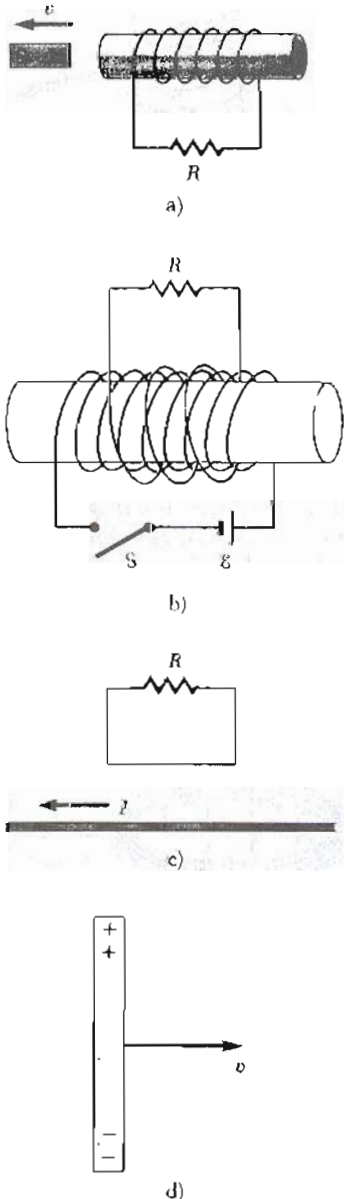


Figura 31.29 (Problema 27).

28. Una espira rectangular de masa  $M$ , resistencia  $R$  y dimensiones  $w$  de ancho y  $\ell$  de largo cae desde el reposo dentro de un campo magnético  $B$  como se muestra en la figura 31.30. La espira se acelera hasta que alcanza su velocidad terminal,  $v_t$ .
- Demuestre que

$$v_t = \frac{MgR}{B^2 w^2}$$

- Por qué  $v_t$  es proporcional a  $R$ ? c) ¿Por qué es inversamente proporcional a  $B^2$ ?

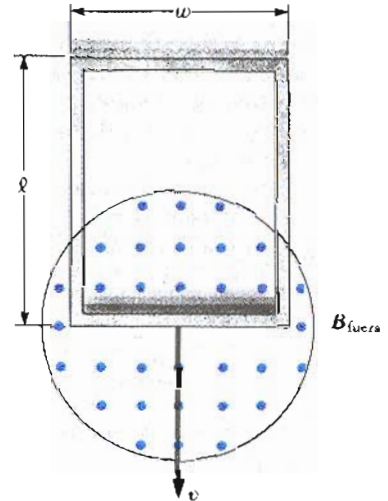


Figura 31.30 (Problemas 28 y 29).

29. A 0.15 kg de alambre se le da la forma de un rectángulo cerrado de 1 m de ancho y 1.5 m de largo y tiene una resistencia de 0.75  $\Omega$ . El rectángulo se deja caer a través de un campo magnético dirigido perpendicularmente a la dirección del movimiento del alambre (Fig. 31.30). El rectángulo se acelera hacia abajo hasta que alcanza una velocidad constante de 2 m/s con la parte superior aun afuera de la región del campo. Calcule la magnitud de  $B$ .

### Sección 31.4 Fem inducida y campo eléctrico

- La corriente en un solenoide se incrementa a una razón de 10 A/s. El área de la sección transversal del solenoide es  $\pi \text{ cm}^2$  y tiene 300 vueltas en sus 15 cm de longitud. ¿Cuál es la fem inducida que actúa en oposición al incremento de la corriente?
- Una bobina circular de una sola vuelta de radio  $R$  es coaxial a un solenoide largo de radio  $r$  y longitud  $\ell$  y tiene

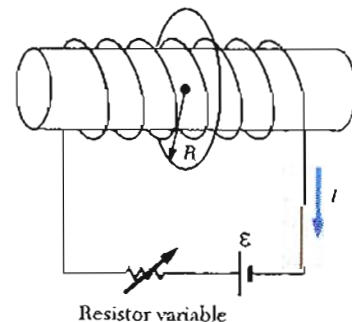


Figura 31.31 (Problema 31).

$N$  vueltas (Fig. 31.31). La resistencia variable se acciona de tal manera que la corriente en el solenoide disminuya linealmente desde 7.2 A hasta 2.4 A en 0.3 s. Si  $r = 0.03$  m,  $l = 0.75$  m y  $N = 1500$  vueltas, calcule la fem inducida en la espira circular.

32. Una bobina de 15 vueltas y radio 10 cm se coloca alrededor de un solenoide de 2 cm de radio y  $10^3$  vueltas/metro. Si la corriente en el interior del solenoide cambia como  $I = (5 \text{ A})\text{sen}(120t)$ , ¿cuál es la fem inducida en la bobina de 15 vueltas?
33. Un campo magnético dirigido hacia dentro de la página cambia con el tiempo de acuerdo con  $B = (0.03t^2 + 1.4)$  T, donde  $t$  está en s. El campo tiene una sección transversal circular de radio  $R = 2.5$  cm (Fig. 31.32). ¿Cuál es la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto  $P_1$  cuando  $t = 3$  s y  $r = 0.02$  m?

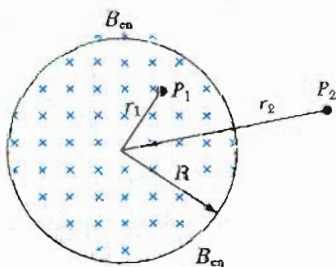


Figura 31.32 (Problema 33 y 34).

34. Para la situación descrita en la figura 31.32, el campo magnético varía como  $B = (2t^3 - 4t^2 + 0.8)$  T y  $r_2 = 2R = 5$  cm. a) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida sobre un electrón colocado en el punto  $P_2$  cuando  $t = 2$  s. b) ¿Para qué tiempo la fuerza es igual a cero?
35. Un solenoide largo con 1000 vueltas/metro y radio 2 cm lleva una corriente oscilante dada por la expresión  $I = (5 \text{ A})\text{sen}(100\pi t)$ . ¿Cuál es el campo eléctrico inducido para un radio  $r = 1$  cm desde el eje del solenoide? ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico cuando la corriente se incrementa en dirección contraria de las manecillas del reloj en la bobina?
36. Un solenoide tiene un radio de 2 cm y tiene 1000 vueltas/m. La corriente varía con el tiempo de acuerdo con la expresión  $I = 3e^{0.2t}$ , donde  $I$  está en A y  $t$  está en s. Calcule el campo eléctrico a una distancia de 5 cm del eje del solenoide para  $t = 10$  s.
37. Un anillo de aluminio de 5 cm de radio y resistencia de  $3 \times 10^{-4} \Omega$  se coloca en la parte superior de un solenoide con núcleo de aire con 1000 vueltas/metro y radio 3 cm como se muestra en la figura 31.33. En el lugar donde se coloca el anillo, el campo magnético debido a la corriente en el solenoide es la mitad del que existe en el centro del solenoide. Si la corriente en el solenoide se aumenta a razón de 270 A/s, a) ¿cuál es la corriente inducida en el anillo? b) En el centro del anillo, ¿cuál es el campo magnético producido por la corriente inducida en el anillo? c) ¿Cuál es la dirección del campo en el inciso b)?

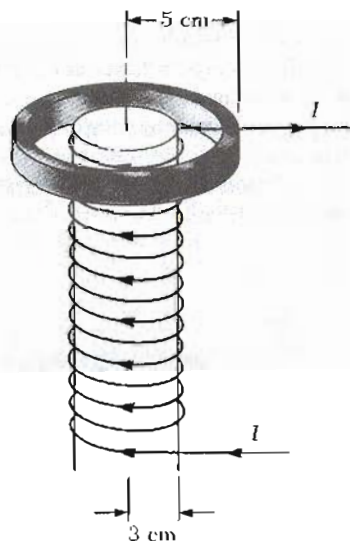


Figura 31.33 (Problema 37).

38. Una bobina circular que encierra un área de  $100 \text{ cm}^2$ , está hecha de 200 vueltas de alambre de cobre como se muestra en la figura 31.34. Inicialmente, un campo magnético uniforme de 1.1 T está dirigido perpendicularmente hacia arriba a través del plano de la bobina. La dirección del campo es invertida, así que el campo magnético final tiene una magnitud de 1.1 T dirigido hacia abajo a través de la bobina. Durante el tiempo el campo está cambiando su dirección, ¿cuánta carga fluye a través de la bobina si la bobina está conectada a una resistencia de  $5 \Omega$  como se muestra?

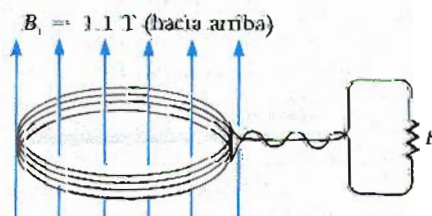


Figura 31.34 (Problema 38).

\*Sección 31.5 Generadores y motores

39. Una bobina cuadrada ( $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ ) que consta de 100 vueltas de alambre gira alrededor de un eje vertical a 1500 rpm, como se indica en la figura 31.35. La componente horizontal del campo magnético terrestre en la región donde se coloca la espira es de  $2 \times 10^{-4}$  T. Calcule la máxima fem inducida en la bobina por el campo magnético terrestre.
40. Una bobina circular de 400 vueltas de 15 cm de radio está girando alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético de 0.02 T. ¿Cuál es la velocidad angular que producirá una fem inducida máxima de 4 V?
41. Una espira de área  $0.1 \text{ m}^2$  está girando a 60 rev/s con su eje de rotación perpendicular a un campo magnético de 0.2 T. a) Si existen 1000 vueltas en la espira, ¿cuál es el

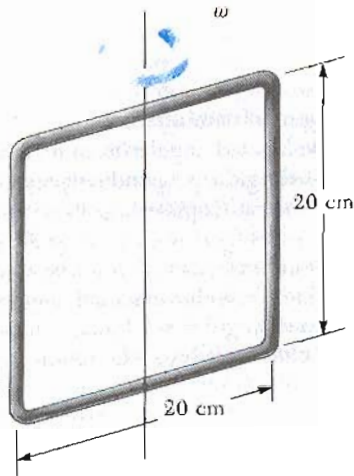


Figura 31.35 (Problema 39).

arriba del eje de rotación? d) Grafique la fem en función del tiempo en cada caso.

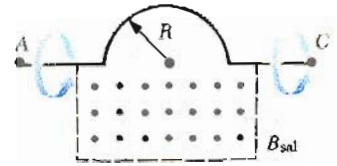


Figura 31.36 (Problema 46).

máximo voltaje inducido en la espira? b) Cuando el máximo voltaje ocurre, ¿cuál es la orientación de la espira respecto del campo?

- 42. Una bobina de un generador AC sencillo desarrolla una fem sinusoidal de valor máximo 90.4 V y frecuencia 60 Hz. Si la bobina tiene dimensiones de 10 cm por 20 cm y gira en un campo magnético de 1.0 T, ¿cuántas vueltas tiene su alambrado?
- 43. Un solenoide largo, cuyo eje coincide con el eje x, consta de 200 vueltas por metro de alambre que lleva una corriente estable de 15 A. Una bobina formada por 30 vueltas apretadas de alambre delgado tiene un radio de 8 cm. La bobina se coloca en el interior del solenoide, montada en un eje que está sobre su diámetro y es paralelo al eje y. La bobina es entonces girada con una velocidad de  $4\pi$  radianes por segundo. (El plano de la bobina está en el plano yz para  $t = 0$ .) Determine la fem desarrollada en la bobina.
- 44. Considere una bobina rectangular de 100 vueltas de área de sección transversal  $0.06 \text{ m}^2$  que gira con una velocidad angular de 20 rad/s alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético de 2.5 T. a) Grafique el voltaje inducido como función del tiempo sobre un periodo completo de rotación. b) Sobre el mismo conjunto de ejes, grafique el voltaje inducido en la bobina para una rotación si la velocidad angular es de 40 rad/s.
- 45. a) ¿Cuál es el máximo momento desarrollado por un motor eléctrico si tiene 80 vueltas de alambre devanadas sobre una bobina rectangular de dimensiones 2.5 cm por 4 cm? Suponga que el motor utiliza 10 A de corriente y que un campo magnético uniforme de 0.8 T existe dentro del motor. b) Si el motor gira a 3600 rev/min, ¿cuál es la potencia (pico) producida por el motor?
- 46. Un conductor semicircular de radio  $R = 0.25 \text{ cm}$  está girando alrededor del eje AC a razón de 120 revoluciones por minuto (Fig. 31.36). Un campo magnético uniforme, en toda la mitad inferior de la figura, dirigido hacia afuera de la página, tiene una magnitud de 1.3 T. a) Calcule el valor máximo de la fem inducida en el conductor. b) ¿Cuál es el valor de la fem promedio para cada rotación? c) ¿Cuál sería la respuesta para los incisos a) y b) si el campo se extiende hasta una distancia R por

- 47. Una pequeña bobina rectangular compuesta de 50 vueltas de alambre tiene un área de  $30 \text{ cm}^2$  y lleva una corriente de 1.5 A. Cuando el plano de la bobina hace un ángulo de  $30^\circ$  con un campo magnético uniforme, el momento de una fuerza sobre la bobina es de  $0.1 \text{ N} \cdot \text{m}$ . ¿Cuál es la intensidad del campo magnético?
- 48. Un imán de barra se gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje como se muestra en la figura 31.37. Una delgada espira rectangular conductora rodea al imán, al tiempo  $t = 0$ , el imán está orientado como se muestra. Grafique la corriente inducida en la espira como función del tiempo, tomando las corrientes que circulan en dirección contraria a las manecillas del reloj como positivas y en la dirección de las manecillas del reloj como negativas.

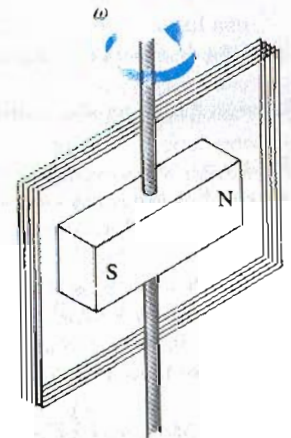


Figura 31.37 (Problema 48).

**\*Sección 31.6 Corrientes de Eddy (parásitas)**

- 49. Una bobina rectangular con resistencia R tiene N vueltas, cada una de largo  $\ell$  y ancho  $w$  como se muestra en la figura 31.38. La bobina se mueve hacia un campo magnético uniforme B con velocidad v. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre la

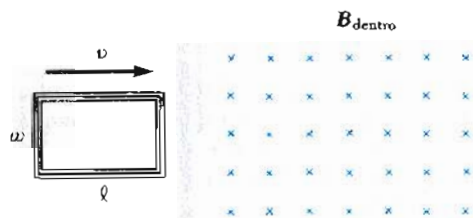


Figura 31.38 (Problema 49).

espira: a) al entrar ésta al campo magnético?, b) ¿cuando se está moviendo dentro del campo?, c) ¿cuando ésta sale del campo magnético?

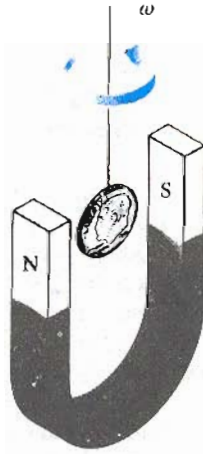


Figura 31.39 (Problema 50).

50. Una moneda se suspende de tal forma que pueda girar entre los polos de un potente imán de herradura como se muestra en la figura 31.39. La moneda gira con rapidez angular constante  $\omega$  alrededor del eje vertical. Sea  $\theta$  el ángulo entre la dirección de  $B$  y la normal a la cara de la moneda; bosqueje la gráfica del momento de una fuerza debida a las corrientes inducidas como función de  $\theta$  para el intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Sección 31.7 Las maravillosas ecuaciones de Maxwell**

- 51. Un protón se mueve a través de un campo eléctrico dado por  $E = 50j$  V/m y un campo magnético  $B = (0.2i + 0.3j + 0.4k)$  T. Determine la aceleración del protón cuando tiene una velocidad de  $v = 200i$  m/s.
- 52. Un electrón se mueve a través de un campo eléctrico uniforme  $E = (2.5i + 5.0j)$  V/m y un campo magnético  $B = 0.4k$  T. Determine la aceleración del electrón cuando tiene una velocidad  $v = 10i$  m/s.

**PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS**

53. Una barra conductora se mueve con velocidad constante  $v$  perpendicular a un alambre largo recto que lleva una corriente  $I$  como en la figura 31.40. Demuestre que la fem generada entre los extremos de la barra está dada por

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} \ell$$

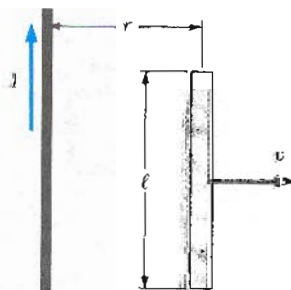


Figura 31.40 (Problema 53).

54. En este caso, observe que la fem disminuye cuando  $r$  aumenta como era de esperarse.

La figura 31.41 muestra la gráfica de la fem inducida en función del tiempo para una bobina de  $N$  vueltas que gira con una velocidad angular  $\omega$  en un campo magnético uniforme dirigido perpendicularmente al eje de rotación de la bobina. Copie esta gráfica (a mayor escala) y sobre los mismos ejes muestre la gráfica de  $\mathcal{E}(t)$  en función del tiempo cuando: a) el número de vueltas en la bobina se duplica, b) la velocidad angular se duplica y c) la velocidad angular se duplica mientras que el número de vueltas se reduce a la mitad.

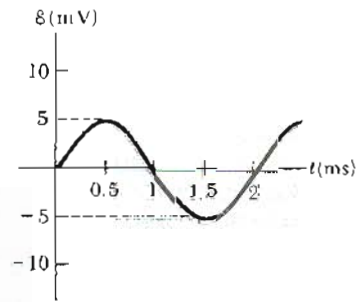


Figura 31.41 (Problema 54).

55. Considere un solenoide largo de longitud  $\ell$  que contiene un núcleo de permeabilidad  $\mu$ . El material del núcleo se magnetiza al aumentar la corriente en la bobina, así como cuando se produce un campo cambiante  $dB/dt$ . a) Demuestre que la rapidez a la cual se hace trabajo al inducir una fem en la bobina está dada por

$$\frac{dW}{dt} = I\mathcal{E} = HA\ell \frac{dB}{dt}$$

donde  $A$  es el área del solenoide. (Sugerencia: utilice la ley de Faraday para determinar  $\mathcal{E}$  y haga uso de la ecuación 30.34.) b) Utilice el resultado de la parte a) para demostrar que el trabajo realizado en un ciclo completo de histéresis es igual al área encerrada por la curva en un gráfica de  $B$  en función de  $H$  (Fig. 30.31).

56. Indique la dirección del campo eléctrico entre las placas del capacitor de la figura 31.42 si el campo magnético aumenta linealmente con el tiempo y está dirigido hacia dentro del papel. Dé una breve explicación.

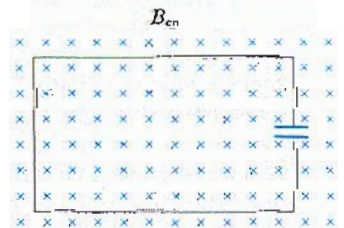


Figura 31.42 (Problema 56).

57. Una bobina rectangular de  $N$  vueltas, dimensiones  $\ell$  y  $w$  y una resistencia total  $R$  gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje  $y$  y en una región donde un campo magnético  $B$  está dirigido a lo largo del eje  $x$  (Fig. 31.15a). La rotación se inicia cuando el plano de la bobina es perpendicular a la dirección de  $B$  para  $t = 0$ . Sea  $\omega = 30 \text{ rad/s}$ ,  $N = 60$  vueltas,  $\ell = 0.10 \text{ m}$ ,  $w = 0.20 \text{ m}$ ,  $R = 10 \text{ } \Omega$  y  $B = 1.0 \text{ T}$ . Calcule: a) la máxima fem inducida en la bobina, b) la máxima rapidez de cambio del flujo magnético a través de la bobina, c) el valor de la fem inducida para  $t = 0.05 \text{ s}$  y d) el momento de una fuerza ejercido sobre la espira por el campo magnético en el instante que la fem es máxima.
58. Un alambre horizontal es libre de deslizarse sobre rieles verticales de un marco conductor como en la figura 31.43. El alambre tiene una masa  $m$  y longitud  $\ell$  y la resistencia del circuito es  $R$ . Si un campo magnético uniforme está dirigido perpendicular al marco, ¿cuál es la velocidad terminal del alambre cuando cae bajo la acción de la gravedad? (Desprecie la fricción mecánica.)

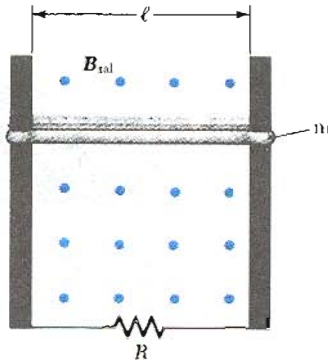


Figura 31.43 (Problema 58).

59. Un solenoide con 200 vueltas/m es alimentado con una corriente que varía en el tiempo de acuerdo con  $I = 4 \text{ sen}(120\pi t)$ , donde  $I$  está en A y  $t$  está en s. Una pequeña bobina circular coaxial de 40 vueltas y radio de  $r = 5 \text{ cm}$  se coloca en el interior del solenoide cerca de su centro. a) Encuentre una expresión que describa la manera en la cual la fem en la pequeña bobina varía en función del tiempo. b) ¿Con qué rapidez promedio se disipa la energía en la pequeña bobina si el alambrado tiene una resistencia total de  $8 \text{ } \Omega$ ?
60. Un disco conductor de radio  $0.3 \text{ m}$  gira alrededor de un eje que pasa a través de su centro con una velocidad angular constante de  $\omega = 15 \text{ rad/s}$ . Un campo magnético uniforme de  $0.8 \text{ T}$  actúa perpendicularmente al plano del disco (es decir, paralelo al eje de rotación). Calcule la diferencia de potencial desarrollada entre la orilla del disco y el eje del disco.
61. Considere de nuevo la situación descrita en el ejemplo 31.4. Sea la longitud de la barra entre los rieles de deslizamiento de  $25 \text{ cm}$ , la magnitud del campo  $B = 0.8 \text{ T}$ , la resistencia estacionaria  $R = 5 \text{ } \Omega$  y la velocidad inicial  $v_0 = 1.0 \text{ m/s}$ . Si la velocidad de la barra disminuye hasta  $0.4v_0$  en  $0.3 \text{ s}$ , ¿cuál es el valor de  $m$ , la masa de la barra?
62. Un alambre recto es paralelo al lado largo de una espira sencilla plana rectangular como en la figura 31.44. a) Si

la corriente en el alambre largo varía con el tiempo como  $I = I_0 e^{-t/\tau}$ , demuestre que la fem inducida en la espira está dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 b}{2\pi \tau} I \ln \left( 1 + \frac{a}{d} \right)$$

- b) Calcule el valor para la fem inducida para  $t = 5 \text{ s}$ , tomando  $I_0 = 10 \text{ A}$ ,  $d = 3 \text{ cm}$ ,  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 15 \text{ cm}$  y  $\tau = 5 \text{ s}$ .

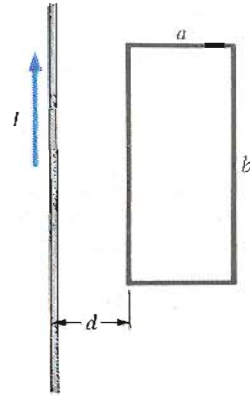


Figura 31.44 (Problema 62).

63. Una barra conductora de longitud  $\ell$  se mueve con velocidad  $v$  a lo largo de una dirección paralela a un alambre largo que lleva una corriente estable  $I$ . El eje de la barra se mantiene perpendicular al alambre con el extremo cercano siempre a una distancia  $r$ , como se muestra en la figura 31.45. Demuestre que la fem inducida en la barra está dada por

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln \left( 1 + \frac{\ell}{r} \right)$$

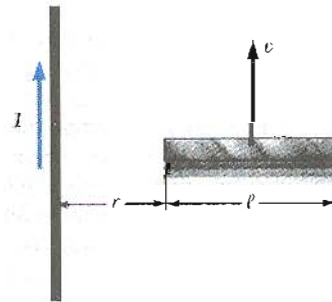


Figura 31.45 (Problema 63).

64. Una espira rectangular de dimensiones  $\ell$  y  $w$  se mueve con una velocidad constante  $v$  respecto a un alambre largo que lleva una corriente  $I$  en el plano de la espira (Fig. 31.46). La resistencia total de la espira es  $R$ . Deduzca una expresión que dé la corriente en la espira en el instante que el lado cercano está a una distancia  $r$  del alambre.



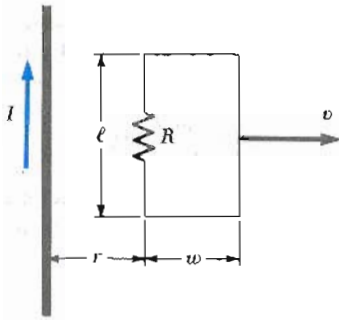


Figura 31.46 (Problema 64).

65. Una espira cuadrada de alambre con lado de  $a = 2$  m está perpendicular al campo magnético de la tierra en un punto donde  $B = 15 \mu\text{T}$ , como en la figura 31.47. La resistencia total de la espira y los alambres de conexión de la espira al galvanómetro es de  $0.5 \Omega$ . Si la espira de repente se colapsa por la fuerzas horizontales que se muestran, ¿cuál sería la carga total que pasaría a través del galvanómetro?

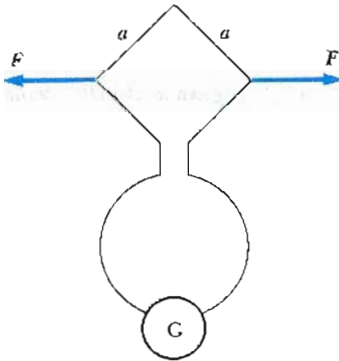


Figura 31.47 (Problema 65).

66. Los valores del campo magnético a menudo se determinan mediante el uso de un dispositivo conocido como *bobina exploratoria* (sonda magnética). Esta técnica depende de la medición de la carga total que pasa por una bobina en un intervalo de tiempo durante el cual el flujo magnético que enlaza los devanados cambia, ya sea a causa del movimiento de la bobina o debido al cambio de valor en  $B$ . a) Demuestre que si el flujo a través de la bobina cambia de  $\Phi_1$  a  $\Phi_2$  la carga transferida a través de la bobina entre  $t_1$  y  $t_2$  estará dada por  $Q = N(\Phi_2 - \Phi_1)/R$ , donde  $R$  es la resistencia de la bobina y circuitos asociados (galvanómetro). b) Como ejemplo específico, calcule  $B$  cuando una bobina de 100 vueltas de resistencia  $200 \Omega$  y área de sección transversal de  $40 \text{ cm}^2$ , produce los siguientes resultados: una carga de  $5 \times 10^{-4} \text{ C}$  pasa a través de la bobina cuando se hace girar en un campo uniforme desde la posición en la que el plano de la bobina es perpendicular al campo hasta una posición donde el plano de la bobina es paralelo al campo.
67. Una bobina circular plana de  $N$  vueltas tiene un diámetro  $D$  y una resistencia  $R$ . La bobina se orienta con su

eje paralelo a un campo magnético  $B$  y los extremos del alambre se sacan de la bobina para conectarlos con un dispositivo capaz de medir la carga total que pasa a través de ella. Si cuando se gira  $180^\circ$  la bobina rápidamente sobre un eje perpendicular al campo, el dispositivo de medida da una lectura de carga total  $Q$ , exprese la magnitud del campo magnético en términos de  $N$ ,  $D$ ,  $R$  y  $Q$ .

68. La figura 31.48 muestra un arreglo similar al discutido en el ejemplo 31.4, excepto que en este caso la barra se jala horizontalmente a través de un par de rieles paralelos por una cuerda (se supone que sin masa) que pasa sobre una polea ideal y a la cual está sujeta y suspendida una masa  $M$ . El campo magnético uniforme tiene una magnitud  $B$ , la barra deslizante tiene una masa  $m$  y la distancia entre los rieles es  $l$ . Los rieles son conectados en uno de sus extremos por una resistencia de carga  $R$ . Deduzca una expresión que dé el valor de la velocidad horizontal como función del tiempo, suponiendo que la masa suspendida se dejó caer cuando la barra está en reposo para  $t = 0$ . Suponga que no hay fricción entre la barra y los rieles.

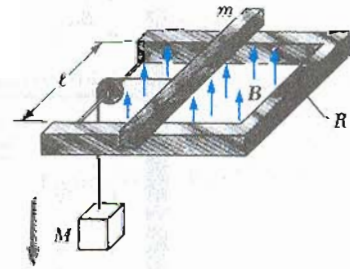


Figura 31.48 (Problema 68).

69. Una tira delgada metálica puede deslizarse hacia abajo por un par de rieles sin fricción y de resistencia despreciable, que están conectados en el extremo inferior e inclinados un ángulo  $\theta$  respecto de la horizontal. Un campo magnético uniforme  $B$  está dirigido verticalmente hacia arriba en esa región como se muestra en la figura 31.49. La tira tiene una masa  $m = 35 \text{ g}$ , resistencia  $R = 20 \Omega$  y la longitud entre los rieles  $l = 0.3 \text{ m}$ . a) Deduzca una expresión general para la velocidad terminal de la tira. b) Calcule la velocidad terminal adquirida por la tira a lo largo de un plano inclinado  $30^\circ$  y  $B = 1.5 \text{ T}$ .

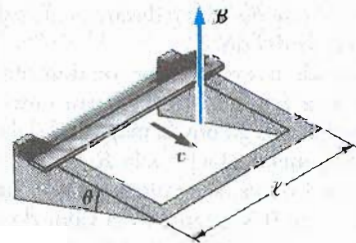


Figura 31.49 (Problema 69).

70. Dos solenoides infinitamente largos (vistos en sección transversal) se colocan en el circuito que se ve en la figura 31.50. Los solenoides tienen radios de 0.1 m y 0.15 m, respectivamente. La magnitud del campo en el interior de cada uno es igual y se aumenta a razón de 100 T/s. ¿Cuál es la corriente en cada resistencia?

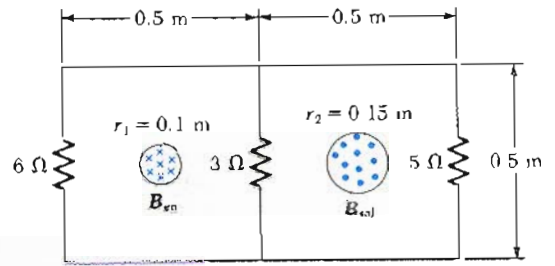


Figura 31.50 (Problema 70).

## Inductancia



La potencia hidroeléctrica se genera utilizando la energía mecánica del agua y la inducción electromagnética.  
(© Tomas D. Friedmann 1971/Photo Researchers, Inc.)

**E**n el capítulo anterior, se vio que la corriente y la fem se inducen en un circuito cuando el flujo magnético que atraviesa el circuito varía en el tiempo. El fenómeno de la inducción magnética tiene algunas consecuencias prácticas, las que se describirán en este capítulo. Primero, se describirá el efecto conocido como *autoinducción*, en el cual una corriente que varía en el tiempo induce una fem en el conductor que se opone a la corriente que establece la fem externa. Este fenómeno se basa en el principio de operación del elemento conocido como *inductor*, el cual juega un papel importante en los circuitos de corriente alterna. Se discutirá el concepto de energía almacenada en el campo magnético de un inductor y la densidad de energía asociada con un campo magnético.

A continuación se estudiará cómo se puede inducir una fem en un circuito como resultado de un flujo variable producido por un circuito externo, que es el principio básico de la *inducción mutua*. Finalmente, se examinarán las características de circuitos compuestos por inductores, resistencias y condensadores en diferentes combinaciones. Por ejemplo, se encontrará que en un circuito compuesto por un inductor y un capacitor, la carga y la corriente oscilan como si fuera un oscilador armónico simple. Estas oscilaciones son consecuencia de la transferencia continua de la energía entre el campo eléctrico de un capacitor cargado y el campo magnético producido por una corriente alterna en el inductor.

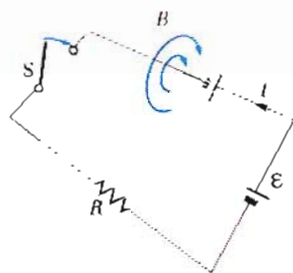


Figura 32.1 Después de que se cierra el interruptor, la corriente produce un flujo magnético a través de la espira. A medida que la corriente aumenta hacia su valor de equilibrio, el flujo cambia con el tiempo e induce una fem en la espira. La batería no etiquetada es un símbolo de la fem autoinducida.

### 32.1 AUTOINDUCTANCIA

Considérese un circuito aislado formado por un interruptor, una resistencia y una fem como fuente, como en la figura 32.1. Cuando se cierra el interruptor, la corriente no alcanza su valor máximo,  $\mathcal{E}/R$ , instantáneamente. La ley de la inducción electromagnética (ley de Faraday) impide que esto ocurra. Lo que sucede es lo siguiente: al incrementarse la corriente en el tiempo, se genera a través de la espira un flujo magnético que se incrementa en el tiempo. Este aumento en el flujo induce al circuito una fem que se opone al cambio del flujo magnético a través de la espira. Por la ley de Lenz, el campo eléctrico inducido en el alambre tiene sentido opuesto al de la corriente que circula por el circuito, y esta contra fem produce un incremento *gradual* en la corriente. Este efecto se llama *autoinducción*, ya que el flujo variable a través del circuito se produce por el mismo circuito. La fem producida se llama **fem autoinducida**. Posteriormente, en la sección 32.4, se describe un efecto que se le relaciona llamado *inducción mutua* en el cual se induce en un circuito una fem como resultado de las variaciones del flujo magnético que se producen en otro circuito.

Para dar una descripción cuantitativa de la autoinducción, partiremos de la ley de inducción de Faraday, la cual dice que la fem inducida es igual al negativo de la razón de cambio del flujo magnético en el tiempo. Como el flujo magnético es proporcional al campo magnético, que a su vez es proporcional a la corriente en el circuito, *la fem autoinducida siempre será proporcional a la razón de cambio de la corriente en el tiempo*. Para una bobina de  $N$  espiras muy juntas y de geometría fija (una bobina toroidal o un solenoide ideal) se encuentra que

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (32.1)$$

#### Fem inducida

donde  $L$  es una constante de proporcionalidad, llamada **inductancia** del dispositivo, que depende de las características geométricas y físicas del circuito. De esta ecuación, se puede ver que la inductancia de una bobina de  $N$  espiras se puede calcular con la ecuación

$$L = \frac{N\Phi_m}{I} \quad (32.2)$$

#### Inductancia de una bobina de $N$ vueltas

donde se supone que el flujo a través de cada espira es el mismo. Esta ecuación se utilizará para calcular la inductancia de algunas geometrías específicas.

De la ecuación 32.1, también se puede escribir la inductancia como la relación

$$L = - \frac{\mathcal{E}}{dI/dt} \quad (32.3)$$

#### Inductancia

Esta ecuación se toma como la definición de la inductancia de cualquier bobina independientemente de su forma, dimensiones o características del material. Así como la resistencia es una medida de la oposición a la corriente, la inductancia es una medida de la oposición al *cambio* en la corriente.

La unidad SI de la inductancia es el **henry (H)**, el cual, de la ecuación 32.3, se puede ver que equivale a 1 volt-segundo por ampere:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

Como se podrá ver, *la inductancia de un dispositivo depende únicamente de su geometría*. Sin embargo, el cálculo de la inductancia de cualquier dispositivo

puede ser muy difícil para geometrías complejas. En los siguientes ejemplos se resuelven algunos casos simples para los cuales la inductancia se determina con facilidad.

### EJEMPLO 32.1 Inductancia de un solenoide

Calcule la inductancia de un solenoide devanado uniformemente con  $N$  espiras y longitud  $\ell$ . Se supone que  $\ell$  es muy grande comparada con el radio y que el núcleo del solenoide es aire.

**Solución** En este caso, puede considerarse que el campo dentro del solenoide es uniforme y se puede calcular con la ecuación 30.20:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

donde  $n$  es el número de vueltas por unidad de longitud,  $N/\ell$ . El flujo a través de cada vuelta se obtiene de

$$\Phi_m = BA = \mu_0 \frac{NA}{\ell} I$$

en donde  $A$  es el área de la sección transversal del solenoide. Utilizando esta expresión y la ecuación 32.2 se encuentra

$$L = \frac{N\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \quad (32.4)$$

Esto muestra que  $L$  depende de los factores geométricos y es proporcional al cuadrado del número de vueltas. Como  $N = n\ell$ , el resultado se puede expresar en la forma

$$L = \mu_0 \frac{(n\ell)^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell = \mu_0 n^2 (\text{volumen}) \quad (32.5)$$

donde  $A\ell$  es el volumen del solenoide.

### EJEMPLO 32.2 Cálculo de la inductancia y de la fem

a) Calcule la inductancia de un solenoide que tiene 300 vueltas si la longitud del solenoide es de 25 cm y el área de la sección transversal es  $4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ .

**Solución** Utilizando la ecuación 32.4 se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}) \frac{(300)^2 (4 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{25 \times 10^{-2} \text{ m}} \\ &= 1.81 \times 10^{-4} \text{ Wb/A} = \mathbf{0.181 \text{ mH}} \end{aligned}$$

b) Calcule la fem autoinducida en el solenoide descrito en a) si la corriente que circula por la inductancia decrece a razón de 50 A/s.

**Solución** Utilizando la ecuación 32.1 y dado que  $dI/dt = 50 \text{ A/s}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -L \frac{dI}{dt} = -(1.81 \times 10^{-4} \text{ H})(-50 \text{ A/s}) \\ &= \mathbf{9.05 \text{ mV}} \end{aligned}$$

## 32.2 CIRCUITOS RL

Un circuito que contiene una bobina, que puede ser un solenoide, tiene una autoinductancia que impide que la corriente se incremente o decrezca instantáneamente. Todo elemento de un circuito que tenga una inductancia grande se llama *inductor*. En un circuito, el símbolo para un inductor es . Siempre se supondrá que la autoinductancia de un circuito es despreciable comparada con la del inductor.

Considérese un circuito constituido por una resistencia, un inductor y una batería como se muestra en la figura 32.2. Se considera que la resistencia interna de la batería es despreciable. Supóngase que el interruptor  $S$  se cierra en  $t = 0$ . La corriente empezará a crecer, y debido a este aumento, el inductor genera una fem (también se le conoce como *contra fem*) que se opone al incremento de la corriente. En otras palabras, el inductor actúa como una batería cuya polaridad es opuesta a la de la batería real en el circuito. La contrafem producida por el inductor está dada por

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$$

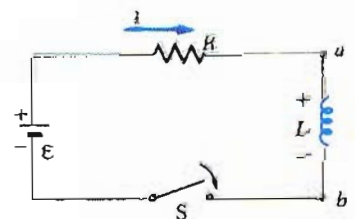


Figura 32.2 Un circuito en serie RL. A medida que la corriente se incrementa hacia su valor máximo, el inductor genera una fem que se opone al incremento de la corriente.

Ya que la corriente se está incrementando,  $di/dt$  es positivo; por lo tanto,  $\mathcal{E}_L$  es negativa. Esto corresponde al hecho de que hay caída de potencial al ir de  $a$  hacia  $b$  a través del inductor. Por esta razón, el punto  $a$  está a un mayor potencial que el punto  $b$ , como se muestra en la figura 32.2.

Con esto en mente, se puede aplicar la ecuación de mallas de Kirchhoff a este circuito:

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (32.6)$$

donde  $IR$  es la caída de potencial a través de la resistencia. Se debe resolver esta ecuación diferencial y su solución es similar en forma a la de los circuitos  $RC$  (Sec. 28.4).

Para obtener la solución matemática de la ecuación 32.6, es conveniente hacer un cambio de variable definiendo  $x = \frac{\mathcal{E}}{R} - I$ , de tal forma que  $dx = -dI$ . Con estas sustituciones, la ecuación 32.6 se puede escribir de la siguiente forma

$$x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} dt$$

Integrando la última expresión se obtiene

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L} t$$

donde se ha tomado  $-\ln x_0$ . Al tomar el antilogaritmo de este resultado, se obtiene

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

Como en  $t = 0$ ,  $I = 0$ , se puede ver que  $x_0 = \mathcal{E}/R$ . En consecuencia, la última expresión equivale a

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

que es la solución de la ecuación 32.6.

Esta solución matemática de la ecuación 32.6, que representa la corriente como función del tiempo, también se puede escribir de la siguiente forma:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (32.7)$$

donde la constante  $\tau$  es la **constante de tiempo** del circuito  $RL$ :

$$\tau = L/R \quad (32.8)$$

Se deja como ejercicio mostrar que las dimensiones de  $\tau$  son de tiempo. Física-mente,  $\tau$  es el tiempo que tarda la corriente en alcanzar  $(1 - e^{-1}) = 0.63$  de su valor final,  $\mathcal{E}/R$ .

La figura 32.3 representa una gráfica de la corriente contra el tiempo, donde  $I = 0$  en  $t = 0$ . Nótese que la corriente alcanza asintóticamente el valor final de  $\mathcal{E}/R$ , y sucede cuando  $t = \infty$ . Esto se puede ver igualando a cero  $dI/dt$  en la ecuación 32.6 (en equilibrio, el cambio en la corriente es cero) y se resuelve para la corriente. Se puede ver que la corriente se incrementa rápido al principio y después se aproxima lentamente a su valor de equilibrio  $\mathcal{E}/R$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Es posible mostrar que la ecuación 32.7 es una solución de la ecuación 32.6 calculando la derivada  $dI/dt$  y pidiendo que  $I = 0$  en  $t = 0$ . Al calcular la primera derivada respecto al tiempo de la ecuación 32.7, se obtiene

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau} \quad (32.9)$$

La sustitución de este resultado junto con la ecuación 32.7 se verifica que la solución encontrada satisface la ecuación 32.6. Esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} &= 0 \\ \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})R - L \left( \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau} \right) &= 0 \\ \mathcal{E} - \mathcal{E} + \mathcal{E}e^{-t/\tau} - \mathcal{E}e^{-t/\tau} &= 0 \end{aligned}$$

que comprueba la solución.

De la ecuación 32.9 se puede ver que la rapidez con que aumenta la corriente,  $dI/dt$ , es un máximo (igual a  $\mathcal{E}/L$ ) en  $t = 0$  y decae exponencialmente a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  (Fig. 32.4).

Ahora considérese el circuito RL de la figura 32.5. El circuito contiene dos interruptores que pueden trabajar en forma alterna, esto es, cuando uno está abierto el otro se cierra. Si  $S_1$  permanece cerrado por un periodo de tiempo lo suficientemente largo que permita a la corriente alcanzar su valor de equilibrio,  $\mathcal{E}/R$ . Si  $S_1$  se abre y  $S_2$  se cierra en  $t = 0$ , se tiene un circuito sin batería ( $\mathcal{E} = 0$ ). Al aplicar la ley de los circuitos de Kirchhoff a la espira superior, la cual contiene a la resistencia y al inductor, se obtiene la expresión

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (32.10)$$

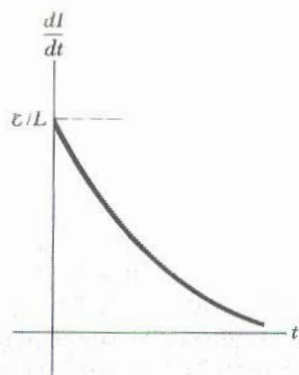


Figura 32.4 Gráfica de  $dI/dt$  en función del tiempo del circuito RL de la figura 32.2. La razón de cambio de la corriente es un máximo en  $t = 0$  cuando el interruptor se cierra. La relación  $dI/dt$  decrece exponencialmente con el tiempo cuando  $I$  aumenta hacia su valor máximo.

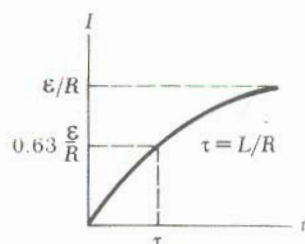


Figura 32.3 Gráfica de la corriente en función del tiempo del circuito RL de la figura 32.2. El interruptor se cierra en  $t = 0$  y la corriente aumenta hacia su valor máximo,  $\mathcal{E}/R$ . La constante de tiempo  $\tau$  es el tiempo que transcurre para que  $I$  alcance 63% de su valor máximo.

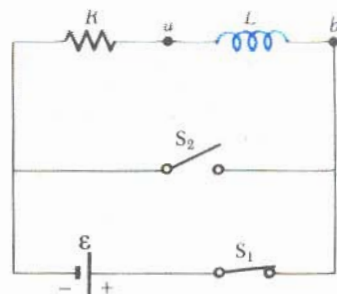
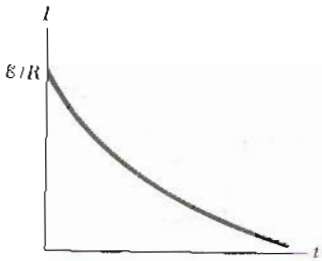


Figura 32.5 Un circuito RL con dos interruptores. Cuando  $S_1$  está cerrado y  $S_2$  abierto como se muestra, la batería forma parte del circuito. En el instante en que  $S_2$  se cierra y  $S_1$  se abre, la batería ya no forma parte del circuito.



Se deja como problema (Probl. 18) mostrar que la solución de esta ecuación diferencial es

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = I_0 e^{-t/\tau} \quad (32.11)$$

donde la corriente en  $t = 0$  está dada por  $I_0 = \mathcal{E}/R$  y  $\tau = L/R$ .

La gráfica de la corriente como función del tiempo (Fig. 32.6) muestra que la corriente decrece continuamente con el tiempo, como es de esperarse. Además, nótese que la pendiente,  $dI/dt$ , siempre es negativa y tiene su valor máximo en  $t = 0$ . Una pendiente negativa significa que  $\mathcal{E}_L = -L(dI/dt)$  es ahora *positivo*; esto es, el punto *a* se encuentra a un potencial más bajo que el punto *b* en la figura 32.5.

**Figura 32.6** La corriente en función del tiempo del circuito de la figura 32.5. En  $t < 0$ ,  $S_1$  está cerrado y  $S_2$  abierto. En  $t = 0$ ,  $S_2$  se cierra y  $S_1$  se abre y la corriente tiene su valor máximo  $\mathcal{E}/R$ .

**EJEMPLO 32.3 Constante de tiempo en un circuito RL** □

El circuito de la figura 32.7a consta de un inductor de 30-mH, una resistencia de 6-Ω y una batería de 12-V. El interruptor se cierra en  $t = 0$ . a) Encuentre la constante de tiempo del circuito.

**Solución** La constante de tiempo está dada por la ecuación 32.8

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30 \times 10^{-3} \text{ H}}{6 \Omega} = 5.00 \text{ ms}$$

b) Calcule la corriente en el circuito en  $t = 2$  ms.

**Solución** Se utiliza la ecuación

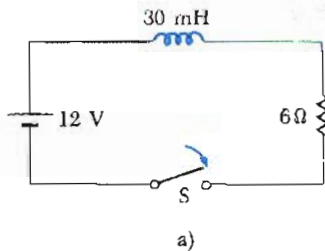
32.7 para la corriente como función del tiempo (con  $t$  y  $\tau$  en ms), y se encuentra que en  $t = 2$  ms

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{12 \text{ V}}{6 \Omega} (1 - e^{-0.4}) = 0.659 \text{ A}$$

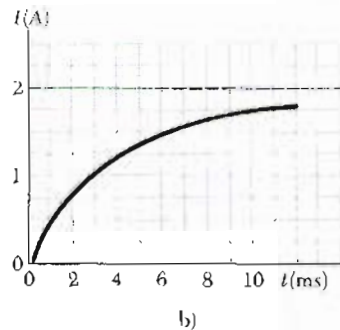
La figura 32.7b muestra una gráfica de la ecuación 32.7 para este circuito.

**Ejercicio 1** Calcule la corriente en el circuito y el voltaje a través de la resistencia después de que ha transcurrido una constante de tiempo.

**Respuesta** 1.26 A, 7.56 V.



**Figura 32.7** (Ejemplo 32.3) a) El interruptor en el circuito RL se cierra en  $t = 0$ . b) La gráfica de la corriente como función del tiempo para el circuito en a).



**32.3 ENERGÍA EN UN CAMPO MAGNÉTICO**

En la sección anterior se encontró que la fem inducida por un inductor impide a la batería establecer instantáneamente una corriente. Por lo tanto, la batería tiene que realizar un trabajo contra el inductor para generar una corriente. Parte de la energía suministrada por la batería se convierte en calor en la resistencia por el efecto Joule, mientras que la energía restante se almacena en el campo magnético del inductor. Si se multiplica cada término de la ecuación 32.6 por la corriente  $I$  y se ordenan los términos de la expresión, se tiene



$$I\mathcal{E} = I^2R + LI \frac{dI}{dt} \quad (32.12)$$

Esta ecuación dice que la razón con la cual la batería suministra energía,  $I\mathcal{E}$ , es igual a la suma del calor perdido en la resistencia por efecto Joule,  $I^2R$ , y la razón con la cual se almacena energía en el inductor,  $LI(dI/dt)$ . Por lo tanto, la ecuación 32.12 es una expresión de la conservación de la energía. Si  $U_m$  designa la energía almacenada en el inductor para cualquier tiempo, entonces la razón  $dU_m/dt$  con la cual se almacena energía en el inductor se puede escribir en la forma

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

Para encontrar la energía total almacenada en el inductor, se puede escribir esta ecuación como  $dU_m = LI dI$  e integrar:

$$U_m = \int_0^{U_m} dU_m = \int_0^I LI dI$$

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (32.13)$$

Energía almacenada en un inductor

donde  $L$  es constante y se ha sacado de la integral. La ecuación 32.13 representa la energía almacenada como energía magnética en el campo del inductor cuando la corriente es  $I$ . Nótese que la ecuación es similar en forma a la ecuación de la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor,  $Q^2/2C$ . En cualquier caso, se puede ver que se realiza un trabajo para establecer un campo.

También se puede determinar la energía por unidad de volumen, o densidad de energía, almacenada en un campo magnético. Para facilitar la comprensión, considérese un solenoide cuya inductancia está dada por la ecuación 32.5:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

El campo magnético de un solenoide se obtiene de

$$B = \mu_0 n I$$

Sustituyendo la expresión para  $L$  y  $I = B/\mu_0 n$  en la ecuación 32.13 se tiene

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 A \ell \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} (A \ell) \quad (32.14)$$

Ya que  $A\ell$  es el volumen del solenoide, la energía almacenada por unidad de volumen en un campo magnético está dada por

$$u_m = \frac{U_m}{A \ell} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (32.15)$$

Densidad de energía magnética

Aunque la ecuación 32.15 se dedujo para el caso específico de un solenoide, *ésta es válida para cualquier región del espacio en donde exista un campo magnético*. Obsérvese que la ecuación 32.15 es similar en forma a la ecuación de la energía por unidad de volumen almacenada en un campo eléctrico, dado por  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ . En ambos casos, la densidad de energía es proporcional al *cuadrado* de la intensidad del campo.

**EJEMPLO 32.4** ¿Qué le pasa a la energía en un inductor?

Considérese una vez más el circuito  $RL$  de la figura 32.5, en donde el interruptor  $S_2$  se cierra en el instante en que se abre  $S_1$  (en  $t = 0$ ). Recuérdese que la corriente en la espira superior decae exponencialmente con el tiempo según la expresión  $I = I_0 e^{-t/\tau}$ , donde  $I_0 = \mathcal{E}/R$  es la corriente inicial en el circuito y  $\tau = L/R$  es la constante de tiempo. La energía almacenada en el campo magnético del inductor se desvanece gradualmente como energía térmica en la resistencia. Se demostrará explícitamente que la energía almacenada en el inductor se disipa como calor en la resistencia.

**Solución** La razón con la cual se disipa la energía en la resistencia,  $dU/dt$ , (o la potencia) es igual a  $I^2 R$ , donde  $I$  es la corriente instantánea. Esto es,

$$\frac{dU}{dt} = I^2 R = (I_0 e^{-Rt/L})^2 R = I_0^2 R e^{-2Rt/L} \quad (1)$$

Para encontrar la energía total disipada en la resistencia, se integra esta expresión sobre los límites  $t = 0$  a  $t = \infty$ . (El límite superior se toma como  $\infty$  ya que el tiempo que tarda la corriente en llegar a su valor cero es infinito). Por lo tanto,

$$U = \int_0^\infty I_0^2 R e^{-2Rt/L} dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt \quad (2)$$

El valor de la integral definida es  $L/2R$ , entonces  $U$  se convierte en

$$U = I_0^2 R \left( \frac{L}{2R} \right) = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Obsérvese que ésta es igual a la energía inicial almacenada en el campo magnético del inductor, dada por la ecuación 32.13, lo cual se quería demostrar.

**Ejercicio 2** Evalúe la integral del lado derecho de la ecuación (2) y muestre que su valor es  $L/2R$ .

**EJEMPLO 32.5** El cable coaxial

Un cable coaxial muy largo consta de dos conductores concéntricos cilíndricos de radios  $a$  y  $b$  y longitud  $\ell$ , como se muestra en la figura 32.8. Se supone que el conductor interior es un cascarón cilíndrico de paredes muy delgadas. Por cada conductor circula una corriente  $I$  (el exterior es la trayectoria de regreso). a) Calcule la autoinducción  $L$  de este cable.

**Solución** Para obtener  $L$ , se debe conocer el flujo magnético a través de cualquier sección transversal comprendida entre los conductores. A partir de la ley de Ampère (Sec. 30.3), se puede ver con facilidad que el campo magnético entre los conductores está dado por  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ . Además, el campo es cero fuera de los conductores y en el interior del conductor hueco. El campo fuera de los conductores es cero ya que la corriente *neto* que circula por una trayec-

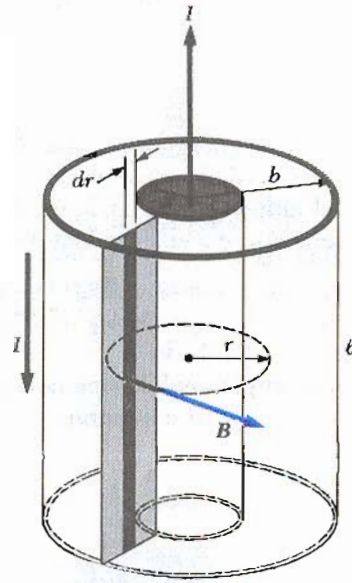


Figura 32.8 (Ejemplo 32.5) Corte seccional de un cable coaxial largo. Los conductores interno y externo llevan corrientes iguales y opuestas.

toria que comprende a los dos alambres es cero, y por lo tanto de la ley de Ampère  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . El campo es cero dentro del conductor interior ya que está hueco y no existe corriente dentro de un radio  $r < a$ .

El campo magnético es perpendicular a la faja rectangular sombreada de longitud  $\ell$  y anchura  $(b - a)$ . Ésta es la sección trasversal de interés. Dividiendo esta faja rectangular en tiras de anchura  $dr$ , se puede ver que el área de cada tira es  $\ell dr$  y el flujo total a través de cada una de las tiras es  $B dA = B \ell dr$ . En consecuencia, el flujo *total* a través de cualquier sección trasversal es

$$\Phi_m = \int B dA = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ell dr = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Con este resultado se encuentra que la autoinductancia del cable es

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Además, la autoinductancia por unidad de longitud está dada por  $(\mu_0/2\pi) \ln(b/a)$ .

b) Calcule la energía total almacenada en el campo magnético del cable.

**Solución** Haciendo uso de la ecuación 32.14 y los resultados de a), se obtiene

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

### 32.4 INDUCTANCIA MUTUA

Con frecuencia el flujo magnético a través de un circuito varía con el tiempo como consecuencia de las corrientes variables que existen en circuitos cercanos. Esto da origen a una fem inducida mediante un proceso conocido como **inducción mutua**, llamada así porque depende de la interacción de dos circuitos.

Consideremos dos bobinas devanadas en forma muy estrecha, como se muestra en la vista de la sección transversal de la figura 32.9. La corriente  $I_1$  en la bobina 1, que tiene  $N_1$  espiras, genera líneas de campo magnético, algunas de ellas atravesarán la bobina 2, que tiene  $N_2$  espiras. El flujo correspondiente a través de la bobina 2 producido por la bobina 1 se representa por  $\Phi_{21}$ . Se define la **inductancia mutua**  $M_{21}$  de la bobina 2 con respecto a la bobina 1 como la razón de  $N_2\Phi_{21}$  a la corriente  $I_1$ :

$$M_{21} \equiv \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1} \quad (32.16)$$

$$\Phi_{21} = \frac{M_{21}}{N_2} I_1$$

La inductancia mutua depende de la geometría de los dos circuitos y de sus orientaciones relativas entre sí. Es claro que al incrementarse la separación entre los circuitos, la inductancia mutua decrece ya que el flujo que une a los dos circuitos decrece.

Si la corriente  $I_1$  varía con el tiempo, se puede ver por la ley de Faraday y la ecuación 32.16 que la fem inducida en la bobina 2 por la bobina 1 está dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (32.17)$$

De igual forma, si la corriente  $I_2$  varía con el tiempo, la fem inducida en la bobina 1 por la bobina 2 está dada por

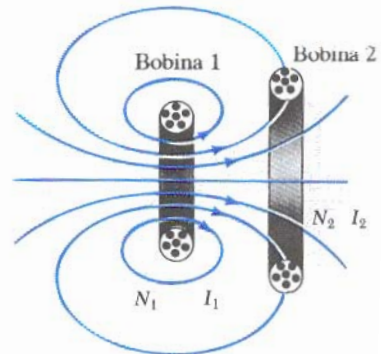
$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (32.18)$$

Estos resultados son semejantes en su forma a la expresión de la fem autoinducida  $\mathcal{E} = -L (dI/dt)$ . La fem inducida por inducción mutua en una bobina siempre es proporcional a la razón de cambio de la corriente en la otra bobina. Si las razones con las cuales las corrientes cambian con el tiempo son iguales (esto es, si  $dI_1/dt = dI_2/dt$ ), entonces se encuentra que  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ . Aunque las constantes de proporcionalidad  $M_{12}$  y  $M_{21}$  aparenten ser diferentes, se puede demostrar que son iguales. Entonces haciendo  $M_{12} = M_{21} = M$ , las ecuaciones 32.17 y 32.18 se convierten en

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (32.19)$$

La unidad de la inductancia mutua también es el henry.

#### Definición de inductancia mutua



**Figura 32.9** Una vista de sección transversal de dos bobinas adyacentes. Una corriente en la bobina 1 genera un flujo, parte del cual atraviesa a la bobina 2.

**EJEMPLO 32.6 Inductancia mutua de dos solenoides**

Un solenoide de longitud  $\ell$  tiene  $N_1$  espiras, lleva una corriente  $I$  y tiene un área  $A$  en su sección transversal. Una segunda bobina está devanada alrededor del centro de la primera bobina, como se muestra en la figura 32.10. Encuentre la inductancia mutua del sistema.

**Solución** Si el solenoide lleva una corriente  $I_1$ , el campo magnético en el centro está dado por

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell}$$

Como el flujo  $\Phi_{21}$  a través de la bobina 2 debido a la bobina 1 es  $BA$ , la inductancia mutua es

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 BA}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{\ell}$$

Por ejemplo, si  $N_1 = 500$  vueltas,  $A = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $\ell = 0.5$  m y  $N_2 = 8$  vueltas, se obtiene

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m})(500)(8)(3 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}{0.5 \text{ m}} \approx 30.2 \times 10^{-6} \text{ H} = 30.2 \mu\text{H}$$

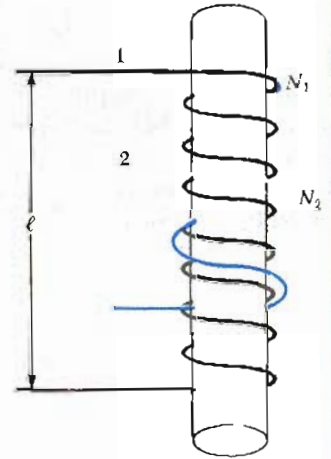


Figura 32.10 (Ejemplo 32.6) Una pequeña bobina de  $N_2$  vueltas enrolladas alrededor del centro de un solenoide largo de  $N_1$  vueltas.

**32.5 OSCILACIONES DE UN CIRCUITO LC**

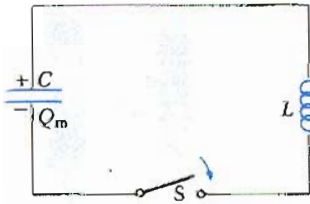


Figura 32.11 Un circuito simple LC. El condensador tiene una carga inicial  $Q_m$ , y el interruptor se cierra en  $t = 0$ .

Cuando un condensador *cargado* se conecta en serie con un inductor como se muestra en la figura 32.11 y después se cierra el interruptor, se producirán oscilaciones en la corriente y en la carga del condensador. Si la resistencia del circuito es cero, no existirá disipación de energía por efecto Joule y las oscilaciones continuarán. En esta sección se despreciará la resistencia del circuito.

En el siguiente análisis, se supone que el condensador tiene una carga inicial  $Q_m$  y además el interruptor se cierra en  $t = 0$ . Es importante hacer una descripción de lo que sucede desde el punto de vista de la conservación de la energía.

Cuando el condensador está completamente cargado, la energía total  $U$  del circuito está almacenada en el campo eléctrico del condensador y es igual a  $Q_m^2/2C$ . En este instante, la corriente es cero, por lo que no habrá energía almacenada en el inductor. A medida que se va descargando el condensador, la energía almacenada en su campo eléctrico decrece. Al mismo tiempo, la corriente se incrementa almacenándose alguna energía en el campo magnético del inductor. Como se puede ver, la energía se transfiere del campo eléctrico del condensador al campo magnético del inductor. Cuando el condensador se ha descargado por completo, no almacena más energía. En este momento, la corriente alcanza su valor máximo y toda la energía se ha almacenado en el inductor. El proceso se repite de nuevo pero en la dirección contraria. La energía continúa transfiriéndose entre el inductor y el condensador de forma indefinida y esto corresponde a las oscilaciones de la corriente y la carga.

Una descripción gráfica de la transferencia de energía se muestra en la figura 32.12. El comportamiento del circuito es análogo al de un sistema oscilador compuesto por una masa y un resorte como el estudiado en el capítulo 13. La energía potencial almacenada en el resorte comprimido,  $\frac{1}{2}kx^2$ , es el análogo de la energía potencial almacenada en el condensador,  $Q_m^2/2C$ . La energía cinética de la masa en movimiento,  $\frac{1}{2}mv^2$ , es el análogo de la energía almacenada en el inductor,  $\frac{1}{2}LI^2$ , que requiere la presencia de cargas en movimiento. En la figura 32.12a, toda la energía está almacenada como energía potencial en el condensador

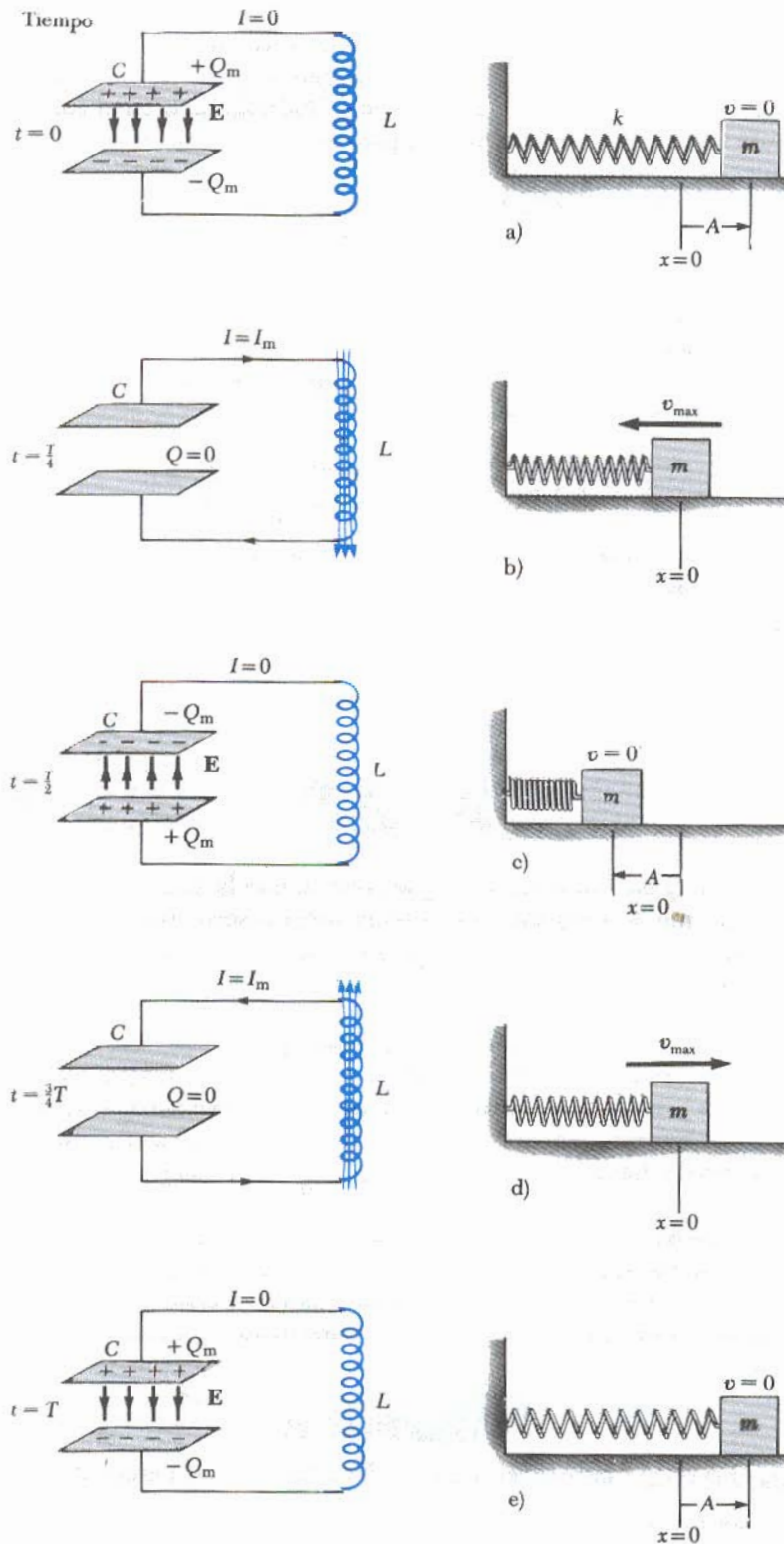


Figura 32.12 Transferencia de energía en un circuito LC. El condensador tiene una carga  $Q_m$  en  $t = 0$  cuando está cerrado el interruptor. La analogía mecánica de este circuito es el sistema masa-resorte que se muestra a la derecha.

en  $t = 0$  (ya que  $I = 0$ ). En la figura 32.12b, toda la energía está almacenada como energía "cinética" en el inductor,  $\frac{1}{2}LI_m^2$ , donde  $I_m$  es la corriente máxima. En los puntos intermedios, parte de la energía es energía potencial y parte energía cinética.

Considérese un tiempo arbitrario  $t$  después de que el interruptor se ha cerrado, de modo que el capacitor tiene una carga  $Q$  y la corriente es  $I$ . En este instante, los dos elementos tienen una energía almacenada, como la suma de las dos energías debe ser igual a la energía total inicial  $U$  almacenada en el condensador cuando éste se encuentra totalmente cargado en  $t = 0$ . Es decir,

Energía total almacenada en el circuito LC

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \quad (32.20)$$

Como se ha supuesto que la resistencia del circuito es cero, no se disipa energía en forma de calor por efecto Joule y en consecuencia la energía total debe permanecer constante en el tiempo. Esto significa que  $dU/dt = 0$ . Por consiguiente, al derivar la ecuación 32.20 respecto al tiempo y tomando en cuenta que  $Q$  e  $I$  son función del tiempo, se obtiene

La energía total en un circuito LC permanece constante; por lo tanto,  $dU/dt = 0$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \right) = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0 \quad (32.21)$$

Esta expresión se puede reducir a una ecuación diferencial de una sola variable utilizando la relación que existe entre  $Q$  e  $I$ , en particular,  $I = dQ/dt$ . De ésta, resulta que  $dI/dt = d^2Q/dt^2$ . La sustitución de estas relaciones en la ecuación 32.21 produce

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q \quad (32.22)$$

Se puede resolver para la función  $Q$  si se observa que la ecuación 32.22 tiene la misma forma que la ecuación del sistema masa-resorte (oscilador armónico simple) estudiado en el capítulo 13. Para este sistema, la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

donde  $k$  es la constante del resorte,  $m$  es la masa y  $\omega = \sqrt{k/m}$ . La solución de esta ecuación tiene la forma general

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular del movimiento armónico simple,  $A$  es la amplitud del movimiento (el máximo valor de  $x$ ) y  $\delta$  es la constante de fase; los valores de  $A$  y  $\delta$  dependen de las condiciones iniciales. Como la ecuación 32.22 es de la misma forma que la ecuación diferencial del oscilador armónico simple, su solución es

La carga como función del tiempo en un circuito LC

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \delta) \quad (32.23)$$

donde  $Q_m$  es la carga máxima del condensador y la frecuencia  $\omega$  angular está dada por

Frecuencia angular de oscilación

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.24)$$

Nótese que la frecuencia angular de las oscilaciones dependen únicamente de la inductancia y capacitancia del circuito.

Como las oscilaciones de  $Q$  son periódicas, la corriente también debe oscilar periódicamente. Esto se demuestra con facilidad diferenciando respecto al tiempo la ecuación 32.23, que da

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin(\omega t + \delta) \quad (32.25)$$

Para determinar el ángulo de fase  $\delta$ , es necesario examinar las condiciones iniciales, para lo cual en esta situación se requiere que en  $t = 0$ ,  $I = 0$  y  $Q = Q_m$ . Haciendo  $I = 0$  en  $t = 0$  en la ecuación 32.25 da

$$0 = -\omega Q_m \sin \delta$$

lo cual demuestra que  $\delta = 0$ . Este valor de  $\delta$  es consecuente con la ecuación 32.23 y con la segunda condición en que  $Q = Q_m$  en  $t = 0$ . Por lo tanto, en este caso, las variaciones de  $Q$  y de  $I$  están dadas por

$$Q = Q_m \cos \omega t \quad (32.26)$$

$$I = -\omega Q_m \sin \omega t = -I_m \sin \omega t \quad (32.27)$$

donde  $I_m = \omega Q_m$  es la corriente máxima en el circuito.

En la figura 32.13, se muestran las gráficas de  $Q$  contra  $t$  y de  $I$  contra  $t$ . Obsérvese que en el condensador la carga oscila entre los valores extremos  $Q_m$  y  $-Q_m$  y los de la corriente oscilan entre  $I_m$  y  $-I_m$ . Además, la corriente está  $90^\circ$  fuera de fase respecto a la carga. Esto es, cuando la carga alcanza un valor extremo, la corriente es cero, y cuando la carga es cero, la corriente tiene un valor extremo.

Regresemos a la energía de un circuito LC. Al sustituir las ecuaciones 32.26 y 32.27 en la ecuación 32.20, se encuentra que la energía total está dada por

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t \quad (32.28)$$

Esta expresión contiene todas las características que fueron descritas cualitativamente al principio de esta sección. Se ha mostrado que la energía del sistema oscila continuamente entre la energía almacenada en el campo eléctrico del condensador y la energía almacenada en el campo magnético del inductor. Cuando la energía almacenada en el condensador tiene su valor máximo,  $Q_m^2/2C$ , la energía almacenada en el inductor es cero. Y cuando la energía almacenada en el inductor tiene su valor máximo,  $\frac{1}{2}LI_m^2$ , la energía almacenada en el condensador es cero.

En la figura 32.14 se muestran las gráficas de las variaciones en el tiempo de  $U_C$  y  $U_L$ . Obsérvese que la suma  $U_C + U_L$  es una constante igual a la energía total,  $Q_m^2/2C$ . La demostración analítica de esto es inmediata. Puesto que la energía máxima almacenada en el condensador (cuando  $I = 0$ ) debe ser igual a la energía máxima almacenada en el inductor (cuando  $Q = 0$ ),

$$\frac{Q_m^2}{2C} = \frac{1}{2}LI_m^2 \quad (32.29)$$

Sustituyendo ésta en la ecuación 32.28 se obtiene para la energía total

$$U = \frac{Q_m^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{Q_m^2}{2C} \quad (32.30)$$

### Corriente como función del tiempo para la corriente LC

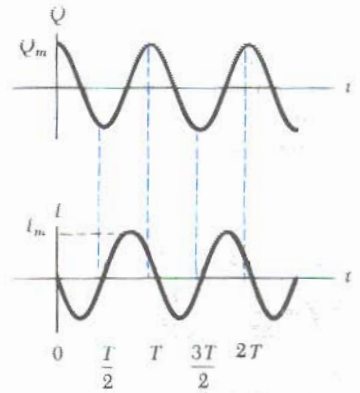


Figura 32.13 Gráficas de la carga como función del tiempo y de la corriente como función del tiempo para un circuito LC sin resistencia. Nótese que  $Q$  e  $I$  están  $90^\circ$  fuera de fase uno respecto al otro.

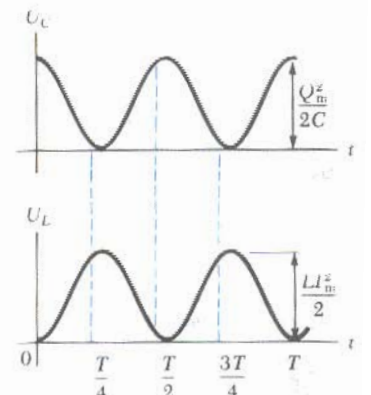


Figura 32.14 Gráficas de  $U_C$  como función del tiempo y  $U_L$  como función del tiempo para un circuito LC sin resistencia. La suma de las dos curvas es una constante e igual a la energía total almacenada en el circuito.

donde  $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$ .

Conviene observar que la energía total  $U$  permanece constante sólo si se desprecia la pérdida de energía. En un circuito real siempre existirá alguna resistencia por lo que habrá pérdidas de energía en forma de calor. (En realidad, aunque se desprecie la pérdida de energía debida a la resistencia del cableado, existirá una pérdida de energía por la radiación de ondas electromagnéticas que emite el circuito). En el caso ideal, las oscilaciones en el circuito continuarán indefinidamente.

### EJEMPLO 32.7 Circuito LC oscilador

Un circuito LC tiene una inductancia de 2.81 mH y una capacitancia de 9 pF (Fig. 32.15). El condensador se carga inicialmente con una batería de 12 V cuando el interruptor  $S_1$  está abierto y el interruptor  $S_2$  está cerrado. En el instante en que  $S_2$  se abre, el interruptor  $S_1$  se cierra de manera que el condensador queda en corto circuito con el inductor. a) Encuentre la frecuencia de oscilación.

**Solución** Se utiliza la ecuación 32.24 y se obtiene para la frecuencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$= \frac{1}{2\pi[(2.81 \times 10^{-3} \text{ H})(9 \times 10^{-12} \text{ F})]^{1/2}} = 10^6 \text{ Hz}$$

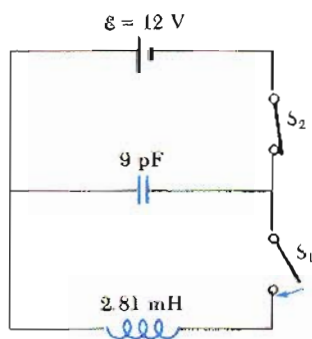


Figura 32.15 (Ejemplo 32.7) Primero el condensador está completamente cargado con el interruptor  $S_1$  abierto y el  $S_2$  cerrado. Ahora,  $S_1$  se cierra al mismo tiempo que se abre  $S_2$ .

b) ¿Cuáles son los valores máximos de la carga en el condensador y de la corriente en el circuito?

**Solución** La carga inicial en el condensador es igual a la carga máxima, y como  $C = Q/V$ , se obtiene

$$Q_m = CV = (9 \times 10^{-12} \text{ F})(12 \text{ V}) = 1.08 \times 10^{-10} \text{ C}$$

De la ecuación 32.27, se ve que la corriente máxima está relacionada con la carga máxima:

$$I_m = \omega Q_m = 2\pi f Q_m$$

$$= (2\pi \times 10^6 \text{ s}^{-1})(1.08 \times 10^{-10} \text{ C})$$

$$= 6.79 \times 10^{-4} \text{ A}$$

c) Determine la carga y la corriente como función del tiempo.

**Solución** Las ecuaciones 32.26 y 32.27 proporcionan las relaciones siguientes de la variaciones en el tiempo de  $Q$  e  $I$ :

$$Q = Q_m \cos \omega t = (1.08 \times 10^{-10} \text{ C}) \cos \omega t$$

$$I = -I_m \sin \omega t = (-6.79 \times 10^{-4} \text{ A}) \sin \omega t$$

donde

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$$

**Ejercicio 3** ¿Cuál es la energía almacenada en el circuito?

**Respuesta**  $6.48 \times 10^{-10} \text{ J}$ .

### 32.6 CIRCUITOS RLC

Ahora concentremos la atención en un circuito más real, el cual consta de un inductor, un condensador y una resistencia conectados en serie, como se muestra en la figura 32.16. Supóngase que el condensador tiene una carga inicial  $Q_m$  antes de cerrar el interruptor. Una vez que éste se cierra, se establece una corriente, la energía total almacenada en el circuito en cualquier instante está dada por la ecuación 32.20. Esto es, la energía almacenada en el condensador es  $Q^2/2C$ , y la energía almacenada en el inductor es  $\frac{1}{2}LI^2$ . Sin embargo, la energía total ya no es constante, como en el circuito LC, debido a la presencia de la resistencia, el cual

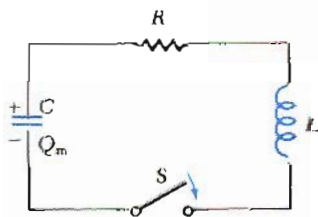


Figura 32.16 Un circuito RLC en serie. El condensador tiene una carga  $Q_m$  en  $t = 0$  cuando el interruptor se cierra.



disipa energía en forma de calor. Como la razón de energía disipada a través de la resistencia es  $I^2R$ , se tiene

$$\frac{dU}{dt} = -I^2R \quad (32.31)$$

donde el signo negativo significa que  $U$  decrece con el tiempo. Sustituyendo este resultado en la derivada respecto al tiempo de la ecuación 32.20 da

$$LI \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = -I^2R \quad (32.32)$$

Utilizando el hecho de que  $I = dQ/dt$  y  $dI/dt = d^2Q/dt^2$ , y dividiendo la ecuación 32.32 por  $I$ , se obtiene

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (32.33)$$

Obsérvese que un circuito RLC es análogo al oscilador armónico amortiguado discutido en la sección 13.6 y que se representa en la figura 32.17. La ecuación de movimiento de este sistema mecánico es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (32.34)$$

Comparando las ecuaciones 32.33 y 32.34, se puede ver que  $Q$  corresponde a  $x$ ,  $L$  corresponde a  $m$ ,  $R$  corresponde a la constante de amortiguamiento  $b$  y  $C$  corresponde a  $1/k$ , donde  $k$  es la constante de fuerza del resorte.

La solución analítica de la ecuación 32.33 es algo complicada y generalmente se estudia en los cursos de ecuaciones diferenciales. Por ello sólo se dará una descripción cualitativa del comportamiento del circuito.

En el caso más simple, cuando  $R = 0$ , la ecuación 32.33 se reduce a la de un circuito LC simple, como es de esperarse, y la carga así como la corriente oscilarán senoidalmente con el tiempo.

A continuación se considera el caso cuando  $R$  es razonablemente pequeña. En este caso, la solución de la ecuación 32.33 está dada por

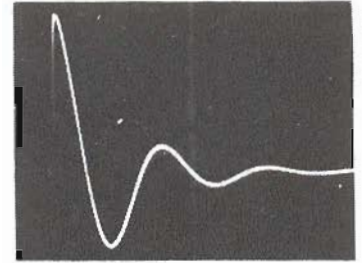
$$Q = Q_m e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \quad (32.35)$$

donde

$$\omega_d = \left[ \frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (32.36)$$

Es decir, la carga oscilará con un *movimiento armónico amortiguado* en analogía con el sistema masa-resorte que se mueve en un medio viscoso. De la ecuación 32.35, se puede ver que cuando  $R \ll \sqrt{4LC}$  la frecuencia  $\omega_d$  del oscilador amortiguado será aproximadamente igual a la del oscilador no amortiguado,  $1/\sqrt{LC}$ . Ya que  $I = dQ/dt$ , se deduce que la corriente también experimentará un movimiento armónico amortiguado. En la figura 32.18 se muestra una gráfica de la carga como función del tiempo para el caso del oscilador amortiguado. Obsérvese que el valor máximo de  $Q$  decrece después de cada oscilación, de la misma forma que la amplitud de un oscilador armónico amortiguado decrece con el tiempo.

Cuando se consideran valores grandes de  $R$ , se encuentra que la oscilación se amortigua más rápido; de hecho, existe un valor crítico de resistencia  $R_c$  por arriba



Patrón de la pantalla de un osciloscopio que muestra el decaimiento de las oscilaciones de un circuito RLC. Los parámetros utilizados fueron  $R = 75 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 0.19 \mu\text{F}$  y  $f = 300 \text{ Hz}$ . (Cortesía de J. Rudram).

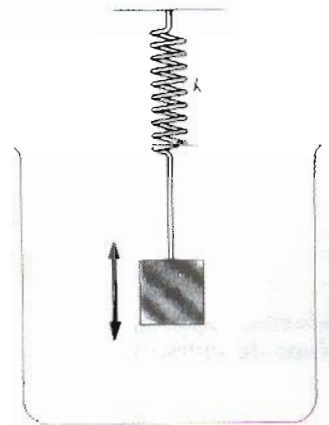


Figura 32.17 Un sistema masa-resorte que se mueve en un medio viscoso con movimiento armónico amortiguado es el símil de un circuito RLC.



Figura 32.18 Carga como función del tiempo para un circuito RLC amortiguado. Esto sucede cuando  $R \ll \sqrt{4LC}$ . La curva  $Q$  contra  $t$  es una gráfica de la ecuación 32.35.

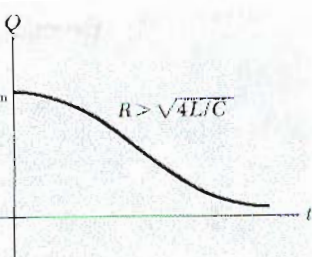


Figura 32.19 Gráfica de  $Q$  contra  $t$  para un circuito  $RLC$  sobreamortiguado, que sucede para valores de  $R > \sqrt{4L/C}$ .

fem inducida

Inductancia de una bobina con  $N$  vueltas

Inductancia de un solenoide

Corriente en un circuito

Energía almacenada en un inductor

del cual no ocurren oscilaciones. Este valor crítico está dado por  $R_c = \sqrt{4L/C}$ . Un sistema con  $R = R_c$  se dice que está *críticamente amortiguado*. Cuando  $R$  es mucho mayor que  $R_c$ , se dice que el sistema está *sobreamortiguado* (Fig. 32.19).

## RESUMEN

Cuando la corriente en una bobina varía con el tiempo, se induce una fem en la bobina según a la ley de Faraday. La fem **autoinducida** se define por la expresión

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (32.1)$$

donde  $L$  es la *inductancia* de la bobina. La inductancia es una medida de la oposición que presenta un dispositivo a los *cambios* en la corriente. La unidad de la inductancia en el SI es el **henry** (H), donde  $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A}$ .

La **inductancia de cualquier bobina**, como un solenoide o un toroide, se obtiene de la expresión

$$L = \frac{N\Phi_m}{I} \quad (32.2)$$

donde  $\Phi_m$  es el flujo magnético a través de la bobina y  $N$  es el número total de vueltas.

La inductancia de un dispositivo depende de su geometría. Por ejemplo, la *inductancia de un solenoide* (con núcleo de aire), calculado con la ecuación 32.2, está dado por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \quad (32.4)$$

donde  $N$  es el número de vueltas,  $A$  es el área de la sección transversal y  $\ell$  es la longitud del solenoide.

Si una resistencia y un inductor se conectan en serie a una batería de fem  $\mathcal{E}$  como se muestra en la figura 32.2 y un interruptor en el circuito se cierra en  $t = 0$ , la corriente en el circuito varía en el tiempo según la expresión

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (32.7)$$

donde  $\tau = L/R$  es la *constante de tiempo* del circuito  $RL$ . Es decir, la corriente aumenta hasta un valor de equilibrio  $\mathcal{E}/R$  después de un tiempo que es largo comparado con  $\tau$ .

Si se elimina la batería de un circuito  $RL$  como se muestra en la figura 32.5 con  $S_1$  abierto y  $S_2$  cerrado, la corriente decae exponencialmente con el tiempo según la expresión

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \quad (32.11)$$

donde  $\mathcal{E}/R$  es la corriente inicial del circuito.

La **energía almacenada en el campo magnético de un inductor** que lleva una corriente  $I$  está dada por

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (32.13)$$

Este resultado se obtiene aplicando el principio de conservación de la energía al circuito  $RL$ .

La **energía por unidad de volumen** (o la densidad de energía) en un punto donde el campo magnético es  $B$ , se obtiene con

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (32.15)$$

Densidad de energía magnética

Esto es, la densidad de energía es proporcional al cuadrado del campo magnético en el punto en cuestión.

Si dos bobinas están cerca una de otra, una corriente variable en una de las bobinas puede inducir una fem en la otra. Si  $dI_1/dt$  es la razón de cambio de la corriente en la primera bobina, la fem inducida en la segunda está dada por

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (32.19)$$

donde  $M$  es una constante llamada **inductancia mutua** de una bobina respecto a la otra.

Si  $\Phi_{21}$  es el flujo magnético a través de la bobina 2 debido a la corriente  $I_1$  de la bobina 1 y  $N_2$  es el número de vueltas de la bobina 2, entonces la **inductancia mutua** de la bobina 2 se obtiene con

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \quad (32.16)$$

Inductancia mutua

En un circuito  $LC$  con resistencia cero, la carga en el condensador y la corriente en el circuito varían en el tiempo según la expresión

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \delta) \quad (32.23)$$

Carga y corriente como función del tiempo en un circuito  $LC$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin(\omega t + \delta) \quad (32.25)$$

donde  $Q_m$  es la carga máxima en el condensador,  $\delta$  es la constante de fase y  $\omega$  es la frecuencia angular de oscilación, dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.24)$$

Frecuencia de oscilación en un circuito  $LC$

La energía en un circuito  $LC$  es una transferencia continua entre la energía almacenada en el condensador y la energía almacenada en el inductor. La **energía total** de un circuito  $LC$  para cualquier tiempo  $t$  se obtiene con

$$U = U_e + U_L = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t \quad (32.28)$$

Energía en un circuito  $LC$

donde  $I_m$  es la corriente máxima en el circuito. En  $t = 0$ , toda la energía está almacenada en el campo eléctrico del condensador ( $U = Q_m^2/2C$ ). Eventualmente, toda la energía se transfiere al inductor ( $U = LI_m^2/2$ ). Sin embargo, la energía *total* permanece constante, ya que se desprecia las pérdidas de energía en un circuito ideal  $LC$ .

La carga y la corriente en un circuito  $RLC$  presentan un comportamiento armónico amortiguado para valores pequeños de  $R$ . Éste es el análogo del movimiento armónico amortiguado de un sistema masa-resorte en donde existe una fricción.

## PREGUNTAS

1. ¿Por qué a la fem inducida que aparece en un inductor se le llama contra fem?
2. Un circuito que consta de una bobina, una resistencia y una batería se encuentra en un estado estacionario, esto es, la corriente ha alcanzado un valor constante. ¿Tiene la bobina una inductancia? ¿Afecta la bobina el valor de la corriente en el circuito?
3. ¿Depende la inductancia de la bobina de la corriente que circula por ella? ¿A qué parámetros afecta la inductancia de la bobina?
4. ¿Cómo se debe devanar un alambre muy largo en un carrete de tal forma que la autoinductancia sea despreciable?
5. Un alambre delgado y largo se enrolla como un solenoide con autoinductancia  $L$ . Si éste se conecta directamente a través de las terminales de una batería, ¿cómo dependerá la corriente máxima de  $L$ ?
6. En el circuito  $RL$  de la figura 32.20, ¿puede la contra fem ser mayor que la fem de la batería?
7. Suponga que el interruptor en el circuito  $RL$  de la figura 32.20 ha sido cerrado por un lapso prolongado de tiempo y de repente se abre. ¿Cae instantáneamente la corriente a cero? ¿Por qué aparece una chispa en el contacto del interruptor cuando éste se abre?
8. Si la corriente en un inductor se duplica, ¿en qué factor se ve incrementada la energía almacenada?
9. Discuta la similitud que existe entre la energía almacenada en el campo eléctrico de un condensador cargado y la energía almacenada en el campo magnético de una bobina por la cual circula una corriente.
10. ¿Cuál es la inductancia efectiva de una combinación de dos inductores aislados que se conectan en serie?
11. Discuta cómo se genera la inductancia mutua entre las bobinas primaria y secundaria en un transformador.
12. Los centros de dos espiras circulares están separadas una distancia fija. ¿Para qué orientación relativa de las espiras será su inductancia mutua un máximo? ¿Para qué orientación será un mínimo?
13. Dos solenoides están conectados en serie de tal forma que por cada uno de ellos circula la misma corriente en cualquier instante. ¿Se genera una inductancia mutua? Explique.
14. En el circuito  $LC$  de en la figura 32.12, la carga en el capacitor algunas veces es cero, aun cuando exista una corriente en el circuito. ¿Cómo es posible esto?
15. Si la resistencia del cableado de un circuito  $LC$  fuera cero, ¿persistirían las oscilaciones? Explique.
16. ¿Cómo se podría distinguir cuándo un circuito  $RLC$  está sobre o bajoamortiguado?
17. ¿Cuál es el significado de "amortiguamiento crítico" en un circuito  $RLC$ ?

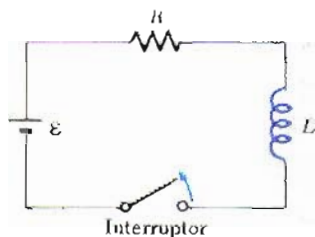


Figura 32.20 (Preguntas 6 y 7).

## PROBLEMAS

## Sección 32.1 Autoinductancia

1. Por un inductor de 2-H circula una corriente de 0.5 A. Cuando se abre el interruptor del circuito, la corriente cesa en 0.01 s. ¿Cuál es la fem inducida que aparece en el inductor durante este intervalo de tiempo?
2. Un solenoide de resorte tiene un radio de 4 cm y una inductancia de 125  $\mu\text{H}$  cuando se estira hasta una longitud de 2 m. ¿Cuál es el número total de vueltas en el resorte?
3. ¿Cuál es la inductancia de un solenoide de 510 vueltas que tiene un radio de 8 cm y una longitud total de 1.4 m?
4. Un solenoide pequeño con núcleo de aire tiene una longitud de 4 cm y un radio de 0.25 cm. Si debe tener una inductancia de 0.06 mH, ¿cuántas vueltas por cm se requieren?
5. Muestre que las dos expresiones para la inductancia dadas por
 
$$L = \frac{N\Phi_m}{I} \quad \text{y} \quad L = -\frac{\mathcal{E}}{dI/dt}$$
 tienen las mismas unidades.
6. Calcule el flujo magnético a través de una bobina de 300 vueltas y 7.2 mH cuando la corriente en la bobina es de 10 mA.
7. Una corriente de 40 mA circula por un solenoide uniformemente devanado, con núcleo de aire y con 450 vueltas, un diámetro de 15 mm y 12 cm de longitud. Calcule a) el campo magnético en el interior del solenoide, b) el flujo magnético a través de cada espira y c) la inductancia en el solenoide. d) ¿Cuáles de estas cantidades dependen de la corriente?
8. Un inductor de 0.388 mH tiene una longitud que es cuatro veces su diámetro. Si el devanado tiene 22 vueltas por centímetro, ¿cuál es su longitud?
9. En una bobina de 400 vueltas se induce una fem de 36 mV en el instante en que la corriente tiene un valor de 2.8 A y cambia a razón de 12 A/s. ¿Cuál es el flujo magnético total a través de la bobina?
10. La corriente en un inductor de 0.02 H varía con el tiempo según  $I = 3t^2 - 4t$ , cuando  $I$  está en A y  $t$  en s. a) Calcule la magnitud de la fem inducida en  $t = 1$  y  $t = 5$  s. b) ¿Para qué valor de  $t$  la fem inducida será cero?

11. Una corriente  $I = I_0 \sin \omega t$ , con  $I_0 = 5 \text{ A}$  y  $\omega 2\pi = 60 \text{ Hz}$ , circula por un inductor cuya inductancia es  $10 \text{ mH}$ . ¿Cuál es el valor de la contrafem como función del tiempo?
12. Tres devanados solenoidales de 300, 200 y 100 vueltas están enrollados en posiciones espaciadas a lo largo de un tubo de cartulina de radio  $1 \text{ cm}$ . Cada devanado abarca  $5 \text{ cm}$  sobre la superficie cilíndrica. ¿Cuál es la inductancia equivalente de las 600 vueltas cuando el conjunto de los tres devanados se conectan en serie?
13. Dos bobinas, A y B, están devanadas con la misma longitud de alambre. Cada bobina tiene el mismo número de vueltas por unidad de longitud, pero para la bobina A tiene el doble de espiras que B. ¿Cuál es la relación de la autoinductancia de A con respecto a B? (Nota: los radios de las dos bobinas son iguales.)
14. En la figura 32.21 se muestra un devanado toroidal con  $N$  vueltas de alambre, radio mayor  $R$  y radio menor  $r$ . Si  $R \gg r$ , el campo magnético en el interior del toroide es básicamente igual al de un solenoide muy largo, el cual ha sido doblado para formar un círculo de radio  $R$ . Utilizando el campo uniforme de un solenoide largo, muestre que la autoinductancia del toroide está dada (aproximadamente) por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R}$$

(La expresión exacta para la inductancia de un toroide con sección transversal rectangular se obtiene en el problema 78).

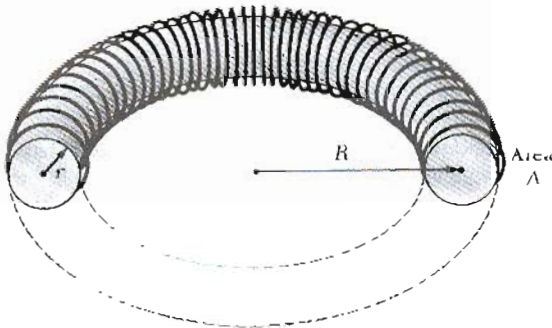


Figura 32.21 (Problema 14).

15. Un solenoide uniformemente devanado alrededor de un núcleo de madera tiene 120 vueltas, diámetro  $10 \text{ mm}$  y longitud  $9 \text{ cm}$ . a) Calcule la inductancia del solenoide. b) Si el núcleo de madera se reemplaza por una barra de hierro dulce de las mismas dimensiones, con una permeabilidad magnética  $\kappa_m = 800\mu_0$ . ¿Cuál es la nueva inductancia?
16. Un inductor solenoidal contiene 420 vueltas, tiene  $16 \text{ cm}$  de longitud y  $3 \text{ cm}^2$  de área en la sección transversal. ¿Cuál debe ser el decremento de la razón de cambio de la corriente que circula por el inductor para que se produzca una fem inducida de  $175 \mu\text{V}$ ?

Sección 32.2 Circuitos RL

17. Compruebe por sustitución directa que la expresión para la corriente dada en la ecuación 32.7 es una solución de la ecuación de Kirchhoff para el circuito RL dada por la ecuación 32.6.
18. Muestre que  $I = I_0 e^{-t/\tau}$  es una solución de la ecuación diferencial

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0,$$

donde  $\tau = L/R$  e  $I_0 = \mathcal{E}/R$  es el valor de la corriente cuando  $t = 0$ .

19. Calcule la inductancia en un circuito RL en el cual  $R = 0.5 \Omega$  y la corriente se incrementa a un cuarto de su valor final en  $1.5 \text{ s}$ .
20. Una batería de  $12 \text{ V}$  se conecta en serie con una resistencia y un inductor. El circuito tiene una constante de tiempo de  $500 \mu\text{s}$ , y la corriente máxima es  $200 \text{ mA}$ . ¿Cuál es el valor de la inductancia?
21. Muestre que la constante de tiempo inductiva  $\tau$  tiene unidades de segundos en el SI.
22. Un inductor con una inductancia de  $15 \text{ H}$  y resistencia de  $30 \Omega$  se conecta a través de una batería de  $100 \text{ V}$ . a) ¿Cuál es la razón de cambio inicial de la corriente en el circuito? b) ¿Con qué razón cambia la corriente en  $t = 1.5 \text{ s}$ ?
23. Una batería de  $12 \text{ V}$  se va a conectar a un circuito en serie el cual contiene una resistencia de  $10\text{-}\Omega$  y un inductor de  $2\text{-H}$ . a) ¿Cuánto tarda la corriente en alcanzar 50% de su valor final? b) ¿Cuánto tiempo le llevará en alcanzar 90% de su valor final?
24. Considere el circuito de la figura 32.22, tomando  $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$ ,  $L = 8 \text{ mH}$  y  $R = 4 \Omega$ . a) ¿Cuál es la constante de tiempo inductiva del circuito? b) Calcule la corriente en el circuito en un tiempo de  $250 \mu\text{s}$  después de cerrar el interruptor  $S_1$ . c) ¿Cuál es el valor final de la corriente en estado estacionario? d) ¿Cuánto tiempo le lleva a la corriente alcanzar 80% de su valor máximo?

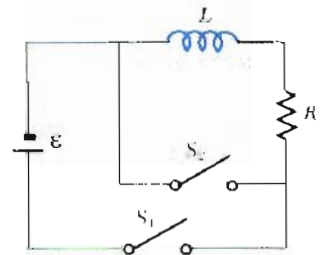


Figura 32.22

(Problemas 24, 21 y 28).

25. Un inductor de  $140 \text{ mH}$  y una resistencia de  $4.9 \Omega$  se conectan con un interruptor a una batería de  $6 \text{ V}$  como se muestra en la figura 32.22. a) Si el interruptor se tira hacia la izquierda (conectando la batería), ¿cuánto tiempo pasa antes de que la corriente alcance los  $220 \text{ mA}$ ? b) ¿Cuál es la corriente que circula por el inductor  $10 \text{ s}$  después de que el interruptor se cierra? c) Ahora el interruptor se tira rápidamente de A a B. ¿Cuánto tiempo debe pasar antes de que la corriente caiga a  $160 \text{ mA}$ ?

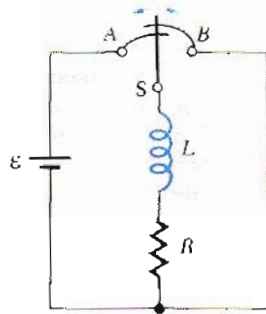


Figura 32.23 (Problema 25).

6. Cuando el interruptor de la figura 32.24 se cierra, la corriente tarda 3.0 ms en alcanzar 96 % de su valor final. Si  $R = 10 \Omega$ , ¿cuál es el valor de la inductancia  $L$ ?

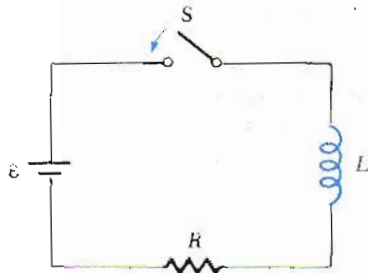


Figura 32.24 (Problemas 26, 29, 30, 35).

7. Asigne los siguientes valores a los componentes del circuito de la figura 32.22.  $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$ ,  $L = 24 \text{ mH}$  y  $R = 10 \Omega$ . a) Calcule el valor de la corriente en el circuito en 0.5 ms después de haber cerrado el interruptor  $S_1$ . b) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente en el circuito?
8. Suponga que el interruptor  $S_1$  de la figura 32.22 ha estado cerrado por un lapso de tiempo lo suficientemente grande para que la corriente alcance su valor máximo. Si ahora, en  $t = 0$ , el interruptor  $S_1$  se abre y se cierra el interruptor  $S_2$ , ¿en cuánto tiempo alcanzará la corriente en  $R$  25% de su valor máximo? (Utilice los valores numéricos del problema 27.)
9. En el circuito  $RL$  de la figura 32.24,  $L = 3 \text{ H}$ ,  $R = 8 \Omega$  y  $\mathcal{E} = 36 \text{ V}$ . a) Calcule el cociente de la diferencia de potencial a través de la resistencia y la del inductor cuando  $I = 2 \text{ A}$ . b) Calcule el voltaje a través del inductor cuando  $I = 4.5 \text{ A}$ .
10. En el circuito de la figura 32.24, sea  $L = 7 \text{ H}$ ,  $R = 9 \Omega$  y  $\mathcal{E} = 120 \text{ V}$ . ¿Cuál es la fem autoinducida 0.2 s después de cerrar el interruptor?
11. Una aplicación de los circuitos  $RL$  es generar transientes de alto voltaje a partir de una fuente dc de bajo voltaje, como se muestra en la figura 32.25. a) ¿Cuál es la corriente en el circuito en un tiempo suficientemente grande después de haber posicionado el interruptor en el punto A? b) Ahora el interruptor se pasa rápido de A a B. Calcule el voltaje a través de cada resistencia y del inductor. c) ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el voltaje a través del inductor caiga a 12 V?

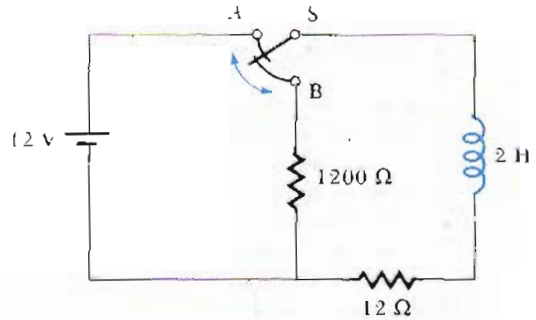


Figura 32.25 (Problema 31).

**Sección 32.3 Energía en un campo magnético**

32. Calcule la energía asociada con el campo magnético de un solenoide de 200 vueltas en donde una corriente de 1.75 A produce un flujo de  $3.7 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  en cada vuelta.
33. Un solenoide con núcleo de aire, 68 vueltas y 8 cm de longitud tiene un diámetro de 1.2 cm. ¿Cuánta energía se almacena en el campo magnético cuando circula una corriente de 0.77 A?

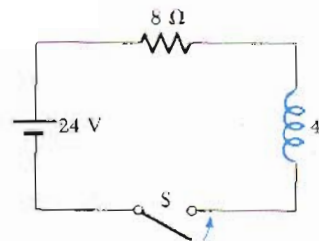


Figura 32.26 (Problemas 34 y 42).

34. Considere el circuito de la figura 32.26. ¿Cuál es la energía almacenada en el inductor cuando la corriente alcanza su valor de equilibrio después de haber cerrado el interruptor?
35. En el circuito de la figura 32.24, sea  $\mathcal{E} = 6.0 \text{ V}$ ,  $L = 350 \text{ mH}$  y  $R = 5 \Omega$ . Calcule las siguientes cantidades después de 0.1 s de haber cerrado el interruptor: a) la rapidez con la cual se almacena energía en el campo magnético del inductor; b) la potencia instantánea suministrada a la resistencia y c) la rapidez con la cual se extrae energía de la batería. d) ¿Cuál es la suma algebraica de las rapidezces individuales de transferencia de energía en el circuito?
36. a) Calcule la energía almacenada en el campo magnético del inductor del problema 10 en  $t = 0.5 \text{ s}$ . b) ¿Con qué rapidez se agrega energía al campo magnético en el tiempo  $t = 0.5 \text{ s}$ ?
37. Calcule la densidad de energía magnética cerca del centro de un solenoide de 990 vueltas/m perfectamente devanado cuando la corriente en el solenoide es de 2.8 A.
38. Un campo eléctrico uniforme de magnitud  $6.8 \times 10^5 \text{ V/m}$  a lo largo de un volumen cilíndrico da una energía

total de 3.4 μJ. ¿Qué campo magnético almacenará la misma energía en la misma región?

39. En un día claro, existe un campo eléctrico vertical cerca de la superficie de la Tierra con una magnitud aproximadamente de 100 V/m. Al mismo tiempo, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud aproximadamente de  $0.5 \times 10^{-4}$  T. Calcule la densidad de energía de los dos campos.
40. Una batería para la cual  $\mathcal{E} = 15$  V se conecta a un circuito RL para el cual  $L = 0.6$  H y  $R = 7 \Omega$ . Cuando la corriente ha alcanzado la mitad de su valor final, ¿cuál es la energía magnética total almacenada en el inductor?
41. Dos inductores ( $L_1 = 85 \mu\text{H}$  y  $L_2 = 200 \mu\text{H}$ ) se conectan en serie a una fuente de poder dc de 850-mA. Calcule la energía almacenada en cada inductor.
42. El interruptor del circuito de la figura 32.26 se cierra en  $t = 0$ . a) Calcule la rapidez con la cual se almacena energía en el inductor después de que ha transcurrido un tiempo igual a la constante de tiempo del circuito. b) ¿Con qué rapidez se disipa energía en forma de calor por efecto joule en la resistencia en este tiempo? c) ¿Cuál es la energía total almacenada en el inductor en este tiempo?
43. Un circuito RL en donde  $L = 4$  H y  $R = 5 \Omega$  se conecta a una batería con  $\mathcal{E} = 22$  V en un tiempo  $t = 0$ . a) ¿Qué energía se almacena en el inductor cuando la corriente en el circuito es 0.5 A? b) ¿Con qué rapidez se almacena energía en el inductor cuando  $I = 1$  A? c) ¿Qué potencia suministra la batería al circuito cuando  $I = 0.5$  A?
44. Un cable coaxial largo tiene un conductor interior y otro exterior con radios de curvatura 0.6 cm y 1.2 cm, respectivamente. a) Calcule la autoinductancia de un cable de 1-m de longitud. b) ¿Cuál es la energía magnética almacenada por unidad de longitud en el cable, cuando la corriente en el circuito es de 8 A? c) Si el radio del conductor exterior se reduce a 0.8 cm, ¿en qué factor se debe incrementar la corriente para mantener constante el valor de la energía magnética por unidad de longitud en el cable?

Sección 32.4 Inductancia mutua

45. Dos bobinas adyacentes, A y B, tienen una inductancia mutua  $M = 28$  mH. ¿Cuál es la fem inducida en la bobina A como función del tiempo cuando la corriente en la bobina B está dada por  $I = 3t^2 - 4t + 5$ , en donde  $I$  está en A cuando  $t$  está en s?
46. Dos bobinas, mantenidas en una posición fija, tienen una inductancia mutua de 100 μH. ¿Cuál es el voltaje de pico en una de la bobinas cuando una corriente sinusoidal dada por  $I(t) = (10 \text{ A}) \sin(1000t)$  fluye en la otra bobina?
47. Una fem de 96 mV es inducida en el devanado de una bobina cuando la corriente de una bobina próxima se incrementa a razón de 1.2 A/s. ¿Cuál es la inductancia mutua de las dos bobinas?
48. Un solenoide largo consta de  $N_1$  vueltas con un radio  $R_1$ . Un segundo solenoide, con  $N_2$  vueltas de radio  $R_2$ , tiene la misma longitud que el primero y se encuentra completamente dentro de éste, con sus ejes paralelos entre sí. a) Suponiendo que por el solenoide 1 circula una

corriente  $I$ , calcule la inductancia mutua. b) Ahora suponga que por el solenoide 2 circula la misma corriente  $I$  (y no circula corriente por el solenoide 1) calcule la inductancia mutua. ¿Se obtiene el mismo resultado?

49. Una bobina de 50 vueltas se enrolla sobre un solenoide largo como se muestra en la figura 32.10. El solenoide tiene una sección transversal con  $8.8 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup> de área y se ha devanado uniformemente con 1000 vueltas por metro de longitud. Calcule la inductancia mutua de los dos devanados.
50. Un solenoide de 70 vueltas tiene 5 cm de longitud, 1 cm de diámetro y circula una corriente de 2-A. Una sola espira de alambre, de 3 cm de diámetro, se mantiene perpendicular al eje del solenoide. ¿Cuál es la inductancia mutua de los dos si el plano de la espira pasa por el centro del solenoide?
51. Dos solenoides cercanos, A y B, que comparten el mismo eje cilíndrico, tienen 400 y 700 vueltas, respectivamente. Una corriente de 3.5 A en la bobina A produce un flujo de 300 μWb en el centro de A y un flujo de 90 μWb en el centro de B. a) Calcule la inductancia mutua de los dos solenoides. b) ¿Cuál es la autoinductancia de la bobina A? c) ¿Qué fem se inducirá en la bobina B cuando la corriente en la bobina A se incrementa a razón de 0.5 A/s?
52. Dos espiras de alambre de una sola vuelta tienen radios  $R$  y  $r$ , con  $R \gg r$ . Las espiras se encuentran en el mismo plano y son concéntricas. a) Muestre que la inductancia mutua del par es  $M = \mu_0 \pi^2 / 2R$ . (Sugerencia: suponga que por la espira más grande circula una corriente  $I$  y calcule el flujo resultante a través de la espira más pequeña). b) Calcule  $M$  para  $r = 2$  cm y  $R = 20$  cm.

Sección 32.5 Oscilaciones en un circuito LC

53. Un condensador de 1.0-μF se carga con una fuente de poder dc de 40-V. El capacitor, totalmente cargado, ahora se descarga a través de un inductor de 10-mH. Encuentre la corriente máxima que se genera en las oscilaciones resultantes.
54. Un circuito LC consta de un inductor 20 mH y un condensador 0.5 μF. Si la corriente máxima instantánea en el circuito es 0.1 A, ¿cuál es la diferencia de potencial más grande que aparece a través del condensador?
55. Un circuito LC del tipo que se muestra en la figura 32.11 tiene una inductancia de 0.57 mH y un capacitor de 15 pF. El condensador se carga a su valor máximo con una batería de 32-V. Ahora se remueve la batería del circuito y el condensador se descarga a través del inductor. a) Si toda la resistencia del circuito se desprecia, calcule el valor máximo de la corriente en el circuito oscilador. b) ¿Con qué frecuencia oscila el circuito? c) ¿Cuál es la máxima energía almacenada en el campo magnético del inductor?
56. Calcule la inductancia de un circuito LC que oscila a una frecuencia de 120 Hz cuando la capacitancia es de 8 μF.
57. Una inductancia constante  $L = 1.05 \mu\text{H}$  se conecta en serie con un capacitor variable en la sección de sintonía de un radio. ¿Qué capacitancia sintonizará en la señal

de una estación que transmite con una frecuencia de 96.3 MHz?

8. Un circuito LC (que se ve en la figura 32.11) contiene un inductor 82-mH y un condensador 17- $\mu$ F, el cual tiene una carga inicial de 180- $\mu$ C. El interruptor se cierra en  $t = 0$ . a) Encuentre la frecuencia (en Hz) de la oscilación resultante. En el instante  $t = 1.0$  ms, encuentre b) la carga en el condensador y c) la corriente en el circuito.

9. a) ¿Qué capacitancia se debe combinar con un inductor 45 mH para que se dé una frecuencia de resonancia de 125 Hz? b) ¿Qué intervalo de tiempo debe transcurrir entre acumulaciones de carga máxima del mismo signo en una placa del condensador?

10. Por un circuito LC circula una corriente que oscila con un periodo  $T$ . Si la carga del condensador es máxima en  $t = 0$ , ¿en qué tiempo la energía almacenada en el campo eléctrico del condensador será igual a la energía almacenada en el campo magnético del inductor? (Expresese la respuesta en fracciones de  $T$ ).

1. Un circuito LC consta de un inductor 3.3 H y un condensador 840 pF, que inicialmente tiene una carga de 105  $\mu$ C. En  $t = 0$  se cierra el interruptor de la figura 32.11. Calcule las siguientes cantidades en el instante  $t = 2.0$  ms: a) la energía almacenada en el condensador; b) la energía almacenada en el inductor; c) la energía total en el circuito.

2. Una batería de 6-V se utiliza para cargar un condensador de 50  $\mu$ F. Posteriormente se descarga a través de un inductor de 0.34 mH. a) Encuentre la carga máxima en el condensador. b) Calcule la corriente máxima en el circuito. c) Calcule la energía máxima almacenada en cada uno de los componentes.

**Sección 32.6 El circuito RLC**

3. Considere el circuito de la figura 32.16. Sea  $R = 7.6 \Omega$ ,  $L = 2.2$  mH y  $C = 1.8 \mu$ F. a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada del circuito. b) ¿Cuál es el valor de la resistencia crítica en el circuito?

4. Considere un circuito LC en serie ( $L = 2.18$  H,  $C = 6$  nF). ¿Cuál es el valor máximo de la resistencia que, conectada en serie con  $L$  y  $C$ , permitirá al circuito continuar oscilando?

5. Considere un circuito LC con  $L = 500$  mH y  $C = 0.1 \mu$ F. a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia ( $F_{128C4w_0}$ ) de éste circuito? b) Si una resistencia de 1000  $\Omega$  se introduce en el circuito, ¿cuál sería la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas? c) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre las dos frecuencias?

6. Se inician oscilaciones eléctricas en un circuito en serie con una capacitancia  $C$ , inductancia  $L$ , y resistencia  $R$ . a) Si  $R \ll \sqrt{4LC}$  (bajo amortiguado), ¿cuánto tiempo se requiere para que la amplitud de la corriente en el circuito decaiga a 50% de su valor inicial? b) ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que la energía decrezca a 50% de su valor inicial?

7. a) Demuestre que el cociente de la frecuencia de oscilación ( $(F_{128C4w_0})$  de un oscilador amortiguado LC a la de un oscilador no amortiguado ( $(F_{128C4w_0})$ ) se puede escribir como

$$\frac{\omega_d}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}$$

b) ¿Qué le sucede a este cociente si  $L < 4R^2C$ ?

68. Considere un circuito RLC en serie que consta de un condensador cargado de 500  $\mu$ F, conectado a una inductancia de 32-mH y a una resistencia  $R$ . Calcule la frecuencia de las oscilaciones (en Hz) para los siguientes valores de  $R$ : a)  $R = 0$  (sin amortiguamiento); b)  $R = 16 \Omega$  (amortiguamiento crítico:  $R = \sqrt{4LC}$ ); c)  $R = 4 \Omega$  (bajo-amortiguado:  $R < \sqrt{4LC}$ ); d)  $R = 64 \Omega$  (sobre-amortiguado:  $R > \sqrt{4LC}$ ).

**PROBLEMAS ADICIONALES**

69. Un inductor que tiene una resistencia de 0.5 $\Omega$  se conecta a una batería de 5-V. Un segundo después de haber cerrado el interruptor, la corriente que circula por el circuito es de 4 A. Calcule la inductancia.

70. Una barra de hierro dulce ( $\mu = 800\mu_0$ ) se utiliza como núcleo de un solenoide. La barra tiene un diámetro de 24-mm y 10 cm de longitud. 10 m de alambre de calibre 22 (diámetro = 0.644 mm) se devana alrededor de la barra de hierro en una sola capa uniforme, excepto por 10-cm en cada extremo, que se utilizará para las conexiones. a) ¿Cuántas vueltas de alambre se pueden dar alrededor de la barra? (Sugerencia: el diámetro del alambre se suma al diámetro de la barra para determinar la circunferencia de cada vuelta. También, el alambre se enreda en diagonal a lo largo de la superficie de la barra). b) ¿Cuál es la resistencia del inductor? c) ¿Cuál es la inductancia?

71. La corriente en un inductor  $L$  varía con el tiempo como se muestra en la figura 32.27, donde los valores de  $I(t)$  están en unidades arbitrarias. Trace una gráfica del voltaje a través del inductor (en unidades arbitrarias) durante el intervalo de tiempo de 0 a 2 ms.

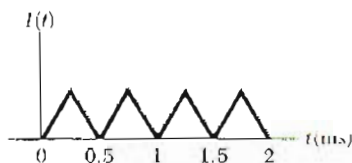


Figura 32.27 (Problema 71).

72. La energía total almacenada en el circuito LC de la figura 32.12 es 2 J. La inductancia es 10-2 H y la capacitancia es 100  $\mu$ F. Calcule a) la corriente máxima a través del inductor y b) la diferencia de potencial máxima a través del condensador. c) ¿Cuál es el intervalo de tiempo mínimo entre un máximo de la corriente [calculada en a)] y la diferencia de potencial máxima [calculada en b)]?

73. Cuando la corriente  $I$  en la parte del circuito de la figura 32.28 es 2 A y se está incrementando a razón de 1 A/s, la diferencia de potencial medida es  $V_{ab} = 8$  V. Sin embargo, cuando la corriente es  $I = 2$  A y está decreciendo a razón de 1 A/s, la diferencia de potencial medida es  $V_{ab} = 4$  V. Calcule los valores de  $L$  y de  $R$ .



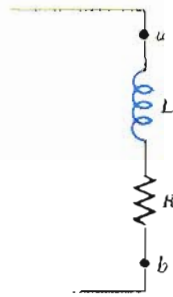


Figura 32.28 (Problema 73).

74. Un alambre de platino de 2.5 mm de diámetro se conecta en serie a un condensador de  $100 \mu\text{F}$  y a un inductor de  $1.2 \times 10^{-3} \mu\text{H}$  para formar un circuito RLC. La resistividad del platino es  $11 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Calcule la longitud máxima de alambre para la cual la corriente en el circuito oscilará.
75. Suponga que el interruptor en el circuito de la figura 32.29 está inicialmente en la posición 1. Muestre que si el interruptor se tira de la posición 1 a la 2, toda la energía almacenada en el campo magnético del inductor se disipará como energía térmica en la resistencia.

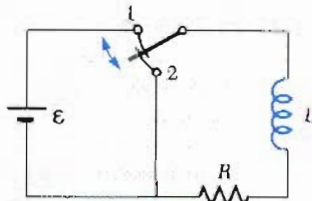


Figura 32.29 (Problemas 75, 85, y 86).

76. a) Determine la constante de tiempo del circuito de la figura 32.30. b) ¿Cuánta energía se almacena en el inductor de 30-mH cuando la energía total almacenada en el circuito es 50% del máximo valor posible? (Desprecie la inductancia mutua entre las bobinas.)

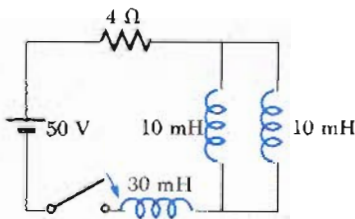


Figura 32.30 (Problema 76).

77. En  $t = 0$ , el interruptor de la figura 32.31 se cierra. Aplicando las leyes de Kirchhoff de las corrientes instantáneas y la de los voltajes a las dos mallas del circuito, demuestre que la corriente a través del inductor está dada por

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} [1 - e^{-(R'/L)t}]$$

donde  $R' = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$

78. La bobina toroidal de la figura 32.32 está formada con  $N$  vueltas y tiene una sección transversal cuadrada. Los radios interior y exterior son  $a$  y  $b$ , respectivamente. a)

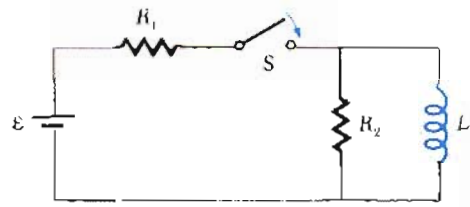


Figura 32.31 (Problema 77).

Demuestre que la autoinductancia de la bobina está dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \frac{ln}{b/a}$$

b) Utilice este resultado para calcular la autoinductancia de un toroide con 500-vueltas y con  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$  y  $h = 1 \text{ cm}$ . c) En el problema 14, se obtuvo una fórmula aproximada para la inductancia de un toroide en donde  $R \gg r$ . Para ver la exactitud de este resultado, utilice la expresión del problema 14 para calcular (aproximadamente) la inductancia del toroide descrito en la parte b).

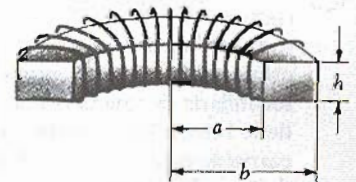


Figura 32.32 (Problema 78).

79. La batería del circuito de la figura 32.33 tiene una fem  $\mathcal{E} = 24 \text{ V}$ . a) ¿Qué corriente suministra la batería 1 ms después de haber cerrado el interruptor? b) Determine la diferencia de potencial a través de la resistencia de  $5 \text{ }\Omega$  después de 3 ms de haber cerrado el interruptor. (Desprecie la inductancia mutua de la bobina.)

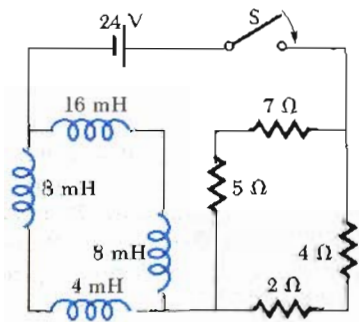


Figura 32.33 (Problema 79).

80. En problemas anteriores, cuando dos o más bobinas estaban presentes en un circuito, se supuso que su posición era tal que el flujo de una bobina no enlazaba las espiras de la otra. Ahora considere la situación que se muestra en la figura 32.34, en donde dos solenoides coaxiales están colocados de tal forma que el flujo de una enlaza el devanado de la otra. a) Utilice el teorema

de las espiras de Kirchoff para demostrar que la inductancia efectiva del par está dada por

$$L_{\text{eff}} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

donde  $M$  es la inductancia mutua de los dos solenoides.  
 b) ¿Por qué es necesario que aparezcan los signos + y - en el término  $2M$ ?

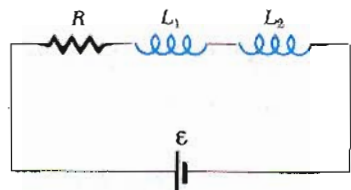


Figura 32.34 (Problema 80).

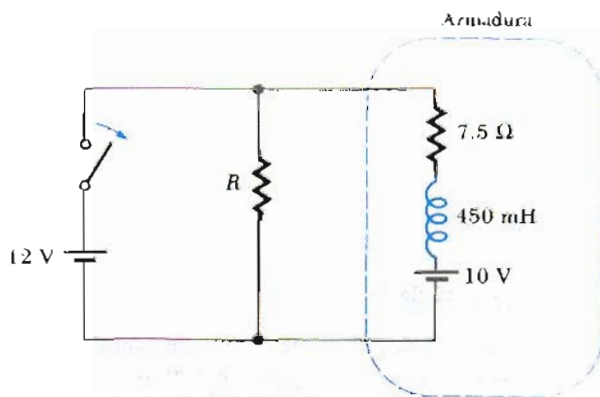


Figura 32.35 (Problema 83).

31. Dos alambres largos paralelos, cada uno con radio  $a$ , tienen sus centros separados una distancia  $d$  y circula por ellos corrientes iguales pero en direcciones opuestas. Desprecie el flujo dentro de los alambres mismos y calcule la inductancia por unidad de longitud de este par de alambres.
32. Un solenoide con núcleo de aire de 0.5 m de longitud contiene 1000 vueltas y tiene un área en la sección transversal de 1 cm<sup>2</sup>. a) Despreciando los efectos en los extremos, ¿cuál es la autoinductancia? b) Una bobina secundaria devanada alrededor del centro del solenoide tiene 100 vueltas. ¿Cuál es la inductancia mutua? c) Una corriente constante de 1 A circula por la bobina secundaria, y el solenoide está conectado a una carga de 103  $\Omega$ . La corriente constante deja de circular repentinamente. ¿Cuánta carga fluye por la resistencia de carga? Para evitar el daño en un motor eléctrico por corto circuito, en ocasiones se conecta una resistencia de descarga en paralelo con la armadura. Si el motor se desconecta repentinamente cuando está en operación, la resistencia limita el voltaje que aparece a través de la bobina. Considere un motor de 12-V dc que tiene una armadura con una resistencia de 7.5  $\Omega$  y una inductancia de 450 mH. Suponga que la contra fem en la bobina de la armadura es de 10 V cuando el motor opera a rapidez normal. (El circuito equivalente de la armadura se muestra en la figura 32.35.) Calcule la resistencia máxima  $R$  que limitará a 80 V el voltaje a través de la armadura cuando se desconecta el motor.
34. Por un alambre largo de radio  $R$  circula una corriente estable  $I$ , la que se distribuye uniformemente sobre la sección transversal del conductor. a) ¿Cuál es la densidad

de energía magnética en  $r_1 = R_2$ ? b) Calcule la energía magnética total por unidad de longitud almacenada en el alambre. c) ¿Cuál es la densidad de energía magnética en  $r_2 = 3R$ ? d) Calcule la energía magnética total almacenada por unidad de longitud dentro de un cascarón cilíndrico de radios interior y exterior  $2R$  y  $2.5R$ , respectivamente, cuando el alambre que lleva la corriente está a lo largo del eje del cascarón cilíndrico.

85. El interruptor en el circuito de la figura 32.29 se coloca en la posición 1 en un tiempo  $t = 0$  y después se coloca en la posición 2 en  $t = 0.3$  s. El valor de los parámetros del circuito son  $\mathcal{E} = 24$  V,  $R = 3$   $\Omega$  y  $L = 1.2$  H. a) Calcule la corriente en  $R$  en  $t = 0.6$  s. b) ¿Para qué valor de  $t > 0.3$  s la corriente en  $R$  es la misma que en  $t = 0.15$  s?
86. En el circuito de la figura 32.29, los valores de  $L$ ,  $R$  y  $\mathcal{E}$  son 3.6 mH, 6  $\Omega$  y 36 V, respectivamente. Considere el caso en que el interruptor  $S$  está en la posición 1 en  $t = 0$  quedándose en esa posición indefinidamente. Sea  $t_1$  el tiempo que se requiere para que la corriente en  $R$  se aumente de cero a 9% de su valor máximo y  $t_2$  el tiempo requerido para que la corriente en  $R$  aumente de 90% a 99% de su valor máximo. a) ¿Cuál es el cociente  $t_2$  a  $t_1$ ? b) ¿En qué tiempo la razón de cambio de la corriente será igual a la mitad de la razón de cambio inicial de la corriente? c) ¿En qué tiempo la diferencia de potencial a través de la resistencia tendrá la misma magnitud que la diferencia de potencial a través del inductor? d) ¿En qué tiempo la potencia proporcionada al inductor será igual a la potencia disipada en la resistencia? e) ¿Qué relación existe entre la respuesta obtenida en d) y la constante de tiempo del circuito?

# Apéndice

TABLA A.1 Factores de conversión

Longitud						
	m	cm	km	in.	ft	mi
1 metro	1	$10^2$	$10^{-3}$	39.37	3.281	$6.214 \times 10^{-4}$
1 centímetro	$10^{-2}$	1	$10^{-5}$	0.3937	$3.281 \times 10^{-2}$	$6.214 \times 10^{-6}$
1 kilómetro	$10^3$	$10^5$	1	$3.937 \times 10^4$	$3.281 \times 10^3$	0.6214
1 pulgada	$2.540 \times 10^{-2}$	2.540	$2.540 \times 10^{-5}$	1	$8.333 \times 10^{-2}$	$1.578 \times 10^{-5}$
1 pie	0.3048	30.48	$3.048 \times 10^{-4}$	12	1	$1.894 \times 10^{-4}$
1 milla	1609	$1.609 \times 10^5$	1.609	$6.336 \times 10^4$	5280	1

Masa				
	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	$10^3$	$6.852 \times 10^{-2}$	$6.024 \times 10^{26}$
1 gramo	$10^{-3}$	1	$6.852 \times 10^{-5}$	$6.024 \times 10^{23}$
1 slug (lb/g)	14.59	$1.459 \times 10^4$	1	$8.789 \times 10^{27}$
1 unidad de masa atómica	$1.660 \times 10^{-27}$	$1.660 \times 10^{-24}$	$1.137 \times 10^{-26}$	1

Tiempo					
	s	min	h	día	año
1 segundo	1	$1.667 \times 10^{-2}$	$2.778 \times 10^{-4}$	$1.157 \times 10^{-5}$	$3.169 \times 10^{-8}$
1 minuto	60	1	$1.667 \times 10^{-2}$	$6.994 \times 10^{-4}$	$1.901 \times 10^{-6}$
1 hora	3600	60	1	$4.167 \times 10^{-2}$	$1.141 \times 10^{-4}$
1 día	$8.640 \times 10^4$	1440	24	1	$2.738 \times 10^{-3}$
1 año	$3.156 \times 10^7$	$5.259 \times 10^5$	$8.766 \times 10^3$	365.2	1

Velocidad				
	m/s	cm/s	ft/s	mi/h
1 metro/segundo	1	$10^2$	3.281	2.237
1 centímetro/segundo	$10^{-2}$	1	$3.281 \times 10^{-2}$	$2.237 \times 10^{-2}$
1 pie/segundo	0.3048	30.48	1	0.6818
1 milla/hora	0.4470	44.70	1.467	1

Nota: 1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s.

Fuerza			
	N	dina	lb
1 newton	1	$10^5$	0.2248
1 dina	$10^{-5}$	1	$2.248 \times 10^{-6}$
1 libra	4.448	$4.448 \times 10^5$	1

TABLA A.1 (Continúa)

Trabajo, energía y calor				
	J	erg	ft · lb	
1 joule	1	$10^7$	0.7376	
1 erg	$10^{-7}$	1	$7.376 \times 10^{-8}$	
1 ft · lb	1.356	$1.356 \times 10^7$	1	
1 eV	$1.602 \times 10^{-19}$	$1.602 \times 10^{-12}$	$1.182 \times 10^{-19}$	
1 cal	4.186	$4.186 \times 10^7$	3.087	
1 Btu	$1.055 \times 10^3$	$1.055 \times 10^{10}$	$7.779 \times 10^2$	
1 kWh	$3.600 \times 10^6$	$3.600 \times 10^{13}$	$2.655 \times 10^6$	
	eV	cal	Btu	kWh
1 joule	$6.242 \times 10^{18}$	0.2389	$9.481 \times 10^{-4}$	$2.778 \times 10^{-7}$
1 erg	$6.242 \times 10^{11}$	$2.389 \times 10^{-8}$	$9.481 \times 10^{-11}$	$2.778 \times 10^{-14}$
1 ft · lb	$8.464 \times 10^{18}$	0.3239	$1.285 \times 10^{-3}$	$3.766 \times 10^{-7}$
1 eV	1	$3.827 \times 10^{-20}$	$1.519 \times 10^{-22}$	$4.450 \times 10^{-26}$
1 cal	$2.613 \times 10^{19}$	1	$3.968 \times 10^{-3}$	$1.163 \times 10^{-6}$
1 Btu	$6.585 \times 10^{21}$	$2.520 \times 10^2$	1	$2.930 \times 10^{-4}$
1 kWh	$2.247 \times 10^{25}$	$8.601 \times 10^5$	$3.413 \times 10^2$	1
Presión				
	Pa	dina/cm <sup>2</sup>	atm	
1 pascal	1	10	$9.869 \times 10^{-6}$	
1 dina/centímetro <sup>2</sup>	$10^{-1}$	1	$9.869 \times 10^{-7}$	
1 atmósfera	$1.013 \times 10^5$	$1.013 \times 10^6$	1	
1 centímetro de mercurio*	$1.333 \times 10^3$	$1.333 \times 10^4$	$1.316 \times 10^{-2}$	
1 libra/pulgada <sup>2</sup>	$6.895 \times 10^3$	$6.895 \times 10^4$	$6.805 \times 10^{-2}$	
1 libra/pie <sup>2</sup>	47.88	$4.788 \times 10^2$	$4.725 \times 10^{-4}$	
	cm Hg	lb/in. <sup>2</sup>	lb/ft <sup>2</sup>	
1 newton/metro <sup>2</sup>	$7.501 \times 10^{-4}$	$1.450 \times 10^{-4}$	$2.089 \times 10^{-2}$	
1 dina/centímetro <sup>2</sup>	$7.501 \times 10^{-5}$	$1.450 \times 10^{-5}$	$2.089 \times 10^{-3}$	
1 atmósfera	76	14.70	$2.116 \times 10^3$	
1 centímetro de mercurio*	1	0.1943	27.85	
1 libra/pulgada <sup>2</sup>	5.171	1	144	
1 libra/pie <sup>2</sup>	$3.591 \times 10^{-2}$	$6.944 \times 10^{-3}$	1	

\* A 0°C y en un lugar donde la aceleración debida a la gravedad sea su valor estándar, 9.80665 m/s<sup>2</sup>.

TABLA A.2 Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas

Cantidad	Símbolo	Unidad*	Dimensiones†	Unidades del SI
aceleración	$a$	m/s <sup>2</sup>	L/T <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
aceleración angular	$\alpha$	rad/s <sup>2</sup>	T <sup>-2</sup>	s <sup>-2</sup>
ángulo	$\theta, \phi$	radián (rad)	1	
área	$A$	m <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
calor	$Q$	joule (J)	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
calor específico	$c$	J/kg · K	L <sup>2</sup> /T <sup>2</sup> · K	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> · K
calor específico molar	$C$	J/mol · K		kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> · kmol · K
campo eléctrico	$E$	V/m	ML/QT <sup>2</sup>	kg · m/A · s <sup>3</sup>

(Continúa tabla)

TABLA A.2 (Continúa)

Cantidad	Símbolo	Unidad*	Dimensiones†	Unidades del SI
Campo magnético	<i>B</i>	tesla (T) (= Wb/m <sup>2</sup> )	M/QT	kg/A · s <sup>2</sup>
Cantidad de sustancia	<i>n</i>	mol		mol
Capacitancia	<i>C</i>	farad (F) (= C/V)	Q <sup>2</sup> T <sup>2</sup> /ML <sup>2</sup>	A <sup>2</sup> · s <sup>4</sup> /kg · m <sup>2</sup>
Carga	<i>q, Q, e</i>	coulomb (C)	Q	A · s
Conductividad	<i>σ</i>	1/Ω · m	Q <sup>2</sup> T/ML <sup>3</sup>	A <sup>2</sup> · s <sup>3</sup> /kg · m <sup>3</sup>
Constante dieléctrica	<i>k</i>			
Corriente	<i>I</i>	AMPERE	Q/T	A
Densidad	<i>ρ</i>	kg/m <sup>3</sup>	M/L <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Densidad de carga				
Lineal	<i>λ</i>	C/m	Q/L	A · s/m
Superficial	<i>σ</i>	C/m <sup>2</sup>	Q/L <sup>2</sup>	A · s/m <sup>2</sup>
Volumétrica	<i>ρ</i>	C/m <sup>3</sup>	Q/L <sup>3</sup>	A · s/m <sup>3</sup>
Densidad de corriente	<i>J</i>	A/m <sup>2</sup>	Q/T <sup>2</sup>	A/m <sup>2</sup>
Desplazamiento	<i>s</i>	METRO	L	m
Distancia	<i>d, h</i>			
Longitud	<i>ℓ, L</i>			
Energía	<i>E, U, K</i>	joule (J)	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Entropía	<i>S</i>	J/K	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup> °K	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> · K
Flujo eléctrico	<i>Φ</i>	V · m	ML <sup>3</sup> /QT <sup>2</sup>	kg · m <sup>3</sup> /A · s <sup>3</sup>
Flujo magnético	<i>Φ<sub>m</sub></i>	weber (Wb)	ML <sup>2</sup> /QT	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>2</sup>
Frecuencia	<i>f, ν</i>	hertz (Hz)	T <sup>-1</sup>	s <sup>-1</sup>
Frecuencia angular	<i>ω</i>	rad/s	T <sup>-1</sup>	s <sup>-1</sup>
Fuerza	<i>F</i>	newton (N)	ML/T <sup>2</sup>	kg · m/s <sup>2</sup>
Fuerza electromotriz	<i>ε</i>	volt (V)	ML <sup>2</sup> /QT <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>4</sup>
Inductancia	<i>L</i>	henry (H)	ML <sup>2</sup> /Q <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> · s <sup>2</sup>
Longitud de onda	<i>λ</i>	m	L	m
Masa	<i>m, M</i>	KILOGRAMO	M	kg
Momento angular	<i>L</i>	kg · m <sup>2</sup> /s	ML <sup>2</sup> /T	kg · m <sup>2</sup> /s
Momento de inercia	<i>I</i>	kg · m <sup>2</sup>	ML <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup>
Momento de una fuerza	<i>τ</i>	N · m	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Momento dipolar eléctrico	<i>p</i>	C · m	QL	A · s · m
Momento dipolar magnético	<i>μ</i>	N · m/T	QL <sup>2</sup> /T	A · m <sup>2</sup>
Momento lineal	<i>p</i>	kg · m/s	ML/T	kg · m/s
Número atómico	<i>Z</i>			
Periodo	<i>T</i>	s	T	s
Permeabilidad del espacio	<i>μ<sub>0</sub></i>	N/A <sup>2</sup> (= H/M)	ML/Q <sup>2</sup> T	kg · m/A <sup>2</sup> · s <sup>2</sup>
Permitividad del espacio	<i>ε<sub>0</sub></i>	C <sup>2</sup> /N · m <sup>2</sup> (= F/m)	Q <sup>2</sup> T <sup>2</sup> /ML <sup>3</sup>	A <sup>2</sup> · s <sup>4</sup> /kg · m <sup>3</sup>
Potencia	<i>P</i>	watt (W) (= J/s)	ML <sup>2</sup> /T <sup>3</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
Potencial (voltaje)	<i>V</i>	volt (V) (= J/C)	ML <sup>2</sup> /QT <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>3</sup>
Presión	<i>P, p</i>	pascal (Pa) (= N/m <sup>2</sup> )	M/LT <sup>2</sup>	kg/m · s <sup>2</sup>
Rapidez	<i>v</i>	m/s	L/T	m/s
Resistencia	<i>R</i>	ohm (Ω) (= V/A)	ML <sup>2</sup> /Q <sup>2</sup> T	kg · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> · s <sup>3</sup>
Temperatura	<i>T</i>	KELVIN	°K	K
Tiempo	<i>t</i>	SEGUNDO	T	s
Trabajo	<i>W</i>	joule (J) (= N · m)	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Velocidad angular	<i>ω</i>	rad/s	T <sup>-1</sup>	s <sup>-1</sup>
Volumen	<i>V</i>	m <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>

\* Las unidades básicas del SI están dadas en letras mayúsculas

† Los símbolos M, L, T y Q denotan masa, longitud, tiempo y carga, respectivamente.

TABLA A.3 Tabla de masas atómicas\*

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Número másico A	Masa atómica†	Porcentaje de abundancia o modo de decaimiento (si es radiactivo)‡	Vida media si es (radiactivo)
0	(Neutrón)	n	1	1.008665	$\beta^-$	10.6 min
1	Hidrógeno	H	1	1.007825	99.985	12.33 y
			2	2.014102	0.015	
			3	3.016049	$\beta^-$	
2	Helio	He	3	3.016029	0.00014	53.3 días
			4	4.002603	$\approx 100$	
3	Litio	Li	6	6.015123	7.5	$6.7 \times 10^{-17}$ s
			7	7.016005	92.5	
4	Berilio	Be	7	7.016930	EC, $\gamma$	5730 y
			8	8.005305	$2\alpha$	
			9	9.012183	100	
5	Boro	B	10	10.012938	19.8	20.4 min
			11	11.009305	80.2	
6	Carbón	C	11	11.011433	$\beta^+$ , EC	9.96 min
			12	12.000000	98.89	
			13	13.003355	1.11	
			14	14.003242	$\beta^-$	
7	Nitrógeno	N	13	13.005739	$\beta^+$	122 s
			14	14.003074	99.63	
			15	15.000109	0.37	
			16	15.994915	99.759	
8	Oxígeno	O	15	15.003065	$\beta^+$ , EC	15.0 h
			16	15.994915	99.759	
			18	17.999159	0.204	
9	Flúor	F	19	18.998403	100	2.602 y
10	Neón	Ne	20	19.992439	90.51	
			22	21.991384	9.22	
11	Sodio	Na	22	21.994435	$\beta^+$ , EC, $\gamma$	15.0 h
			23	22.989770	100	
			24	23.990964	$\beta^-$ , $\gamma$	
12	Magnesio	Mg	24	23.985045	78.99	2.62 h
13	Aluminio	Al	27	26.981541	100	
14	Silicio	Si	28	27.976928	92.23	14.28 días
			31	30.975364	$\beta^-$ , $\gamma$	
15	Fósforo	P	31	30.973763	100	87.4 días
			32	31.973908	$\beta^-$	
16	Azufre	S	32	31.972072	95.0	87.4 días
			35	34.969033	$\beta^-$	
17	Cloro	Cl	35	34.968853	75.77	1.28 $\times 10^9$ y
			37	36.965903	24.23	
18	Argón	Ar	40	39.962383	99.60	1.28 $\times 10^9$ y
19	Potasio	K	39	38.963708	93.26	
			40	39.964000	$\beta^-$ , EC, $\gamma$ , $\beta^+$	
20	Calcio	Ca	40	39.962591	96.94	1.28 $\times 10^9$ y
21	Escandio	Sc	45	44.955914	100	
22	Titanio	Ti	48	47.947947	73.7	1.28 $\times 10^9$ y
23	Vanadio	V	51	50.943963	99.75	

(Continúa tabla)

TABLA A.3 (Continúa)

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Número másico A	Masa atómica†	Porcentaje de abundancia o modo de decaimiento (si es radiactivo)‡	Vida media si es (radiactivo)
24	Cromo	Cr	52	51.940510	83.79	
25	Magnesio	Mn	55	54.938046	100	
26	Hierro	Fe	56	55.934939	91.8	
27	Cobalto	Co	59	58.933198	100	
			60	59.933820	$\beta^-$ , $\gamma$	5.271 y
28	Níquel	Ni	58	57.935347	68.3	
			60	59.930789	26.1	
			64	63.927968	0.91	
29	Cobre	Cu	63	62.929599	69.2	
			64	63.929766	$\beta^-$ , $\beta^+$	12.7 h
			65	64.927792	30.8	
30	Cinc	Zn	64	63.929145	48.6	
			66	65.926035	27.9	
31	Galio	Ga	69	68.925581	60.1	
32	Germanio	Ge	72	71.922080	27.4	
			74	73.921179	36.5	
33	Arsénico	As	75	74.921596	100	
34	Selenio	Se	80	79.916521	49.8	
35	Bromo	Br	79	78.918336	50.69	
36	Kriptón	Kr	84	83.911506	57.0	
			89	88.917563	$\beta^-$	3.2 min
37	Rubidio	Rb	85	84.911800	72.17	
38	Estroncio	Sr	86	85.909273	9.8	
			88	87.905625	82.6	
			90	89.907746	$\beta^-$	28.8 y
39	Itrio	Y	89	88.905856	100	
40	Circonio	Zr	90	89.904708	51.5	
41	Niobio	Nb	93	92.906378	100	
42	Molibdeno	Mo	98	97.905405	24.1	
43	Tecnecio	Tc	98	97.907210	$\beta^-$ , $\gamma$	$4.2 \times 10^6$ y
44	Rutenio	Ru	102	101.904348	31.6	
45	Rodio	Rh	103	102.90550	100	
46	Paladio	Pd	106	105.90348	27.3	
47	Plata	Ag	107	106.905095	51.83	
			109	108.904754	48.17	
48	Cadmio	Cd	114	113.903361	28.7	
49	Indio	In	115	114.90388	95.7; $\beta^-$	$5.1 \times 10^{14}$ y
50	Estaño	Sn	120	119.902199	32.4	
51	Antimonio	Sb	121	120.903824	57.3	
52	Telurio	Te	130	129.90623	34.5; $\beta$	$2 \times 10^{21}$ y
53	Yodo	I	127	126.904477	100	
			131	130.906118	$\beta^-$ , $\gamma$	8.04 días

(Continúa tabla)

\* Los datos fueron tomados de la *Chart of the Nuclides*, 12a ed. General Electric, 1977, y de C. M. Lederer y V. S. Shirley, eds, *Table of Isotopes*, 7a. edición, John Wiley & Sons, Inc., 1978.

† Las masas dadas en la columna 5 son para el átomo neutro, incluyendo los Z electrones.

‡ Los procesos EC significan "captura de electrón".

BLA A.3 (Continúa)

Numero atómico Z	Elemento	Símbolo	Número máscico A	Masa atómica†	Porcentaje de abundancia o modo de decaimiento (si es radiactivo)‡	Vida media si es (radiactivo)
4	Xenón	Xe	132	131.90415	26.9	
			136	135.90722	8.9	
5	Cesio	Cs	133	132.90543	100	
6	Bario	Ba	137	136.90582	11.2	
			138	137.90524	71.7	
			144	143.922673	$\beta^-$	11.9 s
7	Lantano	La	139	138.90636	99.911	
8	Cerio	Ce	140	139.90544	88.5	
9	Praseodimio	Pr	141	140.90766	100	
0	Neodimio	Nd	142	141.90773	27.2	
1	Promecio	Pm	145	144.91275	EC, $\alpha$ , $\gamma$	17.7 y
2	Samario	Sm	152	151.91974	26.6	
3	Europio	Eu	153	152.92124	52.1	
4	Gadolinio	Gd	158	157.92411	24.8	
5	Terbio	Tb	159	158.92535	100	
6	Disprosio	Dy	164	163.92918	28.1	
7	Holmio	Ho	165	164.93033	100	
8	Erbio	Er	166	165.93031	33.4	
9	Tulio	Tm	169	168.93423	100	
0	Iterbio	Yb	174	173.93887	31.6	
1	Lutecio	Lu	175	174.94079	97.39	
2	Hafnio	Hf	180	179.94656	35.2	
3	Tantalio	Ta	181	180.94801	99.988	
4	Tungsteno (wolframio)	W	184	183.95095	30.7	
5	Renio	Re	187	186.95577	62.60, $\beta^-$	$4 \times 10^{10}$ y
6	Osmio	Os	191	190.96094	$\beta^-, \gamma$	15.4 días
			192	191.96149	41.0	
7	Iridio	Ir	191	190.96060	37.3	
			193	192.96294	62.7	
8	Platino	Pt	195	194.96479	33.8	
9	Oro	Au	197	196.96656	100	
0	Mercurio	Hg	202	201.97063	29.8	
1	Talio	Tl	205	204.97441	70.5	
2	Plomo	Pb	204	203.973044	$\beta^-, 1.48$	$1.4 \times 10^{17}$ y
			206	205.97446	24.1	
			207	206.97589	22.1	
			208	207.97664	52.3	
			210	209.98418	$\alpha, \beta^-, \gamma$	22.3 y
			211	210.98874	$\beta^-, \gamma$	36.1 min
			212	211.99188	$\beta^-, \gamma$	10.64 h
			214	213.99980	$\beta^-, \gamma$	26.8 min
3	Bismuto	Bi	209	208.98039	100	
			211	210.98726	$\alpha, \beta^-, \gamma$	2.15 min

(Continúa tabla)



TABLA A.3 (Continúa)

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Número másico A	Masa atómica†	Porcentaje de abundancia o modo de decaimiento (si es radiactivo)‡	Vida media si es (radiactivo)
84	Polonio	Po	210	209.98286	$\alpha, \gamma$	138.38 días
			214	213.99519	$\alpha, \gamma$	164 $\mu$ s
85	Astato	At	218	218.00870	$\alpha, \beta^-$	$\approx 2$ s
86	Radón	Rn	222	222.017574	$\alpha, \gamma$	3.8235 días
87	Francio	Fr	223	223.019734	$\alpha, \beta^-, \gamma$	21.8 min
88	Radio	Ra	226	226.025406	$\alpha, \gamma$	$1.60 \times 10^3$ y
			228	228.031069	$\beta^-$	5.76 y
89	Actinio	Ac	227	227.027751	$\alpha, \beta^-, \gamma$	21.773 y
90	Torio	Th	228	228.02873	$\alpha, \gamma$	1.9131 y
			232	232.038054	100, $\alpha, \gamma$	$1.41 \times 10^{10}$ y
			234	234.040952	$\alpha, \gamma$	$1.61 \times 10^4$ y
91	Protactinio	Pa	231	231.035881	$\alpha, \gamma$	$3.28 \times 10^4$ y
92	Uranio	U	232	232.03714	$\alpha, \gamma$	72 y
			233	233.039629	$\alpha, \gamma$	$1.592 \times 10^5$ y
			235	235.043925	0.72, $\alpha, \gamma$	$7.038 \times 10^8$ y
			236	236.045563	$\alpha, \gamma$	$2.342 \times 10^7$ y
			238	238.050786	99.275; $\alpha, \gamma$	$4.468 \times 10^9$ y
			239	239.054291	$\beta^-, \gamma$	23.5 min
93	Neptunio	Np	239	239.052932	$\beta^-, \gamma$	2.35 días
94	Plutonio	Pu	239	239.052158	$\alpha, \gamma$	$2.41 \times 10^4$ y
95	Americio	Am	243	243.061374	$\alpha, \gamma$	$7.37 \times 10^3$ y
96	Curio	Cm	245	245.065487	$\alpha, \gamma$	$8.5 \times 10^3$ y
97	Berkelio	Bk	247	247.07003	$\alpha, \gamma$	$1.4 \times 10^3$ y
98	Californio	Cf	249	249.074849	$\alpha, \gamma$	351 y
99	Einsteinio	Es	254	254.08802	$\alpha, \gamma, \beta^-$	276 días
100	Fermio	Fm	253	253.08518	EC, $\alpha, \gamma$	3.0 días
101	Mendelevio	Md	255	255.0911	EC, $\alpha$	27 min
102	Nobelio	No	255	255.0933	EC, $\alpha$	3.1 min
103	Lawrencio	Lr	257	257.0998	$\alpha$	$\approx 35$ s
104	Centésimo cuarto	Rf	261	261.1087	$\alpha$	1.1 min
105	Centésimo quinto	Ha	262	262.1138	$\alpha$	0.7 min
106	Centésimo sexto		263	263.1184	$\alpha$	0.9 s
107	Centésimo séptimo		261	261	$\alpha$	1–2 ms

\* Los datos fueron tomados de la *Chart of the Nuclides*, 12a. ed. General Electric, 1977, y de C. M. Lederer y V. S. Shirley, eds, *Table of Isotopes*, 7a. edición, John Wiley & Sons, Inc., 1978.

† Las masas dadas en la columna 5 son para el átomo neutro, incluyendo los Z electrones.

‡ Los procesos EC significan "captura de electrón".

# Respuestas a problemas de número impar

## CAPÍTULO 23

1.  $5.14 \times 10^3 \text{ N}$   
 3.  $1.60 \times 10^{-9} \text{ N}$  repeliéndose una a la otra  
 5.  $(8.50 \times 10^{-2} \text{ N})i$   
 7.  $0.873 \text{ N}$  a  $330^\circ$   
 9.  $40.9 \text{ N}$  a  $263^\circ$   
 11.  $(0, 0.853 \text{ m})$   
 13. a)  $295 \text{ nC}$  b)  $(-0.375 \text{ N})i$   
 15. a)  $(-5.58 \times 10^{-11} \text{ N/C})j$  b)  $(1.02 \times 10^{-7} \text{ N/C})j$   
 17. a)  $(-5.20 \times 10^3 \text{ N/C})i$  b)  $(2.93 \times 10^3 \text{ N/C})j$   
 c)  $5.85 \times 10^3 \text{ N/C}$  a  $225^\circ$   
 19. a)  $(1.29 \times 10^4 \text{ N/C})j$  b)  $(-3.87 \times 10^{-2} \text{ N})j$   
 21. 0

23. a) En el centro b)  $\left(\frac{\sqrt{3} kq}{a^2}\right)j$

25. a)  $0.914 \frac{kq}{a^2}$  a  $225^\circ$  b)  $0.914 \frac{kq^2}{a^2}$  a  $45^\circ$

27.  $7.82 \text{ m}$  a la izquierda de la carga negativa

29.  $-\left(\frac{k\lambda_0}{x_0}\right)i$

31. a)  $(6.65 \times 10^6 \text{ N/C})i$  b)  $(2.42 \times 10^7 \text{ N/C})i$   
 c)  $(6.40 \times 10^6 \text{ N/C})i$  d)  $(6.65 \times 10^5 \text{ N/C})i$

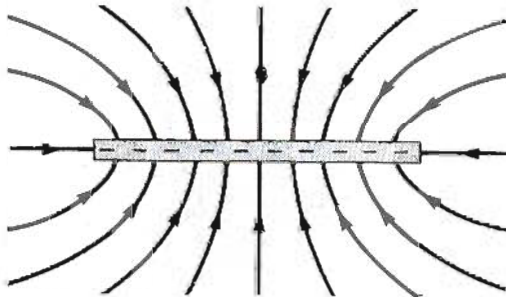
33. a)  $0.145 \text{ C/m}^3$  b)  $1.94 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$

35. a)  $9.37 \times 10^7 \text{ N/C}$  desde el centro;  
 $1.04 \times 10^8 \text{ N/C}$  es  $11.0\%$  mayor b)  $516 \text{ kN/C}$   
 desde el centro;  $520 \text{ kN/C}$  es  $0.749\%$  mayor

37.  $7.20 \times 10^7 \text{ N/C}$  desde el centro;  
 $1.00 \times 10^8 \text{ N/C}$  alejándose axialmente

39.  $(-21.6 \text{ MN/C})i$

41.



43. a)  $\frac{q_1}{q_2} = -1/3$  b)  $q_1$  es negativa y  $q_2$  es positiva

45. a)  $6.14 \times 10^{10} \text{ m/s}^2$  b)  $19.5 \mu\text{s}$   
 c)  $11.7 \text{ m}$  d)  $1.20 \text{ fJ}$

47.  $1.00 \times 10^3 \text{ N/C}$  en la dirección del haz

49. a)  $(-5.75 \times 10^{13} \text{ m/s}^2)i$  b)  $2.84 \times 10^6 \text{ m/s}$   
 c)  $49.4 \text{ ns}$

51. a)  $111 \text{ ns}$  b)  $5.67 \text{ mm}$

c)  $(450 \text{ km/s})i + (102 \text{ km/s})j$

53. a)  $36.9^\circ, 53.1^\circ$  b)  $167 \text{ ns}, 221 \text{ ns}$

55. a)  $10.9 \text{ nC}$  b)  $5.43 \times 10^{-3} \text{ N}$

57. a)  $\theta_1 = \theta_2$

59.  $204 \text{ nC}$

63. a)  $-\left(\frac{4kq}{3a^2}\right)j$  b)  $(0, 2.00 \text{ m})$

65.  $E = -\frac{k\lambda\ell}{d(d+\ell)}(i+j)$

67.  $5.27 \times 10^{17} \text{ m/s}^2; 0.854 \text{ mm}$

71. a)  $F = \frac{kq^2}{s^2}(1.90)(i+j+k)$

- b)  $F = 3.29 \frac{kq^2}{s^2}$  en la dirección alejándose del  
 vértice diagonalmente opuesto

77.  $\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)i$  para  $x > 0$  y  $-\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)i$  para  $x < 0$

## CAPÍTULO 24

1. a)  $1.98 \times 10^6 \text{ Nm}^2/\text{C}$  b) 0

c)  $1.92 \times 10^6 \text{ Nm}^2/\text{C}$

3. a)  $aA$  b)  $bA$  c) 0

5.  $4.14 \times 10^6 \text{ N/C}$

7.  $bhw^2/3$

9.  $1.87 \times 10^3 \text{ Nm}^2/\text{C}$

11.  $5.65 \times 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$

13. a)  $1.36 \times 10^6 \text{ Nm}^2/\text{C}$  b)  $6.78 \times 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$

- c) No, las mismas líneas de campo van a través de  
 esferas de todos los tamaños.

15.  $-6.89 \times 10^6 \text{ Nm}^2/\text{C}$ . El número de líneas que entran  
 excede el número de líneas que sale por 2.91 veces o  
 más.

17.  $13.7 \mu\text{C}$ , No

19. a)  $5.78 \times 10^3 \text{ Nm}^2/\text{C}$  b)  $51.1 \text{ nC}$

21. a)  $761 \text{ nC}$  b) Puede tener cualquier distribución.

Todas las cargas punto y distribuidor, positivas y  
 negativas se deben sumar algebraicamente a  $+761 \mu\text{C}$ .

- c) La carga total es de  $-761 \text{ nC}$

23. a)  $\frac{Q}{2\epsilon_0}$  (afuera del volumen encerrado)

b)  $-\frac{Q}{2\epsilon_0}$  (dentro de él)

25. a) 0 b)  $7.20 \times 10^6 \text{ N/C}$  alejándose del centro

27. a)  $0.713 \mu\text{C}$  b)  $5.7 \mu\text{C}$

29. a) 0    b)  $(3.66 \times 10^5 \text{ N/C})\hat{r}$   
 c)  $(1.46 \times 10^6 \text{ N/C})\hat{r}$     d)  $(6.50 \times 10^5 \text{ N/C})\hat{r}$   
 31.  $E = (a/2\epsilon_0)\hat{r}$   
 33. a)  $5.14 \times 10^4 \text{ N/C}$  hacia afuera    b)  $646 \text{ Nm}^2/\text{C}$   
 35.  $E = (\rho r/2\epsilon_0)\hat{r}$   
 37.  $5.08 \times 10^5 \text{ N/C}$  hacia arriba.  
 39. a) 0    b)  $5.40 \times 10^3 \text{ N/C}$   
 c)  $540 \text{ N/C}$ , ambas radialmente hacia afuera  
 41. a)  $80.0 \text{ nC/m}^2$  sobre cada cara    b)  $(9.04 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{k}$   
 c)  $(-9.04 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{k}$   
 43. a) 0    b)  $(125 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{r}$     c)  $(639 \text{ N/C})\hat{r}$   
 d) No cambia  
 45. a) 0    b)  $(8.00 \times 10^7 \text{ N/C})\hat{r}$     c) 0  
 d)  $(7.35 \times 10^6 \text{ N/C})\hat{r}$   
 47. a)  $-\lambda, +3\lambda$     b)  $\left(\frac{3\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\right)\hat{r}$

49. b)  $\frac{Q}{2\epsilon_0}$     c)  $\frac{Q}{\epsilon_0}$   
 51. a)  $E = \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0}\right)\hat{r}$  para  $r < a$ ;  $E = \left(\frac{kQ}{r^2}\right)\hat{r}$  para  $a < r < b$ ,  
 $E = 0$  para  $b < r < c$ ;  $E = \left(\frac{kQ}{r^2}\right)\hat{r}$  para  $r > c$   
 b)  $\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi b^2}$  dentro;  $\sigma_2 = +\frac{Q}{4\pi c^2}$  fuera

53. a)  $E = 0$     b)  $E = \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$   
 c)  $E = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$

57.  $g = -\left(\frac{GMr}{R^3}\right)\hat{r}$   
 59. a)  $\sigma/\epsilon_0$  a la izquierda    b) cero    c)  $\sigma/\epsilon_0$  a la derecha

## CAPÍTULO 25

1. 0  
 3. a)  $152 \text{ km/s}$     b)  $6.50 \times 10^6 \text{ m/s}$   
 5. a)  $2.7 \text{ keV}$     b)  $509 \text{ km/s}$   
 7.  $6.41 \times 10^{-19} \text{ C}$   
 9.  $2.10 \times 10^6 \text{ m/s}$   
 1.  $1.35 \text{ MJ}$   
 3.  $432 \text{ V}$ ;  $432 \text{ eV}$   
 5.  $-38.9 \text{ V}$ ; el origen  
 7.  $1.56 \times 10^3 \text{ N/C}$   
 9.  $260 \text{ V}$ , B  
 1.  $2.00 \text{ m}$   
 3.  $119 \text{ nC}$ ,  $2.67 \text{ m}$   
 5.  $-88.2 \text{ kV}$   
 7.  $-11.0 \text{ MV}$   
 9. a)  $-386 \text{ nJ}$ . Energía de enlace positiva debería ponerse para separarlas.    b)  $103 \text{ V}$   
 1. a)  $-27.3 \text{ eV}$     b)  $-6.81 \text{ eV}$     c) 0  
 5.  $20.1 \text{ J}$

37.  $-(0.553)\frac{kQ}{R}$

39. a)  $C/m^2$     b)  $k\alpha \left[ L - d \ln \frac{d+L}{d} \right]$

41.  $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2})$

43.  $E = (6xy - 5)\hat{i} + (3x^2 - 2z^2)\hat{j} - 4yz\hat{k}$ ,  $7.07 \text{ N/C}$   
 45.  $45.0^\circ$

47. a) 0    b)  $\left(\frac{kQ}{r^2}\right)\hat{r}$

49.  $3.38 \text{ MV}$ ;  $3.00 \text{ MV}$  es  $11.1\%$  menor

51.  $1.56 \times 10^{12}$  electrones removidos

53. a) 0,  $1.67 \text{ MV}$     b)  $5.85 \times 10^6 \text{ N/C}$  alejándose,  
 $1.17 \text{ MV}$     c)  $1.19 \times 10^7 \text{ N/C}$  alejándose,  $1.67 \text{ MV}$

55. a)  $4.50 \times 10^7 \text{ N/C}$  hacia afuera,  $30.0 \text{ MN/C}$   
 hacia afuera    b)  $180 \text{ MV}$

57. a)  $450 \text{ kV}$     b)  $7.50 \mu\text{C}$

59.  $5.00 \mu\text{C}$

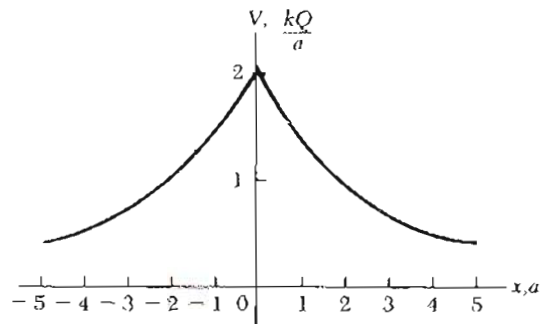
61. a)  $6.00 \text{ m}$     b)  $-2.00 \mu\text{C}$

63.  $1.73 \text{ MV}$

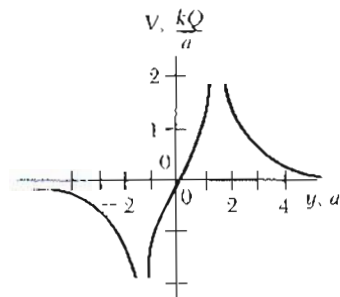
65. a)  $180 \text{ kV}$     b)  $127 \text{ kV}$

67.  $1.12 \text{ MV}$ ;  $1.00 \text{ MV}$  es más pequeño por  $11.1\%$

69.



a)



b)

71. a)  $66.7 \text{ pC}$     b)  $476 \text{ V}$

73.  $k\frac{Q^2}{2R}$

75.  $-142 \text{ J}$

77.  $V = k\sigma \int_{+L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{-L/2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

79.  $E_y = k \frac{Q}{\ell y} \left[ 1 - \frac{y^2}{\ell^2 + y^2 + \ell \sqrt{\ell^2 + y^2}} \right]$

81. a)  $E_r = \frac{2kp \cos \theta}{r^3}$ ,  $E_\theta = \frac{kp \sin \theta}{r^3}$ , sí, no

b)  $E = \frac{3kpxyi}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{kp(2y^2 - x^2)j}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$

83.  $\frac{3}{5} \left( \frac{kQ^2}{R} \right)$

65.  $416 \mu\text{F}$

67.  $1.00 \mu\text{F}$  y  $3.00 \mu\text{F}$

69.  $3.00 \mu\text{F}$

71. 2.33

73. a)  $243 \mu\text{J}$  b)  $2.30 \text{ mJ}$

75.  $177 \mu\text{C}$  y  $88.6 \mu\text{C}$

77. a)  $\frac{3}{4}Q_0$  y  $\frac{1}{2}Q_0$  b)  $\frac{1}{2}V_0$

79.  $1.73 \text{ m}^2$ ,  $3.60 \text{ J}$

81.  $3.00 \mu\text{F}$

83. b)  $Q/Q_0 = \kappa$

85. a)  $\frac{\epsilon_0}{d} [\ell^2 + \ell x(\kappa - 1)]$  b)  $\frac{\epsilon_0 V^2}{2d} [\ell x(\kappa - 1) + \ell^2]$

c)  $\frac{\epsilon_0 V^2}{2d} \ell(\kappa - 1)$  hacia la derecha d)  $1.55 \times 10^{-3} \text{ N}$

89.  $19.0 \text{ kV}$

91.  $3.00 \mu\text{F}$

## CAPÍTULO 26

1.  $13.3 \text{ kV}$

3.  $1.40 \text{ pF}$

5.  $684 \mu\text{C}$

7. a)  $1.33 \mu\text{C}/\text{m}^2$  b)  $13.3 \text{ pF}$

9. a)  $4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)$  b)  $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$

11.  $1.52 \text{ mm}$

13.  $4.42 \mu\text{m}$

15. a)  $1.11 \times 10^9 \text{ N/C}$  hacia la placa negativa

b)  $98.3 \text{ nC}/\text{m}^2$  c)  $3.74 \text{ pF}$  d)  $74.8 \text{ pC}$

17.  $109 \text{ mm}$

19.  $3.54 \text{ nC}$

21. a)  $2.68 \text{ nF}$  b)  $3.02 \text{ kV}$

23. a)  $15.6 \text{ pF}$  b)  $256 \text{ kV}$

25.  $66.7 \text{ nC}$

27.  $18.0 \mu\text{F}$

29. a)  $4.00 \mu\text{F}$  b)  $8.00 \text{ V}$ ,  $4.00 \text{ V}$ ,  $12.0 \text{ V}$ ,  $24.0 \mu\text{C}$ ,  $24.0 \mu\text{C}$ ,  $24.0 \mu\text{C}$

31. a)  $5.96 \mu\text{F}$  b)  $89.2 \mu\text{C}$ ,  $63.1 \mu\text{C}$ ,  $26.4 \mu\text{C}$ ,  $26.4 \mu\text{C}$ .

33.  $120 \mu\text{C}$ ;  $80.0 \mu\text{C}$  y  $40.0 \mu\text{C}$

35. a)  $12.0 \mu\text{F}$  b)  $24.0 \mu\text{C}$ ,  $14.4 \mu\text{C}$ ,  $19.2 \mu\text{C}$ ,  $19.2 \mu\text{C}$

37. a)  $800 \mu\text{C}$ ,  $1200 \mu\text{C}$  b)  $200 \text{ V}$

39.  $83.6 \mu\text{C}$

41.  $12.9 \mu\text{F}$

43.  $\frac{\epsilon_0 A}{(s - d)}$

45.  $90.0 \text{ mJ}$

47. La misma

49.  $800 \text{ pJ}$ ,  $5.79 \text{ mJ}/\text{m}^3$

55. a)  $8.13 \text{ nF}$  b)  $2.40 \text{ kV}$

57.  $16.7 \text{ pF}$ ,  $1.62 \text{ kV}$

59.  $1.04 \text{ m}$

61.  $6.00$

63. a)  $70 \text{ C}$  b)  $55.2 \text{ C}$

## CAPÍTULO 27

1.  $481 \text{ nA}$

3.  $400 \text{ nA}$

5.  $33.3 \text{ C}$

7.  $5.90 \times 10^{25}/\text{m}^3$

9. a)  $1.50 \times 10^5 \text{ A}$  b)  $5.40 \times 10^8 \text{ C}$

11.  $13.3 \mu\text{A}/\text{m}^2$

13.  $1.32 \times 10^{11} \text{ A}/\text{m}^2$

15.  $1.59 \Omega$

17.  $3.23 \times 10^6/\Omega \cdot \text{m}$

19.  $2.57 \text{ mm}$

21.  $9.00 \text{ R}$

23. a)  $1.82 \text{ m}$  b)  $280 \mu\text{m}$

25.  $6.43 \text{ A}$

27. a)  $5.00 \text{ A}$  b)  $1.10 \text{ kV}/\text{m}$  c) Se duplica la corriente para el campo constante

29. a)  $3.18 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  b)  $6.29 \times 10^6 \text{ A}/\text{m}^2$

c)  $49.9 \text{ mA}$  d)  $6.59 \times 10^{-4} \text{ m/s}$  (Se supone 1 electrón de conducción por átomo) e)  $0.400 \text{ V}$

31.  $0.125$

33.  $20.8 \Omega$

35.  $67.6^\circ\text{C}$

37.  $26.2^\circ\text{C}$

39.  $3.03 \times 10^7 \text{ A}/\text{m}^2$

41.  $21.2 \text{ nm}$

43.  $0.833 \text{ W}$

45.  $36.1\%$

47.  $82.9 \text{ V}$

49.  $\frac{P_A}{P_B} = 2$

51.  $28.9 \Omega$

53.  $26.9 \text{ centavos}/\text{día}$

55. a)  $18.8 \text{ A}$  b)  $7.46 \text{ MJ}$  c)  $16.6 \text{ centavos}$

57.  $2020^\circ\text{C}$

59. a)  $9.49 \times 10^{-7} \Omega$  b)  $8.07 \times 10^{-7} \Omega$

63. a)  $R = \frac{\rho L}{\pi(r_b^2 - r_a^2)}$  b)  $37.4 \text{ M}\Omega$

65. 304 nA

$$69. R = \frac{\pi \rho}{2t \ln(a/b)}$$

## CAPÍTULO 28

1.  $R = 7.67 \Omega$
3. a) 1.79 A    b) 10.4 V
5. 12.0  $\Omega$
7. a) 6.73  $\Omega$     b) 1.98  $\Omega$
9.  $r = 2.40 \Omega$
1. a) 5.32 V    b) 40.3 mA, 95.1 mA
3. a) 27.3 V    b) 2.73 A, 1.37 A, 0.91 A
5. 1.99 A, 1.17 A, 0.819 A
7.  $\frac{\pi}{4}R$
9. 14.3 W, 28.5 W, 1.33 W, 4.00 W
11. a) 0.227 A    b) 5.68 V
13. 4.26  $\Omega$
15. -10.4 V
17.  $\frac{4}{13}$  A,  $\frac{6}{13}$  A,  $\frac{11}{13}$  A
19. 6.00 V, 9.00 V
21. 3.50 A, 2.50 A, 1.00 A
23. 10.7 V
25. a) 0.667 A    b) 50.0  $\mu\text{C}$
27. a) 909 mA    b) -1.82 V
29. 800 W, 450 W, 25.0 W, 25.0 W
31. 99.3%
33. 4.06  $\mu\text{A}$
35. a) 12.0 s    b)  $i(t) = (3.00 \mu\text{A})e^{-t/12.1}$   
 $q(t) = (36.0 \mu\text{C})[1 - e^{-t/12.1}]$
37. a) 6.00 V    b) 8.29  $\mu\text{s}$
39. a) 6.50 mJ    b) 6.50 mJ
41. 1.60 M $\Omega$
43. 16.6 k $\Omega$
45. 0.302  $\Omega$
47. a) 400 k $\Omega$     b) 400 k $\Omega$
49. b) 0.0501  $\Omega$ , 0.451  $\Omega$
51. 0.588 A
53. 15.0  $\Omega$
55. a) 12.5 A, 6.25 A, 8.33 A    b) 27.1 A; No, no es suficiente ya que la corriente necesaria es mayor a 25 A.
57. a) 0.101 W    b) 10.1 W
59. a) 16.7 A    b) 33.3 A    c) El calentador de 120 V requiere cuatro veces con más masa.
61. a) 34.1 V    b) 41.7 V    c) 7.57 V
63. a) 72.0 W    b) 72.0 W
65. 395 mA; 1.50 V
67. a)  $R \leq 1050 \Omega$     b)  $R \geq 10.0 \Omega$
69. a)  $R \rightarrow \infty$     b)  $R \rightarrow 0$     c)  $R \rightarrow r$
71. a) 9.93  $\mu\text{C}$     b)  $3.37 \times 10^{-8}$  A  
c)  $3.34 \times 10^{-7}$  W    d)  $3.37 \times 10^{-7}$  W
73.  $T = (R_A + 2R_B)C \ln 2$

85.  $R = 0.521 \Omega$ , 0.260  $\Omega$ , 0.260  $\Omega$ , suponiendo que los resistores están en serie con el galvanómetro

87.  $R/2$

89. 0.450  $\Omega$

## CAPÍTULO 29

1. a) Oeste    b) Cero deflexión    c) Hacia arriba  
d) Hacia abajo
3.  $2.31 \times 10^{-13}$  N
5. 48.8° o 131°
7.  $(12.3i + 4.48j - 1.60k) \times 10^{-18}$  N
9.  $2.34 \times 10^{-18}$  N
11. Cero
13.  $(-2.88 \text{ N})j$
15. 0.245 T oeste
17. a) 4.73 N    b) 5.46 N    c) 4.73 N
19.  $(0.042 \text{ T})k$
21.  $F = 2\pi rIB \sin \theta$ , arriba
23. 9.98 N · m como si se vieran las manecillas en la dirección negativa de  $y$ .
25. a) 376  $\mu\text{A}$     b) 1.67  $\mu\text{A}$
27. 58.9 mJ
29. 1.98 cm
31. 182  $\mu\text{T}$
33.  $r_a = r_d = \sqrt{2}r_p$
35. 7.88 pT
37. 2.99 u;  ${}^3\text{H}^+$  o  ${}^3\text{He}^+$
39.  $5.93 \times 10^5$  N/C
41. 20.4 cm y 4.77 mm
43. 150  $\mu\text{m}$
45. 31.2 cm
47. a)  $4.31 \times 10^7$  rad/s    b)  $5.17 \times 10^7$  m/s
49. 70.1 mT
51.  $3.70 \times 10^{-9}$  m<sup>3</sup>/C
53.  $4.32 \times 10^{-5}$  T
55.  $7.37 \times 10^{28}$  electrones/m<sup>3</sup>
57. 126 mT a 78.7° abajo de la horizontal (norte)
59. a)  $(3.52i - 1.60j) \times 10^{-18}$  N    b) 24.4°
61. 0.588 T
63.  $(1.06 \text{ N})k$
65. 3.13 cm
67.  $3.82 \times 10^{-25}$  kg
69.  $3.70 \times 10^{-24}$  N · m
71. a)  $(-8.34 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s})j$     b) 29.4°

## CAPÍTULO 30

1. 200 nT
3. 31.4 cm
5. 28.3  $\mu\text{T}$
7. 24.6  $\mu\text{T}$
9.  $\frac{\mu_0 I}{4\pi x}$  hacia dentro del plano del papel
11. 330 nT
13. a) 0.766R    b) 1.91R

15.  $80.0 \mu\text{N/m}$   
 17. a)  $10.0 \mu\text{m}$  b) alambre de plata sí, alambre de cobre no  
 19.  $(-27.0 \mu\text{N})i$   
 21.  $13.0 \mu\text{T}$  at  $270^\circ$   
 23. a)  $3.98 \text{ kA}$  b)  $\approx 0$   
 25.  $5.03 \text{ T}$   
 27. a)  $3.60 \text{ T}$  b)  $1.94 \text{ T}$   
 29.  $5.00 \text{ cm}$   
 31. a)  $6.34 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ , hacia dentro b)  $F$  es mayor en la superficie externa  
 33.  $26.7 \text{ mT}$ ,  $37.7 \text{ mT}$   
 35.  $4.74 \text{ mT}$   
 37. a)  $3.13 \text{ mWb}$  b) cero  
 39.  $2.27 \mu\text{Wb}$   
 41. a)  $(8.00 \mu\text{A})e^{-t/4}$  b)  $2.94 \mu\text{A}$   
 43. a)  $11.3 \times 10^9 \text{ V}\cdot\text{m/s}$  b)  $100 \text{ mA}$   
 45.  $1.0001$   
 47.  $191 \text{ mT}$   
 49.  $277 \text{ mA}$   
 51.  $150 \mu\text{Wb}$   
 53.  $\text{M/H}$   
 55.  $1.27 \times 10^3$  vueltas  
 57.  $2.02$   
 59. a)  $1.88 \times 10^{46}$  b)  $8.74 \times 10^{20} \text{ kg}$   
 61.  $675 \text{ A}$  hacia abajo  
 63.  $81.7 \text{ A}$

$$65. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln\left(\frac{b+w}{b}\right) k$$

67.  $594 \text{ A}$  Este  
 69.  $1.43 \times 10^{-10} \text{ T}$  dirigido hacia afuera desde el centro  
 73. a)  $B = \frac{1}{3} \mu_0 b r_1^2$  b)  $B = \frac{\mu_0 b R^3}{3r_2}$

75.  $5/4$   
 77. a)  $12.0 \text{ kA}\cdot\text{vueltas/m}$  b)  $2.07 \times 10^{-5} \text{ T}$  m/A  
 79.  $366 \text{ g/mol}$

83.  $\frac{\mu_0 I}{4\pi} (1 - e^{-2n})$  perpendicularmente hacia afuera de la página  
 85.  $\frac{\mu_0 I}{\pi r} \left(\frac{2r^2 + a^2}{4r^2 + a^2}\right) u\rho$

### CAPÍTULO 31

1.  $500 \text{ mV}$   
 3.  $160 \text{ A}$   
 5.  $2.67 \text{ T/s}$   
 7.  $61.8 \text{ mV}$   
 9.  $(200 \mu\text{V})e^{-t/7}$   
 11.  $Nn\pi R^2 \mu_0 I_0 \alpha e^{-\alpha t} = (68.2 \text{ mV})e^{-t/7}$  en dirección opuesta de las manecillas del reloj  
 13.  $272 \text{ m}$   
 15.  $\frac{2}{3}\pi R^2 N B_0 \omega \sin \omega t$  en dirección opuesta de las manecillas del reloj vista desde la izquierda  
 17.  $2.81 \text{ mT}$   
 19. a)  $3.00 \text{ N}$  hacia la derecha b)  $6.00 \text{ W}$   
 21.  $2.00 \text{ mV}$ , el extremo oeste es positivo en el hemisferio norte

23.  $2.83 \text{ mV}$   
 25. a)  $\frac{1}{3} B\omega L^2$  b)  $360 \text{ mV}$   
 27. a) hacia la derecha b) hacia la derecha c) hacia la derecha d) hacia dentro del plano de la página  
 29.  $0.742 \text{ T}$   
 31.  $114 \mu\text{V}$  en la dirección de las manecillas del reloj  
 33.  $1.80 \times 10^{-3} \text{ N/C}$  en dirección opuesta a las manecillas del reloj  
 35. a)  $(9.87 \times 10^{-3} \text{ V/m})\cos(100\pi t)$  b) dirección de las manecillas del reloj  
 37. a)  $1.60 \text{ A}$  en sentido contrario a las manecillas del reloj b)  $20.1 \mu\text{T}$  c) hacia arriba  
 39.  $12.6 \text{ mV}$   
 41. a)  $7.54 \text{ kV}$  b)  $B$  es paralelo al plano de la espira.  
 43.  $(28.6 \text{ mV})\sin(4\pi t)$   
 45. a)  $0.640 \text{ N}\cdot\text{m}$  b)  $241 \text{ W}$   
 47.  $0.513 \text{ T}$

49. a)  $F = \frac{N^2 B^2 \omega^2 v}{R}$  hacia la izquierda b) 0  
 c)  $F = \frac{N^2 B^2 \omega^2 v}{R}$  hacia la izquierda

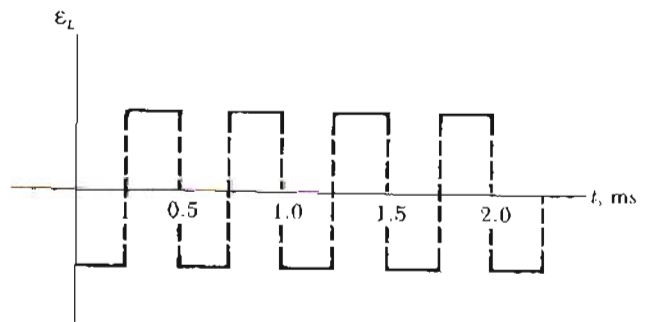
51.  $(-2.87j + 5.75k) \times 10^9 \text{ m/s}^2$   
 53. Esto es, con el extremo superior en la figura positiva  
 57. a)  $36.0 \text{ V}$  b)  $600 \text{ mWb/s}$  c)  $35.9 \text{ V}$  d)  $4.32 \text{ N}\cdot\text{m}$   
 59. a)  $(1.19 \text{ V})\cos(120\pi t)$  b)  $88.5 \text{ mW}$   
 61.  $26.2 \text{ g}$   
 63. Esto es, con el extremo superior en la figura positiva  
 65.  $1.20 \mu\text{C}$   
 67.  $B = \frac{2QR}{\pi N D^2}$   
 69. a)  $\frac{Rmg \sin \theta}{B^2 \ell^2 \cos^2 \theta}$  b)  $22.6 \text{ m/s}$

### CAPÍTULO 32

1.  $100 \text{ V}$   
 3.  $4.69 \text{ mH}$   
 7. a)  $188 \mu\text{T}$  b)  $33.3 \text{ nWb}$  c)  $375 \mu\text{H}$   
 d) campo y flujo  
 9.  $21.0 \mu\text{Wb}$   
 11.  $(18.8 \text{ V})\cos(377t)$   
 13.  $\frac{1}{2}$   
 15. a)  $15.8 \mu\text{H}$  b)  $12.6 \text{ mH}$   
 19.  $2.61 \text{ H}$   
 23. a)  $139 \text{ ms}$  b)  $461 \text{ ms}$   
 25. a)  $5.66 \text{ ms}$  b)  $1.22 \text{ A}$  c)  $58.1 \text{ ms}$   
 27. a)  $113 \text{ mA}$  b)  $600 \text{ mA}$   
 29. a)  $0.800$  b) 0  
 31. a)  $1.00 \text{ A}$  b)  $12.0 \text{ V}$ ,  $1.20 \text{ kV}$ ,  $1.21 \text{ kV}$   
 c)  $7.62 \text{ ms}$   
 33.  $2.44 \mu\text{J}$   
 35. a)  $1.31 \text{ W}$  b)  $4.16 \text{ W}$  c)  $5.47 \text{ W}$  d) cero  
 37.  $4.83 \text{ J/m}^3$   
 39.  $44.3 \text{ nJ/m}^3$  en el campo  $E$ ;  $995 \mu\text{J/m}^3$  en el campo  $B$   
 41.  $30.7 \mu\text{J}$  y  $72.2 \mu\text{J}$   
 43. a)  $500 \text{ mJ}$  b)  $17.0 \text{ W}$  c)  $11.0 \text{ W}$   
 45.  $(-0.168t + 0.112)V$   
 47.  $80.0 \text{ mH}$

9. 553  $\mu\text{H}$   
 1. a) 18.0 mH    b) 34.3 mH    c) -9.00 mV  
 3. 400 mA  
 5. a) 5.19 mA    b) 1.72 MHz    c) 7.68 nJ  
 7. 2.60 pF  
 9. a) 36.0  $\mu\text{F}$     b) 8.00 ms  
 1. a) 6.03 J    b) 0.529 J    c) 6.56 J  
 3. a) 2.51 kHz    b) 69.9  $\Omega$   
 5. a) 4.47 krad/s    b) 4.36 krad/s    c) 2.53%  
 7. a) verdadero    b) No existe razón, porque el circuito RLC está sobre amortiguado y no tiene frecuencia de oscilación.  
 9. 979 mH

71.



73. 2.00 H, 3.00  $\Omega$   
 79. a) 2.36 A    (b) 7.77 V  
 81.  $\frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$   
 83. 300  $\Omega$   
 85. a) 1.99 A    b) 0.509 s

### Abreviaturas y símbolos para unidades

Abreviatura	Unidad	Abreviatura	Unidad
A	ampere	in.	pulgada
Å	angstrom	J	joule
u	unidad de masa atómica	K	kelvin
atm	atmósfera	kcal	kilocaloría
Btu	unidad térmica británica	kg	kilogramo
C	coulomb	kmol	kilomol
°C	grado Celsius	lb	libra
cal	caloría	m	metro
deg	grado (ángulo)	min	minuto
eV	electrón-volt	N	newton
°F	grado Fahrenheit	Pa	pascal
F	farad	rev	revolución
ft	pie	s	segundo
G	gauss	T	tesla
g	gramo	V	volt
H	henry	W	watt
h	hora	Wb	weber
hp	caballo de fuerza	$\mu\text{m}$	micrómetro
Hz	hertz	$\Omega$	ohm

### Símbolos matemáticos utilizados en el texto y su significado

Símbolo	Significado
=	es igual a
$\equiv$	se define como
$\neq$	no es igual a
$\propto$	es proporcional a
$>$	es mayor que
$<$	es menor que
$\gg$ ( $\ll$ )	es mucho mayor (menor) que
$\approx$	es aproximadamente igual a
$\Delta x$	incremento en x
$\sum_{i=1}^N x_i$	la suma de todas las cantidades $x_i$ desde $i=1$ hasta $i=N$
$ x $	la magnitud de x (siempre es una cantidad positiva)
$\Delta x \rightarrow 0$	$\Delta x$ tiene a cero
$\frac{dx}{dt}$	derivada de x con respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x con respecto a t
$\int$	integral



## Conversiones\*

### Longitud

- 1 in. = 2.54 cm
- 1 m = 39.37 in. = 3.281 ft
- 1 ft = 0.3048 m
- 12 in. = 1 ft
- 3 ft = 1 yd
- 1 yd = 0.9144 m
- 1 km = 0.621 mi
- 1 mi = 1.609 km
- 1 mi = 5280 ft
- 1 Å =  $10^{-10}$  m
- 1  $\mu\text{m}$  =  $1 \mu = 10^{-6}$  m =  $10^4$  Å
- 1 año luz =  $9.461 \times 10^{15}$  m

### Área

- 1 m<sup>2</sup> =  $10^4$  cm<sup>2</sup> = 10.76 ft<sup>2</sup>
- 1 ft<sup>2</sup> = 0.0929 m<sup>2</sup> = 144 in.<sup>2</sup>
- 1 in.<sup>2</sup> = 6.452 cm<sup>2</sup>

### Volumen

- 1 m<sup>3</sup> =  $10^6$  cm<sup>3</sup> =  $6.102 \times 10^4$  in.<sup>3</sup>
- 1 ft<sup>3</sup> = 1728 in.<sup>3</sup> =  $2.83 \times 10^{-2}$  m<sup>3</sup>
- 1 litro = 1000 cm<sup>3</sup> = 1.0576 qt = 0.0353 ft<sup>3</sup>
- 1 ft<sup>3</sup> = 7.481 gal = 28.32 litros =  $2.832 \times 10^{-2}$  m<sup>3</sup>
- 1 gal = 3.786 litros = 231 in.<sup>3</sup>

### Masa

- 1000 kg = 1 t (tonelada métrica)
- 1 slug = 14.59 kg
- 1 u =  $1.66 \times 10^{-27}$  kg

### Fuerza

- 1 N =  $10^5$  dina = 0.2248 lb
- 1 lb = 4.448 N
- 1 dina =  $10^{-5}$  N =  $2.248 \times 10^{-6}$  lb

### Velocidad

- 1 mi/h = 1.47 ft/s = 0.447 m/s = 1.61 km/h
- 1 m/s = 100 cm/s = 3.281 ft/s
- 1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s

### Aceleración

- 1 m/s<sup>2</sup> = 3.28 ft/s<sup>2</sup> = 100 cm/s<sup>2</sup>
- 1 ft/s<sup>2</sup> = 0.3048 m/s<sup>2</sup> = 30.48 cm/s<sup>2</sup>

### Presión

- 1 bar =  $10^5$  N/m<sup>2</sup> = 14.50 lb/in.<sup>2</sup>
- 1 atm = 760 mm Hg = 76.0 cm Hg
- 1 atm = 14.7 lb/in.<sup>2</sup> =  $1.013 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>
- 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup> =  $1.45 \times 10^{-4}$  lb/in.<sup>2</sup>

### Tiempo

- 1 año = 365 días =  $3.16 \times 10^7$  s
- 1 día = 24 h =  $1.44 \times 10^3$  min =  $8.64 \times 10^4$  s

### Energía

- 1 J = 0.738 ft · lb =  $10^7$  ergs
- 1 cal = 4.186 J
- 1 Btu = 252 cal =  $1.054 \times 10^3$  J
- 1 eV =  $1.6 \times 10^{-19}$  J
- 931.5 MeV es equivalente a 1 u
- 1 kWh =  $3.60 \times 10^6$  J

### Potencia

- 1 hp = 550 ft · lb/s = 0.746 kW
- 1 W = 1 J/s = 0.738 ft · lb/s
- 1 Btu/h = 0.293 W

\* Véase la tabla A.1 del apéndice A para una lista más completa.

## Alfabeto griego

Alfa	Α	α	Jota	Ι	ι	Rho	Ρ	ρ
Beta	Β	β	Kappa	Κ	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	Τ	τ
Delta	Δ	δ	Mu	Μ	μ	Úpsilon	Υ	υ
Épsilon	Ε	ε	Nu	Ν	ν	Fi	Φ	φ
Zeta	Ζ	ζ	Xi	Ξ	ξ	Ji	Χ	χ
Eta	Η	η	Omicron	Ο	ο	Psi	Ψ	ψ
Teta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω