APUNTES
TEORIA ELECTROMAGNETICA

PROF. MARCOS ANGEL GONZALEZ

JOSE ALFREDO MARTINEZ PEREZ
UACM PARCIALES

TEORIA ELECTROMAGNÉTICA

CUBÍCULO D-200 - C-402.

marcos.angel.gonzalez@uacm.edu.mx

BASICA

ULABY, FAWWAZ FUNDAMENTOS DE APLICACIONES EN ELECTROMAGNETISMO. * BIBLIOTECA SLT

HAYT, TEORIA ELECTROMAGNÉTICA 7ª EDICIÓN. 2006, McGRAW-HILL, MÉXICO. QC270.H39.

ANTECEDENTES

JARAMILLO. G ELECTRICIDAD Y MAGNETÍSMO.
CHEN D., FUNDAMENTOS DE ELECTROMAGNETISMO 1998 Pearson
POPOVIC Z. POPOVIC B., INTRODUCCIÓN AL ELECTROMAGNETISMO. 2001, CECSA.
SADIKU M., ELEMENTOS DE ELECTROMAGNETISMO 2005 CECSA
Adler, RICHARD, ELECTROMAGNETIC ENERGY TRANSMISIÓN AND RADIATION.

TAREA Ø.1 DE FAWWAZ ULABY

PROBLEMAS ~~3.1~~, ~~3.2~~, ~~3.3~~
~~3.5~~, ~~3.7~~, ~~3.15~~, ~~3.17~~, 3.19, 3.21
3.22, 3.23, 3.24, 3.26, 3.28.

PAGINA http://www.isei-slt-uacm.com.mx/moodl

Tarea 1   3.1, 3.2, 3.3

Vector Unitario $|A| = \sqrt{1^2+3^2} = 3.16$

Vector A inicia en $(1,-1,3)$ $\hat{a} = \frac{A}{|A|} = \frac{\hat{x}+\hat{z}3}{3.16} =$

termina $(2,-1,0)$

$A = -1\hat{x}+0+3\hat{z}$

3.1-Vector Unitario en dirección de A. $\hat{a} = 0.32\hat{x}+0.95\hat{z}$

$$\left(\frac{2-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}, -\frac{-1-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}, -\frac{0-3}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}\right)$$

3.2=Dado los Vectores es $A = 2x - 3y + z$
$B = 2x - y + 3z$
$C = 4x + 2y - 2z$
Demostrar la perpendicularidad.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 = A \\ 2 & -1 & 3 = B \\ 4 & 2 & -2 = C \end{vmatrix} \; A-B \to A \; \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 = A-B \\ 2 & -1 & 3 = B \\ 4 & 2 & -2 = C \end{vmatrix}$$

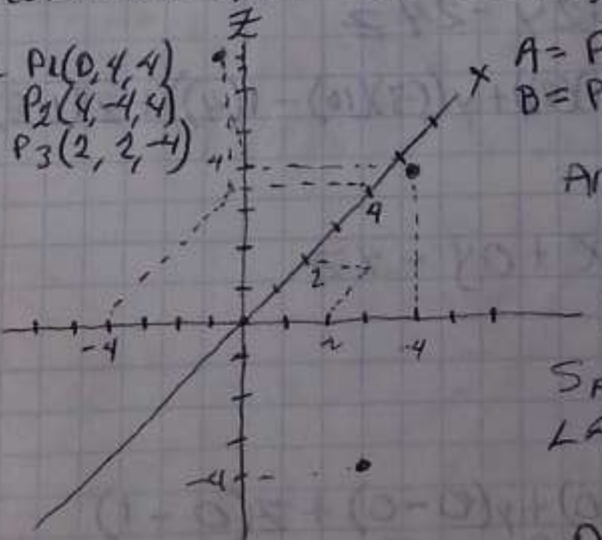
$A \cdot C = (2\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}) \cdot (4\hat{x}+2\hat{y}-2\hat{z}) = 8-6-2 = 0$

$B \cdot C = (2\hat{x} - \hat{y} + 3\hat{z}) \cdot (4\hat{x}+2\hat{y}-2\hat{z} = 8-2-6 = 0$

$\therefore$ si son 0 son perpendiculares a C

3.3 Calcular el área del Triangulo.

Puntos- $P1(0,4,4)$
$P2(4,-4,4)$
$P3(2,2,-4)$



$\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}$

$A = P1-P2 = 4\hat{x} - 8y \quad 0\hat{z}$

$B = P1-P3 = 2\hat{x} - 2y - 8\hat{z}$

Area $= A \times B$

$= \frac{1}{2}[(-8)(-8)\hat{x} + (-4)(-8)\hat{y} + (4(-2)+16)$

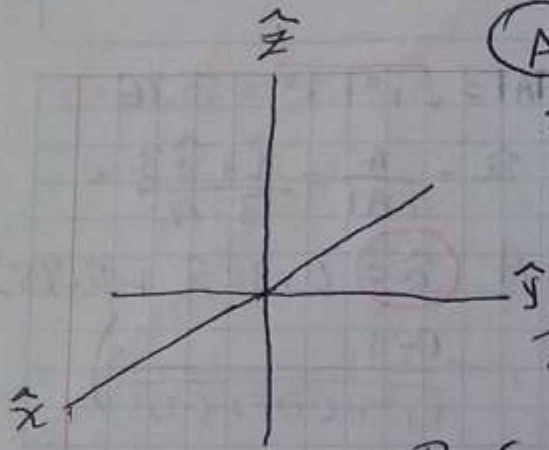
$= \frac{1}{2}[64x + 32y + 8z]$

Sacando la Norma $= \sqrt{64^2 + 32^2 + 8^2}$

Area = 36

3.5° DADOS $A = \hat{x} + \hat{y}2 - \hat{z}3$ $B = 2\hat{x} - 4\hat{y}$ $C = 2\hat{y} - 4\hat{z}$

DETERMINAR A y $\hat{a}$



(A) $A = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} = 3.741657$

$$\hat{a} = \frac{\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{x} + \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{y} - \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{z}$$

(B) EL COMPONENTE DE B A LO LARGO DE C

$$B\cos\theta_{BC} = \frac{B \cdot C}{|C|} = \frac{-8}{\sqrt{20}} = -1.78$$

$B \cdot C = 0 - 8 + 0 = -8$ $|C| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

(C) $$\theta_{AC} = \cos^{-1}\left(\frac{A \cdot C}{|A||C|}\right) = \frac{4 + 12}{(\sqrt{14})(\sqrt{20})} = 17.023°$$

(d) $A \times C = x(2(-4) - (3)2) + y((-3)(0) - (1)(-4)) + z(1(2) - (2)(0))$

$x \quad y \quad z$

$A = 1x \quad 2y \quad -3z$

$C = 0x \quad 2y \quad -4z$

$A \times C = -2x + 4y + 2z$

(e) $A \cdot (B \times C) = 20$

$x \quad y \quad z$

$2x \quad -4y \quad 0$

$0x \quad 2y \quad -4z$

$B \times C = x((-4)(-4) - 0) + y(0 - (2)(-4)) + z((2)(2) - (0))$

$A \cdot (B \times C) = (x16 + 8y + 4z)(x + 2y - 3z) = 16 + 16 - 12 = 20$

(f) $A \times (B \times C) = 32x - 52y - 24z$

$x \quad y \quad z$

$= x \quad 2y \quad -3$

$= 16x \quad 8y \quad 4z$

$F = x((2)(4) - (-3)(8)) + y((-3)(16) - 1(4)) + z(1(8) - (2)(16))$

(g) $\hat{x} \times B =$

$x \quad y \quad z$

$\hat{x} = 1 \quad 0 \quad 0$

$B = 2 \quad -4 \quad 0$

$= 0x + 0y - 4z$

(h) $(A \times \hat{y}) \cdot \hat{z} = -1$

$x \quad y \quad z$

$= 0 \quad 1 \quad 0$

$= 1 \quad 2 \quad -3$

$x(-3 - 0) + y(0 - 0) + z(0 - 1)$

$A \times \hat{y} = -3x + 0y - z$

$(A \times \hat{y}) \cdot \hat{z} = (-3x + 0y - z)(0x + 0y + z) = -1$

3.7.- Si $A=(x+2y)x+(y+3z)y+(3x-y)z$

DETERMINAR EL VECTOR UNITARIO PARALELO A "A" EN EL PUNTO $P(1,-1,2)$

$$\frac{A(P)}{|A(P)|}=\frac{\overbrace{(1+2(-1))}^{-1}x-\overbrace{(-1+3(2))}^{-5}y+\overbrace{(3(1)-(-1))}^{4}z}{\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+4^2}}=\frac{-\hat{x}-5\hat{y}+4z}{\sqrt{42}}$$

3.15 VECTOR $2x+3y+4z=16 \Rightarrow \frac{2}{16}x+\frac{3}{16}y+\frac{4}{16}z=1$

5

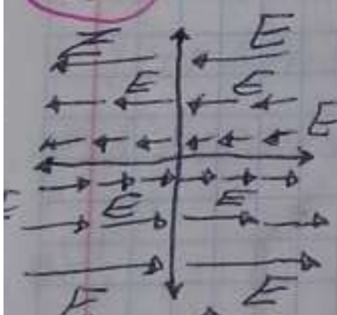
$$8x+\frac{3}{16}y+4z=1 \Rightarrow \begin{array}{l} P_1=(8,0,0) \\ P_2=(0,3/16,0) \\ P_3=(0,0,4) \end{array}$$

$$P_1\times P_2=\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3/16 & 0 \end{array} \quad A=x(0-0)+y(0-0)+z((8)(3/16)-0)=(0,0,24/16\,z)$$

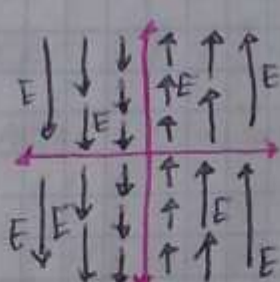
$$P_1\times P_3=\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \quad B=x(0-0)+y((8)(4)-0)+z(0-0)=(0,32y,0)$$

$$A\times B=\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 0 & 0 & 24/16 \\ 0 & 32 & 0 \end{array} \quad C=x\left(0-\tfrac{24}{16}(32)\right)+y(0-0)+z(0-0)=-48x$$

3.17 TRACE CADA UNO DE LOS CAMPOS VECTORIALES

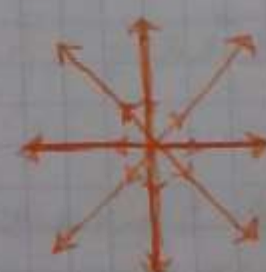


$E_1=-y\hat{x}$



$E_2=x\hat{y}$

$E_3=x\hat{x}+y\hat{y}$



$E_4=x\hat{x}+2y\hat{y}$

$E_5=r\hat{\phi}$

$E_6=\sin\theta\,\hat{r}$

3.19 CONVERTIR ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS.

a) $P_1(1, 2, 0)$

A CILÍNDRICAS $P_1 = (\sqrt{1^2+2^2}, \tan^{-1}(2/1), 0)$

$P_1 = (\sqrt{5}, 1.107 \text{ rad}, 0) = (2.24, 63.4°, 0)$

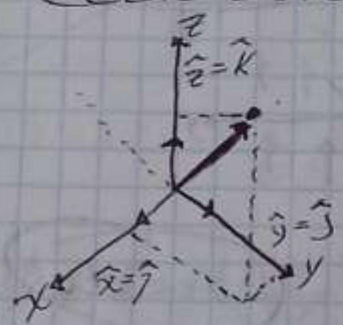
A ESFÉRICAS $P_1 = \left(\sqrt{1^2+2^2+0^2}, \tan^{-1}\left(\sqrt{1^2+2^2}/0\right), \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)\right)$

1- Conceptos Básicos

- Sistemas de Coordenadas

Estos sistemas permiten tanto la localización de puntos específicos en el espacio como la dirección, magnitud y sentido de vectores

- Coordenadas Cartesianas



Para determinar un punto en el espacio empleamos

3 coordenadas $P(x, y, z)$

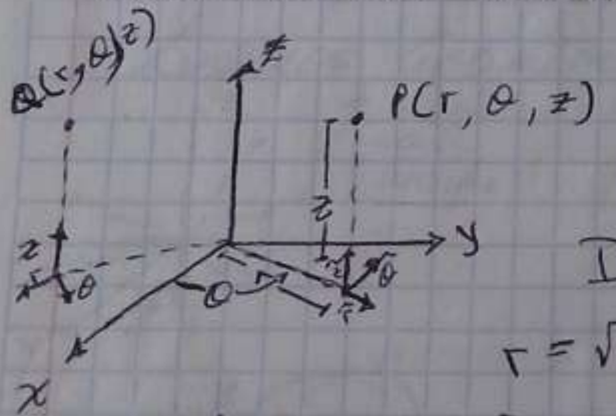
3 vectores unitarios $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

Los vectores unitarios son:

ortogonales entre sí $(\hat{x}\cdot\hat{y}=0,\ \hat{x}\cdot\hat{z}=0,\ \hat{y}\cdot\hat{z}=0)$

y cumplen con $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z},\ \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y},\ \hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$

- Coordenadas Cilíndricas



Para determinar un punto empleamos

- 3 coordenadas $P(r, \phi, z)$
- 2 vectores unitarios $\vec{P} = r\hat{r} + z\hat{z}$

Donde

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

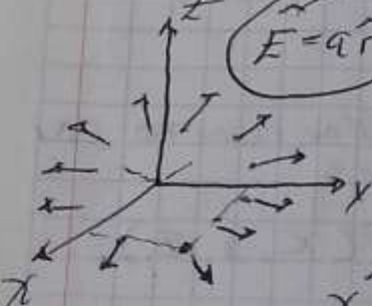
$$\left.\begin{aligned} \hat{r} &= \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\ \hat{\phi} &= \hat{z}\times\hat{r} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{aligned}\right\}$$ Dependen del punto en coordenadas $P(r, \phi, z)$

Un vector emplea los Vectores 3 unitarios

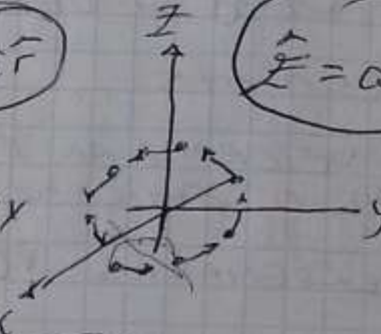
$$\vec{E} = E_r\,\hat{r} + E_\phi\,\hat{\phi} + E_z\,\hat{z}$$

Lugares geométricos y campos vectoriales

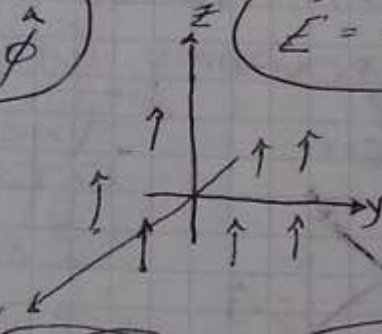
$\vec{E} = a\hat{r}$



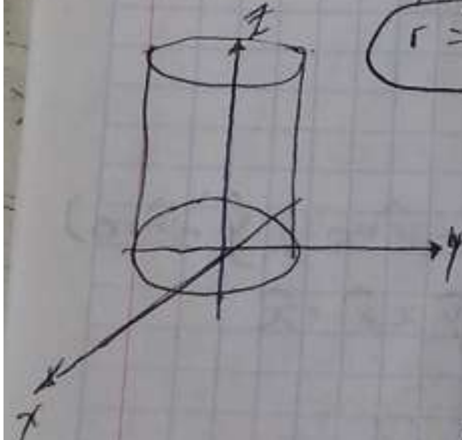
$\vec{E} = a\hat{\phi}$



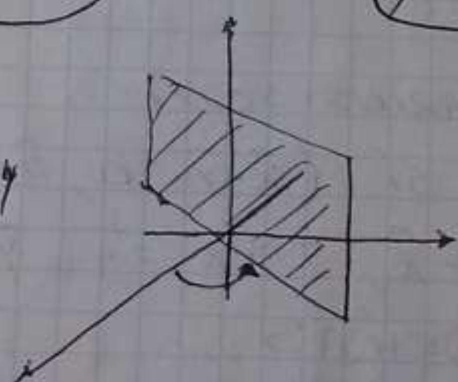
$\vec{E} = a\hat{z}$



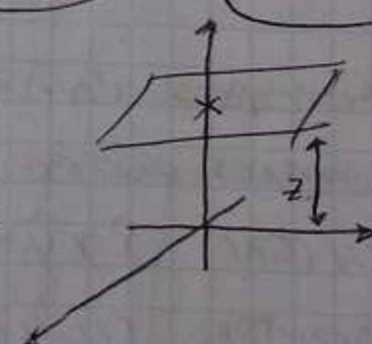
$r = cte$



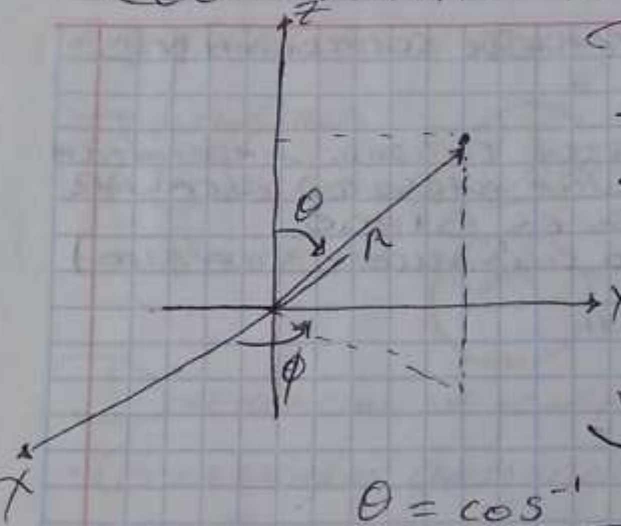
$\phi = cte$



$z = cte$



COORDENADAS ESFÉRICAS



PARA DETERMINAR UN PUNTO EMPLEAMOS

- 3 COORDENADAS $P(R, \phi, \theta)$
- 1 VECTOR UNITARIO $\vec{\rho} = R\hat{R}$

DONDE:

$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2+z^2}$

$r = R\sin\theta$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \cos^{-1}\frac{z}{R}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right)$$

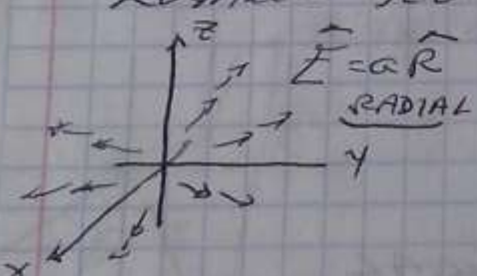
Y LOS TRES VECTORES UNITARIOS DEPENDEN DEL PUNTO

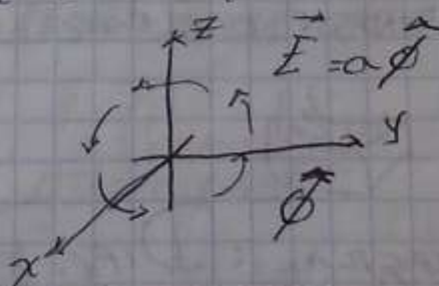
$\hat{R} = \hat{r}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$

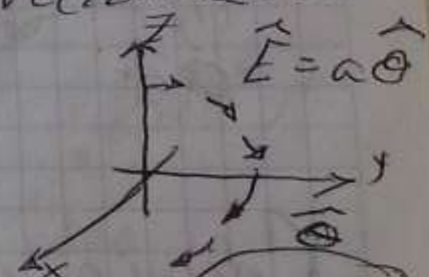
$\hat{\theta} = \hat{r}\cos\theta - \hat{z}\sin\theta$

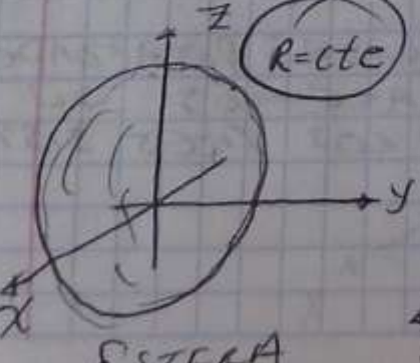
$\hat{\phi} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$

- LUGARES GEOMÉTRICOS Y CAMPOS VECTORIALES.

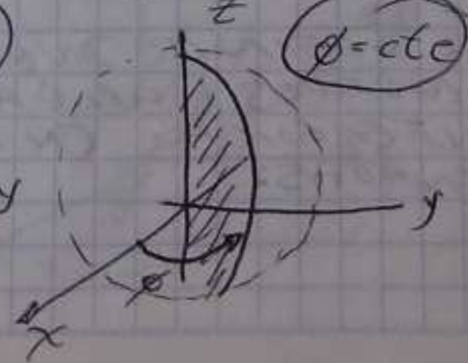


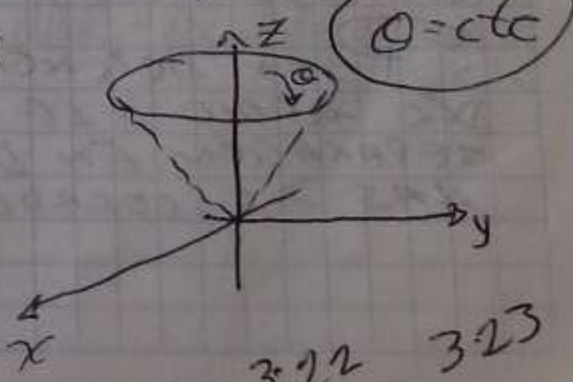






ESFERA





3.22 3.23

CÁLCULO VECTORIAL EN SISTEMA DE COORDENADAS

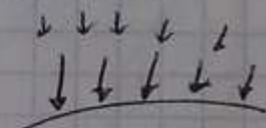
CAMPOS ESCALARES: ES AQUELLA ENTIDAD. MATEMÁTICA QUE ASOCIA UNA MAGNITUD ESCALAR A PUNTOS EN EL ESPACIO (CARTESIANO, CILÍNDRICO O ESFÉRICO)

EJEMPLOS: TEMPERATURA

$T(x, y, z)$
$T(r, \phi, z)$
$T(R, \phi, \theta)$

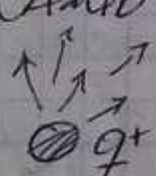
CAMPOS VECTORIALES: ES AQUELLA ENTIDAD MATEMÁTICA QUE ASOCIA UNA CANTIDAD VECTORIAL A PUNTOS EN EL ESPACIO.

EJEMPLOS:



FUERZA:

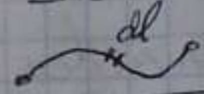
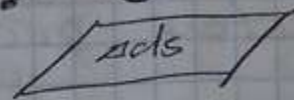
CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO



DENSIDAD DE CORRIENTE

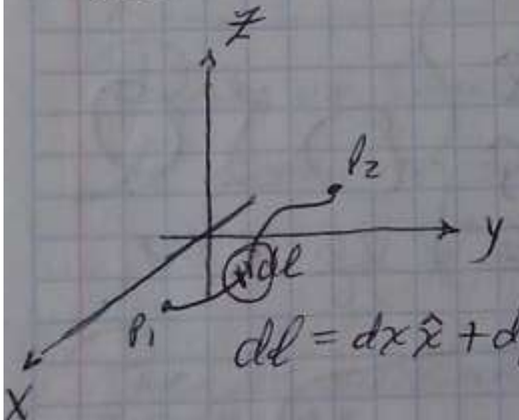
CÁLCULO INTEGRAL: DIFERENCIAL.

PARA DETENER DEFINIR DIVERSAS PROPIEDADES DEL MEDIO Y DE CUERPOS EMPLEAREMOS SU SEPARACIÓN EN DIFERENCIAL EN LOS TRES SISTEMAS DE COORDENADAS:

- DIFERENCIAL DE
  - → LONGITUD 
  - → SUPERFICIE 
  - → VOLUMEN 

DIFERENCIAL DE LONGITUD.

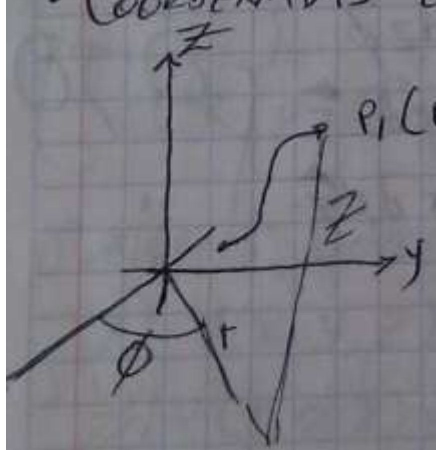
- COORDENADAS CARTESIANAS.



$$dl = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

- COORDENADAS CILÍNDRICAS

OJO



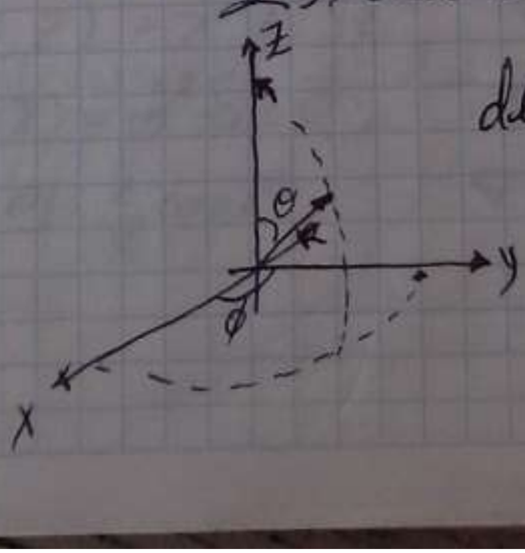
$$P_1(r,\phi,z)\,d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

- COORDENADAS ESFÉRICAS.

$r = R\sin\theta$

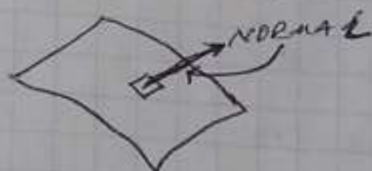
$\tilde{r}\,d\phi\,\phi$

$$dl = dR\hat{R} + R\sin\theta\, d\phi + R\,d\theta\,\hat{\theta}$$

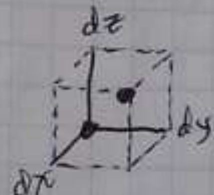


DIFERENCIAL DE SUPERFICIE Y VOLUMEN

Para definir los diferenciales de superficie emplearemos un vector que sea simple normal a ella:

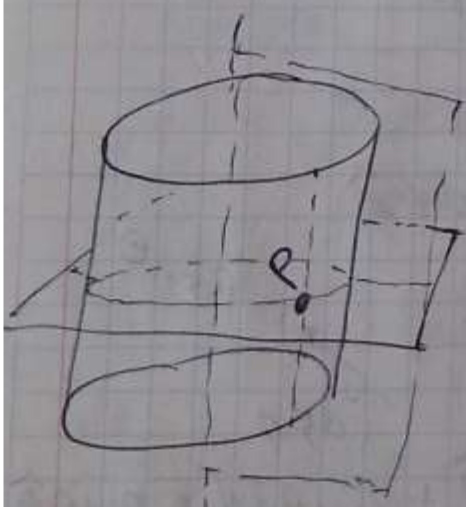


- COORDENADAS CARTESIANAS.



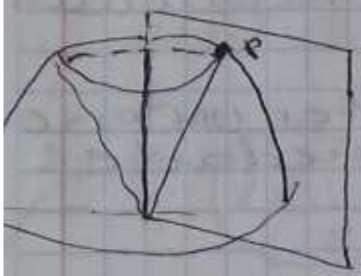
$$\left.\begin{array}{l} dV = dx\,dy\,dz \\ \vec{ds}_x = dz\,dy\,\hat{x} \\ \vec{ds}_y = dx\,dz\,\hat{y} \\ \vec{ds}_z = dx\,dy\,\hat{z} \end{array}\right\} \text{OJO}$$

- COORDENADAS CILÍNDRICAS.



$$\left.\begin{array}{l} dV = r\,dr\,d\phi\,dz \\ \vec{ds}_\phi = dr\,dz\,\hat{\phi} \\ \vec{ds}_r = r\,d\phi\,dz\,\hat{r} \\ \vec{ds}_z = r\,dr\,d\phi\,\hat{z} \end{array}\right\} \text{OJO}$$

COORDENADAS ESFÉRICAS.



$$dV = R^2 \sin\theta \, dR \, d\phi \, d\theta$$

$$\vec{ds}_\theta = R\sin\theta \, dR \, d\phi \, \hat{\theta}$$

$$\vec{ds}_\phi = R \, dR \, d\theta \, \hat{\phi}$$

$$\vec{ds}_R = R^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, \hat{R}$$

GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

DADO UN CAMPO ESCALAR $V = V(x, y, z)$

EL GRADIENTE SE DEFINE COMO:

OJO

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

PARA LOS SISTEMAS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS.

OJO

$$V(r, \phi, z) \rightarrow \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$V(R, \phi, \theta) \rightarrow \nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}$$

EJEM. DETERMINAR GRADIENTE — SOLUCIÓN

i) $V(x, y, z) = x^2 + yz^2$ — $\nabla V = 2x\hat{x} + z^2\hat{y} + 2yz\hat{z}$

ii) $V(r, \phi, z) = e^{-2r}\cos\phi$ — $\nabla V = -2e^{-2r}\cos\phi\,\hat{r} - \frac{1}{r}e^{-2r}\operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}$

iii) $V(R, \phi, \theta) = \frac{2}{R}\cos\theta$ — $\nabla V = -\frac{2}{R^2}\cos\theta\,\hat{R} + \left(-\frac{2}{R^2}\operatorname{sen}\theta\right)\hat{\theta}$

El gradiente permite además calcular la derivada direccional de un campo escalar en una dirección dada por una longitud

$\vec{dl} = dl\,\hat{a}_l$ donde $\hat{a}_l$ es un vector unitario que apunta en la dirección de $\vec{dl}$ mediante:

$$\frac{dV}{dl} = \nabla V \cdot \hat{a}_l \qquad \hat{a}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$$

DADO DOS PUNTOS EN EL ESPACIO P_1, P_2 LA DIFERENCIA ENTRE LOS VALORES DEL CAMPO ESCALAR ESTÁN DADOS POR

$$V(P_2) - V(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \nabla V \cdot \vec{dl}$$

EJEMPLOS

i) LA DERIVADA DIRECCIONAL DE $V = x^2 + y^2 z$ EN LA DIRECCIÓN DADA POR EL VECTOR $\vec{l} = 2\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}$ EVALUADA EN EL PUNTO $P(1, -1, 2)$

$$\left.\begin{aligned} \nabla V &= 2x\hat{x} + 2yz\hat{y} + y^2\hat{z} \\ \hat{a}_l &= \frac{2\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{2\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}}{\sqrt{17}} \end{aligned}\right\}$$ PRODUCTO PUNTO 2×2 2×3 1×-2

$$\frac{dV}{dl} = \frac{4x + 6yz - 2y^2}{\sqrt{17}}$$ YA CON PRODUCTO PUNTO $\nabla V \cdot \hat{a}_l$

$$\left.\frac{dV}{dl}\right|_{(1,-1,2)} = \frac{4 - 12 - 2}{\sqrt{17}} = -\frac{10}{\sqrt{17}}$$ EVALUADO EN EL PUNTO

ii) COMPROBAR QUE

$$V(P_2) - V(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \nabla V \cdot \vec{dl} \quad \text{PARA} \quad \begin{array}{l} \quad\ \ r \ \ \phi \ \ z \\ P_1(2, 0°, 0) \\ P_2(4, 0°, 0) \end{array}$$

Y $V = \frac{1}{r}$ (COORDENADAS CILÍNDRICAS)

$$V(P_2) = \frac{1}{4}, \quad V(P_1) = \frac{1}{2}$$

$$V(P_2) - V(P_1) = -\frac{1}{4}$$

$$\nabla V = -\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

$$\int_{(2,0°,0)}^{(4,0°,0)} \left(-\frac{1}{r^2}\hat{r}\right) \cdot (dr\,\hat{r}) = \int_{(2,0°,0)}^{(4,0°,0)} -\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{1}{r}\Big|_2^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

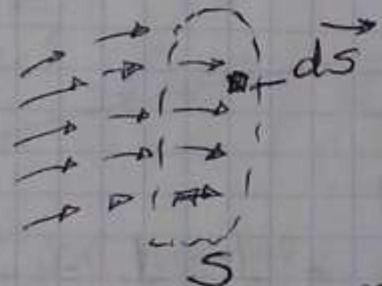
DIVERGENCIA Y FLUJO

DADO UN CAMPO VECTORIAL

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$$

EL FLUJO SE DEFINE COMO:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$ donde $\vec{dS}$ ES EL DIFERENCIAL DE SUPERFICIE DE S.



SI LA SUPERFICIE ES CERRADA

DEFINIMOS AL FLUJO TOTAL

COMO:

$$\Phi_{TOTAL} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

La divergencia de un campo indica si en puntos del espacio se tienen fuentes o sumideros de campo o líneas de campo:

$$div(\vec{E}) = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}}{V}$$

$$div(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

DADO $\vec{E} = E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z}$

LA DIVERGENCIA SE CALCULA MEDIANTE

$$div(\vec{E}) = \nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

EN COORDENADAS ESFÉRICAS DADO:

$\vec{E} = E_R\hat{R} + E_\phi\hat{\phi} + E_\theta\hat{\theta}$ SE CALCULA MEDIANTE:

$$div(\vec{E}) = \nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2E_R)}{\partial R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial(E_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

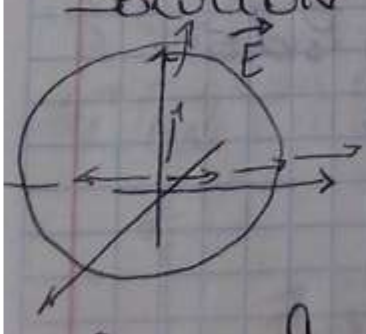
A PARTIR DE LA DEFINICIÓN DE DIVERGENCIA, EL TEOREMA INDICA QUE:

$$\Phi_{TOTAL} = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\,dV$$

DONDE V ES EL VOLUMEN DELIMITADO POR S

EJEM: $\vec{E} = R\hat{R}$ EN LA ESFERA DE RADIO a CON CENTRO EN EL ORIGEN

SOLUCIÓN



$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (R\hat{R})\cdot(R^2\sin\theta\, d\phi\, d\theta\, \hat{R}) =$$

$R=a$

$$= R^3(2\pi)(2) = 4\pi R^3$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int_S (R\hat{R})\cdot(d\vec{s}_R)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial (R^2 R)}{\partial R} = \frac{1}{R^2}\, 3R^2 = 3$$

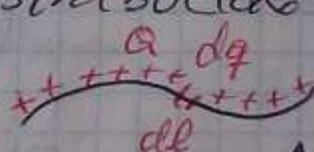
$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E})\, dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} (3)(R^2 \sin\theta \, dR\, d\phi\, d\theta)$$

$$= (3)\frac{1}{3}a^3 (2\pi)(2) = \underline{4\pi a^3}$$

Distribuciones de Carga y Campo Eléctrico

Si suponemos que la carga se encuentra presente en diversos cuerpos en una distribución continua podemos identificar tres tipos de distribuciones.

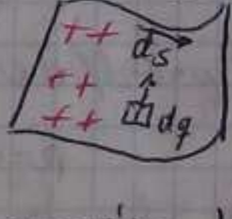
Distribución Lineal



$$\rho_l = \frac{dq}{dl}\left[\frac{C}{m}\right]$$

$Q = \int \rho_l \, dl$: carga total

Distribución Superficial



$$\rho_s = \frac{dq}{ds}\left[\frac{C}{m^2}\right] \quad Q = \int_S \rho_s \, ds$$

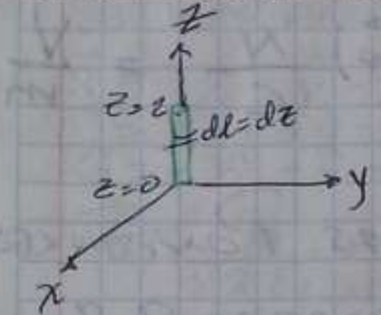
Distribución Volumétrica

Q

$\frac{dV}{dq}$

$$\rho_v = \frac{dq}{dV}\left[\frac{C}{m^3}\right] \quad Q = \int_{dV} \rho_v \, dV$$

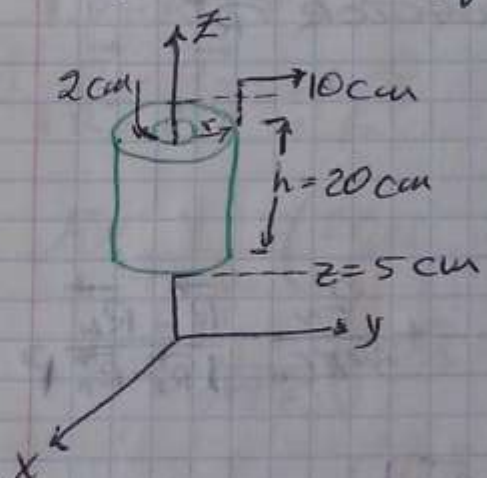
EJEMPLO: DETERMINAR LA CARGA TOTAL EN UNA LÍNEA QUE SE EXTIENDE DESDE $Z_1 = 0m$ HASTA $Z_2 = 2m$ SI LA DENSIDAD DE CARGA DE LÍNEA ES: $\boxed{\rho_l = 2z\left[\frac{C}{m}\right]}$



$$Q = \int_0^2 2z\,dz$$

$$Q = z^2 \Big|_{z=0}^{z=2} = 4C.$$

EJEMPLO DETERMINAR LA CANTIDAD DE CARGA TOTAL DE UN CILINDRO COMO EL MOSTRADO EN LA FIGURA SI $\rho_v = \frac{\cos\phi}{rz}\left[\frac{C}{m^3}\right]$



SOLUCIÓN

$$Q = \int_{0.05}^{0.25}\int_0^{2\pi}\int_{0.02}^{0.1} \frac{\cos\phi}{\cancel{r}z}\,\cancel{r}\,dr\,d\phi\,dz$$

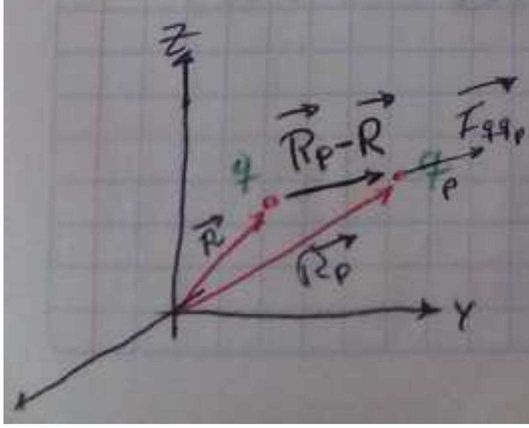
$$= 0.08(\cancel{\sin(2\pi)}^{0} - \cancel{\sin(0)}^{0})\int_{0.05}^{0.25}\frac{dz}{z}$$

$$= 0\,C.$$

CAMPO ELECTRICO.

DADO UN PAR DE CARGAS EN EL ESPACIO q y q_p, A PARTIR DE LA LEY DE COULOMB SABEMOS QUE LA FUERZA QUE EXPERIMENTA q_p EN LA EXPERIENCIA DE q ES.

$$F_{qq_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot q_p \cdot \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R_p}|^2} \cdot \underbrace{\frac{\vec{R} - \vec{R_p}}{|\vec{R} - \vec{R_p}|}}_{\text{VECTOR UNITARIO}}$$



ES DECIR.

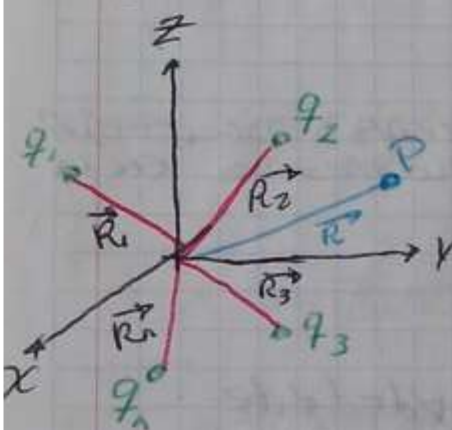
$$F_{qq_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q\,q_p}{|\vec{R} - \vec{R_p}|^3}(\vec{R} - \vec{R_p})$$

DEFINIMOS AL CAMPO ELECTRICO ASOCIADO A LA CARGA q MEDIANTE

$$\vec{E}_q = \frac{\vec{F}_{qq_p}}{q_p} \qquad \vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}-\vec{R}_p|}(\vec{R}-\vec{R}_p)\ \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

$$\vec{F}_{qq_p} = q_p \vec{E}_q$$

- CAMPO ELECTRICO DE N CARGAS PUNTUALES



SI EXISTEN n CARGAS $q_1, q_2, \ldots, q_N$ SITUADOS EN DIVERSOS PUNTOS DADOS POR LOS VECTORES $\vec{R_1}, \vec{R_2}, \ldots \vec{R_N}$ RESPECTIVAMENTE, Y DESEAMOS CONOCER EL CAMPO ELECTRICO EN EL PUNTO P DADO POR EL VECTOR $\vec{R}$

ENTONCES.

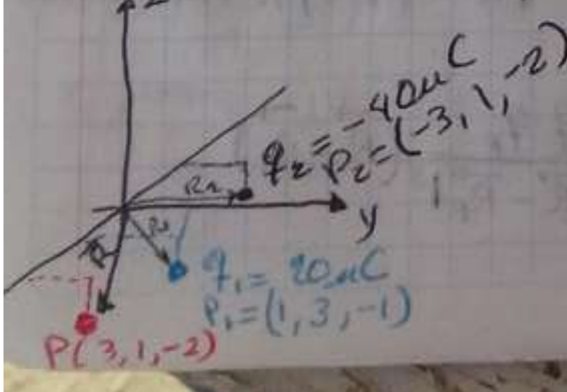
$$\vec{E}(P) = \vec{E}(\vec{R}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}-\vec{R_1}}{|\vec{R_0}-\vec{R_1}|^3} + \cdots + \frac{q_N}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}-\vec{R_N}}{|\vec{R_0}-\vec{R_n}|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_N}{|\vec{R}-\vec{R_N}|^3}(\vec{R}-\vec{R_N})$$

EJEMPLOS. DOS CARGAS PUNTUALES SE SITUAN EN LOS PUNTOS INDICADOS EN LA FIGURA CALCULAR:

a) EL CAMPO ELECTRICO EN P.

b) La fuerza que experimentaría una carga de 80 μC situada en dicho punto



SOLUCIÓN

LOS VECTORES ASOCIADOS

$\vec{R} = 3\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$ EL CAMPO ELECTRICO EN P ES:

$\vec{R_1} = \hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$

$\vec{R_2} = -3\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}-\vec{R_1}}{|\vec{R}-\vec{R_1}|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}-\vec{R_2}}{|\vec{R}-\vec{R_2}|^3}$$

DONDE

$\vec{R} - \vec{R_1} = 2\hat{x} - 1\hat{y} - \hat{z}$

$|\vec{R} - \vec{R_1}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\vec{R} - \vec{R_2} = 6\hat{x}$

$|\vec{R} - \vec{R_2}| = 6$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(20\mu C \cdot \frac{2\hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}}{27} - 40\mu C \cdot \frac{6\hat{x}}{216}\right)$$

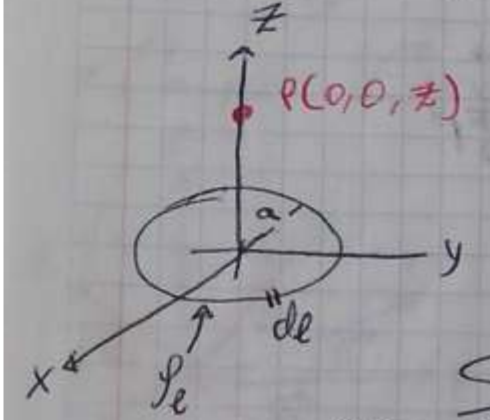
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{40\hat{x} - 40\hat{y} - 20\hat{z}}{27} - \frac{240\hat{x}}{216}\right) \cdot 10^{-6}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{10\hat{x}}{27} - \frac{40\hat{y}}{27} - \frac{20\hat{z}}{27}\right) \cdot 10^{-6}$$

a) $\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{108\pi\epsilon_0}(10\hat{x} - 40\hat{y} - 20\hat{z}) \cdot 10^{-6} \left[\frac{N}{C}\right]$

b) $\vec{F} = q\vec{E} = \frac{80 \cdot 10^{-6}}{108\pi\epsilon_0}(10\hat{x} - 40\hat{y} - 20\hat{z}) \cdot 10^{-6} = \frac{20}{27\pi\epsilon_0}(10\hat{x} - 40\hat{y} - 20\hat{z}) \cdot 10^{-12} [N]$

EJEMPLO. DETERMINAR EL CAMPO ELECTRICO SOBRE CUALQUIER PUNTO DEL EJE Z ASOCIADO A UN ANILLO DE CARGA UNIFORME ρ_e DE RADIO a SITUADO EN EL PLANO XY CON CENTRO EN EL ORIGEN:



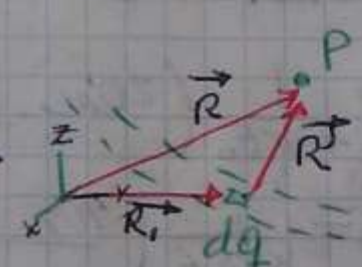
SOLUCIÓN SABEMOS QUE EL CAMPO ELECTRICO ASOCIADO A UNA CARGA EN EL ESPACIO ESTÁ DADO POR

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}-\vec{R}_1}{|\vec{R}-\vec{R}_1|^3}$$

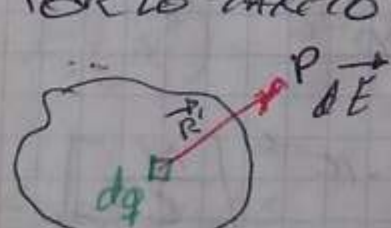
SI LA CARGA ES UN dq TENDRÁ ASOCIADO UN CAMPO ELECTRICO DIFERENCIAL $d\vec{E}$

$$d\vec{E} = \frac{dq_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|^3} \quad \text{DONDE}$$

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{R}_1 \longrightarrow$$



POR LO TANTO, DADO UN CUERPO CON CARGA DISTRIBUIDA:



EL CAMPO ELECTRICO TOTAL SERÁ LA SUMA DE TODAS LAS DIFERENCIALES DEL CAMPO ASOCIADO A CADA DIFERENCIAL DE CARGA.

$$\vec{E}(P) = \int d\vec{E}$$

$$dq = \rho_e\, dl$$

DONDE $dl = r\,d\phi = a\,d\phi$
(radio cte $= a$)

ENTONCES.

$$d\vec{E} = \frac{\rho_e\, a\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|^3}$$

DONDE
$$\vec{R}' = z\hat{z} - a\hat{r}$$
$$|\vec{R}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

Con lo cual.

$$d\vec{E} = \rho_e \frac{a\,d\phi}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z\hat{z} - a\hat{r}}{\left(\sqrt{z^2+a^2}\right)^3}$$

$\hat{z}$ NO DEPENDE DE ϕ

$\hat{r}$ DEPENDE DE ϕ

DESCOMPONEMOS $\hat{r}$ EN SUS COMPONENTES.:

$$\hat{r} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$$

ENTONCES.

$$d\vec{E} = \overbrace{\frac{a z\,d\phi}{4\pi\epsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}}}^{dE_z}\hat{z} - \underbrace{\frac{a^2 \rho_e}{4\pi\epsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}}\Big(\cos\phi\,d\phi\,\hat{x}}_{dE_x} + \underbrace{\sin\phi\,d\phi\,\hat{y}\Big)}_{dE_y}$$

AL INTEGRAR

$$d\vec{E} = dE_z\,\hat{z} + dE_x\,\hat{x} + dE_y\,\hat{y}$$

$$E_z = \int E\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{a z\,d\phi\,\rho_e}{4\pi\epsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{a z \rho_e}{2\epsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \int_0^{2\pi} \cos\phi\,d\phi = 0 \quad , E_y = \int_0^{2\pi} \sin\phi\,d\phi = 0$$

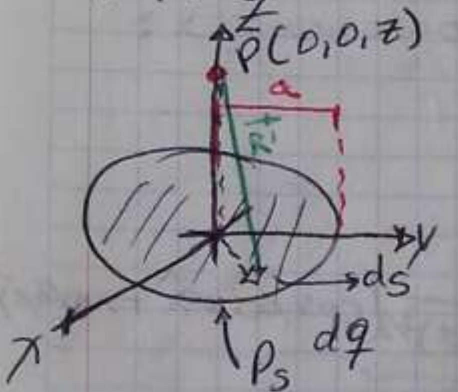
FINALMENTE

$$\vec{E}(\bar{P}) = \frac{a z \rho_e}{2\epsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{z} \left[\frac{N}{C}\right] = \left[\frac{V}{m}\right]$$

CAMPO ELECTRICO SOBRE EL EJE Z PARA UN ANILLO DE CARGA LINEAL UNIFORME ρ_e DE RADIO a.

EJEMPLO

DETERMINAR EL CAMPO ELECTRICO SOBRE EL EJE Z PARA UN DISCO DE RADIO a CON DENSIDADES DE CARGA SUPERFICIAL UNIFORME ρ_s SITUADO EN EL PLANO XY.



SOLUCIÓN EN ESTE PROBLEMA

$$\rho_s = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \rho_s\, ds$$

$$ds = r\,dr\,d\phi$$

$$dq = \rho_s\, r\,dr\,d\phi$$

$$\vec{R'} = z\hat{z} - r\hat{r}$$

$$|\vec{R'}| = \sqrt{z^2 + r^2}$$

ENTONCES

OJO

$$\vec{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R'}}{|\vec{R'}|^3} = \frac{\rho_s\, r\,dr\,d\phi}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z\hat{z} - r\hat{r}}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_s\, z\, r\,dr\,d\phi}{4\pi\epsilon(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{z} - \frac{\rho_s r^2\,dr\,d\phi}{4\pi\epsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}\overbrace{(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y})}^{\hat{r}}$$

NUEVAMENTE NOTAMOS QUE $\hat{r}$ SE CANCELA:

$$\vec{E}(P) = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\rho_s\, z\, r\,dr\,d\phi}{4\pi\epsilon_0 (z+r^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0}\int_0^{a} \frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{z}$$

INTEGRANDO

$$\int \frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du = -u^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}.$$

$$u = z^2 + r^2$$

$$du = 2r\,dr$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_s z}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{\pm z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{z}$$

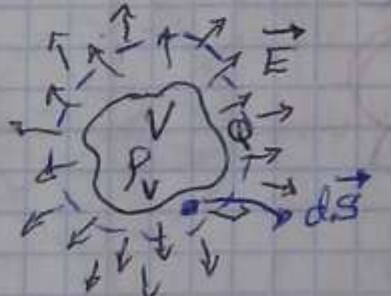
→ VALOR ABSOLUTO

$$\vec{E}(P) = \pm\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{z}$$

CAMPO ELÉCTRICO SOBRE EJE Z DE UN DISCO DE CARGA ρ_s UNIFORME EN EL PLANO XY.

LEY DE GAUSS

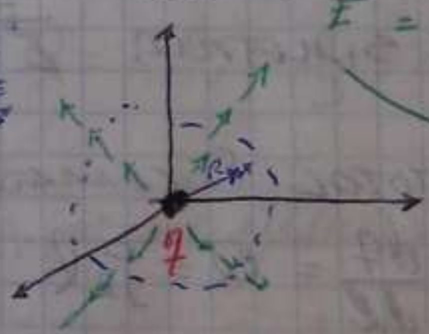
Para campos eléctricos indica la relación que existe entre una ~~distancia~~ distribución de carga ρ_v, el campo eléctrico asociado $\vec{E}$ y las propiedades eléctricas del medio ε_0 mediante la relación. INDICA QUE:



$$\underbrace{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{FLUJO TOTAL QUE CRUZA A UNA SUPERFICIE CERRADA } S} = \frac{\boxed{Q}}{\varepsilon_0}$$

→ CARGA TOTAL ENCERRADA POR S

EJEM. $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{R}$



SI LA SUPERFICIE QUE ENCIERRA A LA CARGA ES UNA ESFERA DE RADIO R Y CALCULAMOS EL FLUJO TOTAL QUE CRUZA:

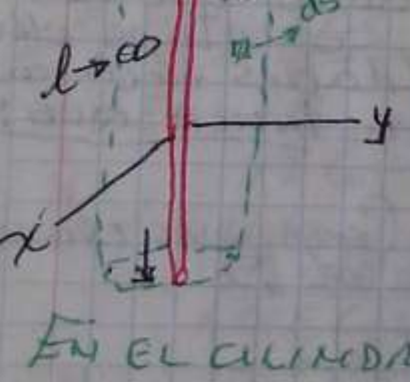
$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{R^2}}\hat{R}\right)\cdot\left(\cancel{R^2}\sin\theta\, d\phi\, d\theta\,\hat{R}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

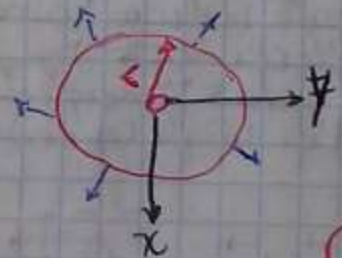
GAUSS CABLE CILINDRO

LA LEY DE GAUSS ES PARA SIMPLIFICAR EL CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO DE UN CUERPO CON UNA DETERMINADA DISTRIBUCIÓN DE CARGA PARTICULARMENTE CUANDO PUEDAN REALIZARSE CONSIDERACIONES DE SIMETRÍA CON RESPECTO AL CAMPO ELÉCTRICO ASOCIADO, ASÍ CUANDO PUEDA ESTABLECERSE UNA SUPERFICIE CERRADA EN DONDE EL CAMPO ELÉCTRICO SEA CTE, O BIEN TANGENCIAL A LA SUPERFICIE.

EJEM.: DETERMINAR EL CAMPO ELÉCTRICO ASOCIADO A UNA LÍNEA DE CARGA CON DISTRIBUCIÓN LINEAL UNIFORME ρ_ℓ SITUADA EN EL EJE ~~Z~~ CONSIDERAR QUE SU EXTENSIÓN ES MUY GRANDE.



SOLUCIÓN



Elegimos UN CILINDRO DE RADIO = r ASÍ EL CAMPO ELÉCTRICO EN SU SUPERFICIE ES CTE.

OJO

EN EL CILINDRO $\left(\vec{dS}_r = r\,d\phi\,dz\,\hat{r}\right)$

POR SIMETRÍA $\vec{E} = \underbrace{E_r(r)}_{\text{cte en } r}\hat{r}$

Carga total Encerrada

$$\rho_\ell = \frac{dq}{d\ell} = Q = \rho_\ell \ell$$

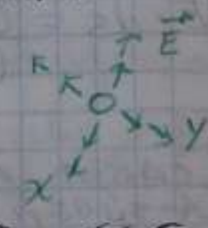
EMPLEANDO LEY DE GAUSS $\rightarrow$ $\oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = Q/\epsilon_0$

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_0^{2\pi} E_r(r)\hat{r}\,(r\,d\phi\,dz\,\hat{r}) = \rho_\ell \ell/\epsilon_0$$

$$r E_r \int_{-l/2}^{l/2}\int_0^{2\pi} d\phi\, dz = \rho_e l / \varepsilon_0 \Rightarrow E_r(r)\cdot 2\pi \cancel{l} = \frac{\rho_e \cancel{l}}{\varepsilon_0}$$

$$E_r(r) = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0 2\pi r}$$

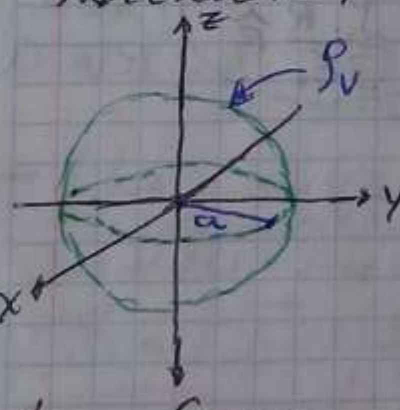
FINALMENTE $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}}$



OJO

PARA UNA ESFERA.

EJEM: DADA UNA ESFERA DE RADIO a CONCENTRADA EN EL ORIGEN CON UNA DENSIDAD DE CARGA VOLUMÉTRICA UNIFORME ρ_v, EMPLEAR LA LEY DE GAUSS PARA DETERMINAR EL CAMPO ELÉCTRICO AL INTERIOR Y EXTERIOR DE LA ESFERA.



SOLUCIÓN $\vec{E} = E_R(R)\hat{R}$

→ ANÁLISIS EN $R > a$ (EXTERIOR DE LA ESFERA)

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$Q = V\rho_v = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v$$

LEY DE GAUSS

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (E_R(R)\hat{R})\cdot(R^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta\, \hat{R}) = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$R^2 E_R(R)\cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_R(R) = \frac{a^3 \rho_v}{3R^2\varepsilon_0}}$$

OJO

CUANDO $R > a$

CONTINUA $R < a$

TAREA 0.2 FAWAZ

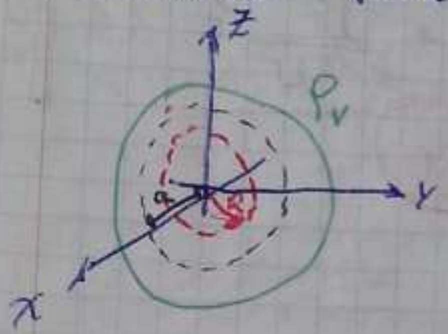
3.22, 3.23, 3.24, 3.26, 3.28

TAREA 0.3 FAWAZ.

~~ANALISIS CUANDO~~ 3.32, 3.33, 3.37, 3.39, 3.41, 3.43, 3.45

TAREA 1.1 4.1, 4.3, 4.5, 4.7, 4.11, 4.13

CUANDO $R < a$



DE LA LEY DE GAUSS:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \vec{E} = E_R(R)\hat{R}$$

$$\vec{ds} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{R}$$

LA CARGA ENCERRADA AL INTERIOR POR LA SUPERFICIE ESFÉRICA DE RADIO ES:

$$Q = \rho_v \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (E_R(R)\hat{R})\cdot(R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{R}) = R^2 E_R(R)\cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

OJO

$$R^2 E_R(R) 4\pi = \rho_v \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E_R(R) = \frac{\rho_v R}{3\epsilon_0}\hat{R}$$

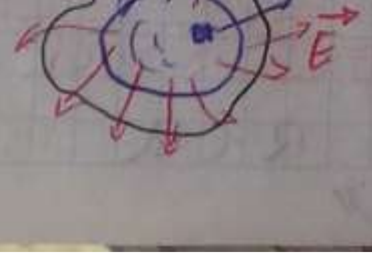
PARA $R < a$

RESUMEN

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{a^3 \rho_v}{3R^2\epsilon_0}\hat{R}, & R > a \\ \frac{\rho_v R}{3\epsilon_0}\hat{R}, & R < a \end{cases}$$

LEY DE GAUSS EN FORMA DIFERENCIAL

DE LA LEY DE GAUSS:



$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q_s}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho_v \, dV$$

Del Teorema de la Divergencia:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\,dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho_v\,dV \therefore \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}}$$

Ley de Gauss Diferencial o 1ª Ec. de Maxwell

Si $R<a$, $\vec{E}_r = \frac{\rho_v R}{3\epsilon_0}\hat{R}$

OJO

Aplicando la 1ª ecuación de Maxwell:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2E_r)}{\partial R} + \frac{1}{R\sin\theta}\cdot\frac{\partial(E_\phi)}{\partial\phi} + \frac{1}{R\sin\theta}\cdot\frac{\partial(E_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}$$

$$= \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(\rho_v\frac{R^3}{3\epsilon_0}\right) = \frac{1}{\cancel{R^2}}\cdot\frac{\cancel{3}\cancel{R^2}}{\cancel{3}\epsilon}\rho_v = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

Sin embargo al exterior:

Si $R>a$, $\vec{E}_r = \frac{a^3\rho_v}{3R^2\epsilon_0}\hat{R}$ De la 1ª Ec. de Maxwell

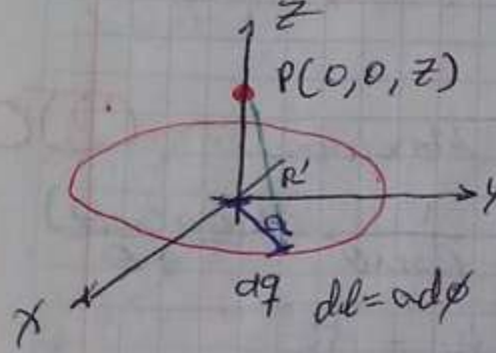
$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\cancel{R^2}a^3\rho_v}{3\cancel{R^2}\epsilon_0}\right) = 0$$

— Una medida vectorial del campo eléctrico independiente del medio es la densidad de campo eléctrico $\vec{D}$

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}\ \left[\frac{Q}{m^2}\right] \Rightarrow \vec{D} = \cancel{\epsilon_0}\frac{q}{4\pi\cancel{\epsilon_0}R^2}\hat{R} = \frac{q}{4\pi R^2}\hat{R}$$

Tarea 1, 2. ⇒ 4.17, 4.20, 4.22, 4.24, 4.29, 4.31 y ejercicio 4.7 pag 162

EJEM. CALCULAR EL POTENCIAL ELÉCTRICO SOBRE CUALQUIER PUNTO DEL EJE Z ASOCIADO A UN ANILLO DE CARGA DE RADIO a SITUADO EN EL PLANO XY Y CON CENTRO EN EL ORIGEN



CONSIDERE LA DENSIDAD DE CARGA UNIFORME ρ_e

SOLUCIÓN.

EL DIFERENCIAL DE POTENCIAL EN EL PUNTO P(0,0,Z) ES:

$$R' = \sqrt{a^2+z^2}$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R'} = \frac{\rho_e a\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$V(P) = \frac{\rho_e a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

EL CAMPO ELÉCTRICO ASOCIADO ES:

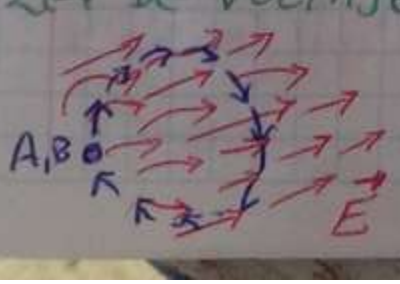
$$\vec{E}(P) = -\nabla V = -\left(\cancel{\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right)$$ OJO

$$\vec{E}(P) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_e a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\right)\hat{z}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_e a z}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

POTENCIAL Y 2ª ECUACIÓN DE MAXWELL

EN CAMPOS INVARIABLES EN EL TIEMPO SABEMOS POR LA LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF



$$V_{AB} = -\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0.$$

$$\nabla \times B = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

ES DECIR, QUE PARA CUALQUIER CAMPO ELÉCTRICO INVARIANTE.

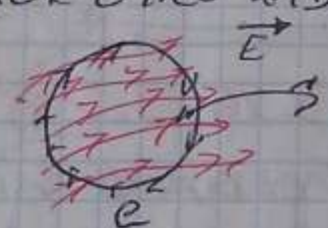
$$\boxed{\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$ 2ª EC. DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL.

ESTE CÁLCULO COINCIDE CON LA CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL LO CUAL INDICA QUE SI:

$$\text{circ}_e(\vec{E}) = \oint_e \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

LO QUE SIGNIFICA QUE LOS CAMPOS ELÉCTRICOS INVARIANTES EN EL TIEMPO SON CONSERVATIVOS O IRROTACIONALES.

POR OTRO LADO, EL TEOREMA DE STOKES INDICA QUE:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E})\cdot d\vec{S}$$

TEOREMA DE STOKES

CAMBIA DE INTEGRAL DE LÍNEA A SUPERFICIE

DE DONDE: $$\int_S (\nabla \times \vec{E})\, d\vec{S} = 0$$

ENTONCES: $\longrightarrow \nabla \times E = 0$ { 2ª ECUACIÓN DE MAXWELL (CAMPOS INVARIANTES)

EJEM: COMPROBAR LA 2ª EC. DE MAXWELL PARA EL CÁLCULO DE LOS CAMPOS ELÉCTRICOS DE EJERCICIOS ANTERIORES.

i) $\vec{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$

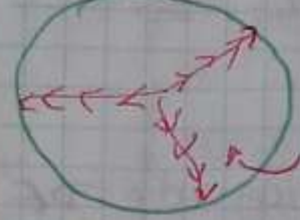
OJO $\nabla \times \vec{E}$

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial \phi}} - \cancel{\frac{\partial E_\phi}{\partial z}}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial r}}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r}} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$

OJO $$= \cancel{\frac{\partial E_r}{\partial z}}\hat{\phi} - \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial E_r}{\partial \phi}}\hat{z} \quad \therefore \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

FORMULARIO 1/4 UNA PAGINA A LA MITAD.

ii) AL INTERIOR DE UNA ESFERA CARGADA ρ_V.



$$\vec{E} = \frac{\rho_V R}{3\epsilon_0}\hat{R}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{R\sin\theta}\left(\cancel{\frac{\partial(E_\phi \sin\theta)}{\partial\theta}} - \cancel{\frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}}\right)\hat{R} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_R}{\partial\phi} - \cancel{\frac{\partial(R E_\phi)}{\partial R}}\right)\hat{\theta}$$

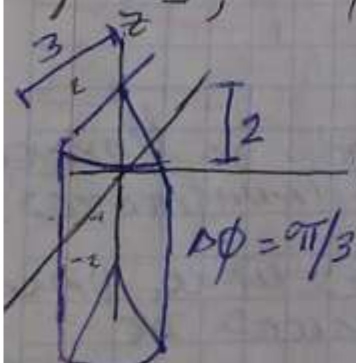
$$+\frac{1}{R}\left(\cancel{\frac{\partial(R E_\theta)}{\partial R}} - \frac{\partial E_R}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$

$$= \frac{1}{R\sin\theta}\cancel{\frac{\partial E_R}{\partial\phi}}\hat{\theta} - \frac{1}{R}\cancel{\frac{\partial E_R}{\partial\theta}}\hat{\phi} = 0$$

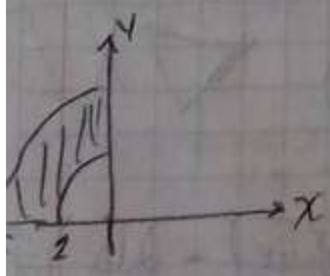
TAREA Θ.2 3.22, 3.23, 3.24, 3.26, 3.28

3.22 USAR LA EXPRESIÓN APROPIADA PARA EL DIFERENCIAL DE AREA dS Y DETERMINAR EL ÁREA

a) $r=3$; $0 \le \phi \le \pi/3$; $-2 \le z \le 2$.

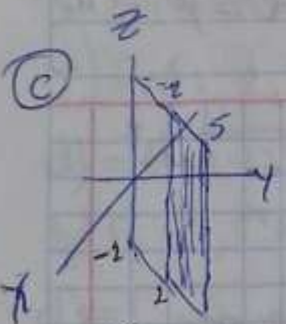


$$A = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{\pi/3}\int_{0}^{3} dr\, d\phi\, dz = r\phi z\Big|_{r=0}^{r=3}\Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/3}\Big|_{z=-2}^{z=2} = 4\pi$$



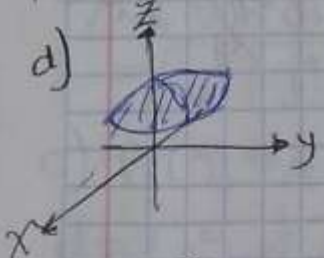
$$A = \int_{r=2}^{5}\int_{\phi=\pi/2}^{\pi} r\, d\phi\, dr = \frac{1}{2}r^2\phi\Big|_{r=2}^{r=5}\Big|_{\phi=\pi/2}^{\pi} = \frac{21\pi}{4}$$

c)



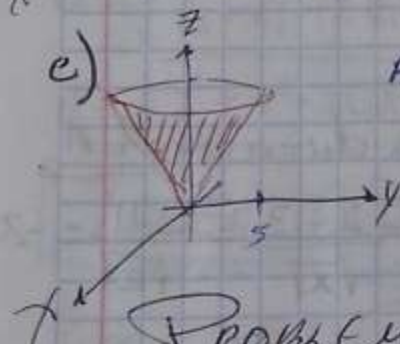
$$A=\int_{-2}^{2}\int_{2}^{5} dr\,dz = (rz)\Big|_{r=2}^{5}\Big|_{z=-2}^{2} = 12$$

d)



$$A=\int_{0}^{\pi/3}\int_{0}^{\pi} R^2 \sin\theta \, d\phi\, d\theta = (-4\phi\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi/3}\Big|_{\phi=0}^{\pi} = 2\pi$$

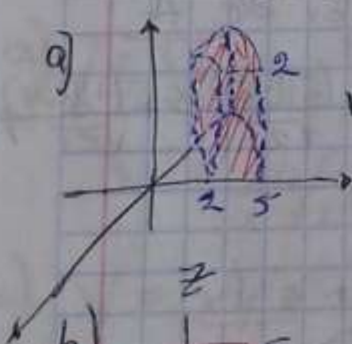
e)



$$A=\int_{R=0}^{5}\int_{0}^{2\pi} (R\sin\theta)\, d\phi\, dR = 25\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

Problema 3.23. $2 \le r \le 5$, $\pi/2 \le \phi \le \pi$, $0 \le z \le 2$

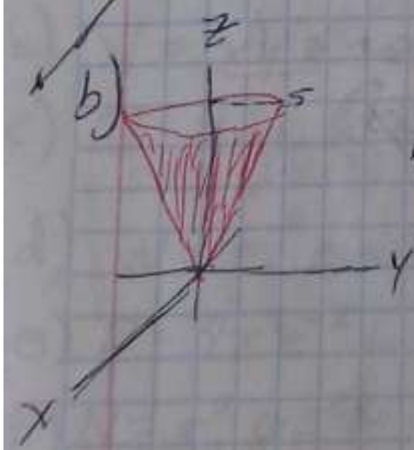
a)



$$V=\int_{2}^{5}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{2} r\,dr\,d\phi\,dz = \frac{1}{2}r^2\phi z = \frac{21\pi}{2}$$

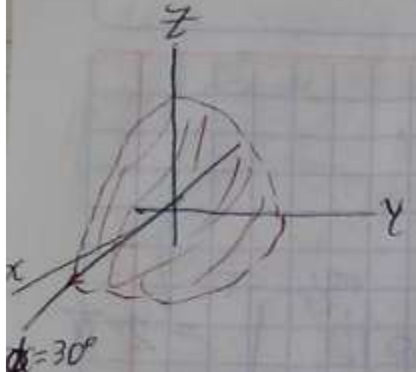
$0 \le R \le 5$; $0 \le \theta \le \pi/3$; $0 \le \phi \le 2\pi$

b)



$$V=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/3}\int_{0}^{5} R^2 \sin\,dR\,d\theta\,d\phi = 125\frac{\pi}{3}$$

PROBLEMA 3.24 $0 \leq R \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 90^\circ,\ 30^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$



$$S' = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4\pi}{3} \ m^2$$

$$V = \int_0^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\phi = 8\pi/9 \ m^3$$

PAG. 147

PROBLEMA 3.26

$A = 4\hat{R} + 2\theta - \phi$

$B = -2\hat{R} + 0\theta + 3\phi$

a) El componente escalar o proyección de B en la dirección de A.

$$C = B \cdot \frac{A}{|A|} = (-2\hat{R} + 3\phi) \cdot \frac{(4\hat{R} + 2\theta - 1\phi)}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{-8-3}{\sqrt{21}} = \frac{-11}{\sqrt{21}} = -2.4$$

b) El componente vectorial de B en la dirección de A.

$$D = A \cdot \frac{C}{|A|} = (4\hat{R} + 2\theta - \phi) \cdot \frac{-2.4}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{(4)(-2.4)}{\sqrt{21}}\hat{R} + \frac{(2)(-2.4)}{\sqrt{21}}\theta + \frac{(-1)(2.4)}{\sqrt{21}}\phi$$

$$D = -2.09\hat{R} + 1.05\hat{\theta} + 0.52\hat{\phi}$$

c) El componente vectorial de B perpendicular a A.

$$E = B - D = (-2\hat{R} + 3\phi) - (2.09\hat{R} + 1.05\hat{\theta} + 0.52\hat{\phi})$$

$$= 0.9\hat{R} + 1.05\hat{\theta} + 2.48\phi$$

PROBLEMA 3.28

DISTANCIA ENTRE LOS SIS PARES DE PUNTOS.

a) $P_1(1,2,3)$ y $P_2(-2,-3,-2)$ EN CARTESIANAS

$d) = \sqrt{(-2-1)^2+(-3-2)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{59} = 7.68$

b) $P_1(1, \pi/4, 3)$ y $P_2(3, \pi/4, 4)$ EN CILINDRICAS

$d) = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)}$

$= \sqrt{3^2 + 1^2 - 2(1)(3)\cos(\pi/4 - \pi/4) + (4-3)} = 2.24$

c) $P_1(4, \pi/2, 0)$ y $P_2(\overset{R}{3}, \overset{\theta}{\pi}, \overset{\phi}{0})$ EN ESFÉRICAS

$d = \sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_1R_2[\cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_2 - \phi_1)]}$

$d = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2(3)(4)[\cos(\pi)\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)\sin(\pi)\cos(0-0)} = \sqrt{25} = 5$

TAREA 0.3 | 3.32, 3.33, 3.37, 3.39, 3.41, 3.43, 3.45

PROB. 3.32. DETERMINAR EL GRADIENTE

a) $T = \frac{3}{(x^2+z^2)} = 3\cdot(x^2+z^2)^{-1}$ $\nabla T = -3(x^2+z^2)^{-2}\cdot 2x + -3(x^2+z^2)^{-2}\cdot 2z$

$\nabla T = \frac{-6x}{(x^2+z^2)^2} - \frac{6z}{(x^2+z^2)^2}$

b) $V = xy^2z^4$ $\nabla V = y^2z^4, 2xyz^4, 4xy^2z^3$

c) $U = z\frac{\cos\phi}{(1+r^2)}$ $\nabla U = -2r\frac{z\cos\phi}{(1+r^2)^2}, -\frac{z\,\mathrm{sen}\,\phi}{(1+r^2)}, \frac{\cos\phi}{(1+r^2)}$

d) $W = e^{-R}\sin\theta$ $\nabla W = -e^{-R}\sin\theta + e^{-R}\cos\theta$

e) $S = 4x^2e^{-z} + y^3$ $\nabla S = 8xe^{-z}, 3y, -4x^2e^{-z}$

f) $N = r^2\cos^2\phi$ $\nabla N = 2r\cos^2\phi, -2r\sin\phi\cos\phi$

g) $M = R\cos\theta\sin\phi$ $\nabla M = \cos\theta\sin\phi, -R\sin\phi\sin\theta, R\cos\theta\cos\phi$

PROBLEMA 3.33

EL GRADIENTE $\nabla T = e^{-2z}\,\hat{z}$ SI $T = 10$ CON $z = 0$
DETERMINAR $T(z)$

$$T(z) = T(0) + \int_0^{z} e^{-3z'}\,dz' = -\frac{-e^{-3z'}}{3}\Big|_0^{z}$$

$$T(z) = 10 + \frac{e^{-3z}}{3}$$

PROBLEMA 3.37.

PARA LA FUNCIÓN ESCALAR $U = \frac{1}{R}\sin^2\theta$ DETERMINAR SU DERIVADA DIRECCIONAL A LO LARGO R DE LA DIRECCIÓN DE RANGO R Y EVALUAR EN $P(5, \pi/4, \pi/2)$

$$U = \frac{1}{R}\sin^2\theta$$

$$\nabla U = -\frac{\sin^2\theta}{R^2}\hat{R} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{R}\hat{\theta}$$

$$\nabla U\cdot\hat{R}\Big|_P = -\frac{\sin^2\theta}{R^2}\Big|_{P(5,\pi/4,\pi/2)} = -\frac{\sin^2(\pi/4)}{25} = -0.02$$

PROBLEMA 3.39.

PARA EL CAMPO VECTORIAL $E = xz\hat{x} - yz^2\hat{y} - xy\hat{z}$ CALCULAR.

a) EL FLUJO TOTAL HACIA AFUERA QUE FLUYE A TRAVEZ DE LA SUPERFICIE DE UN CUBO CON CENTRO EN EL ORIGEN Y LADOS = 2 PARALELOS A LOS EJES CARTESIANOS.

PROBLEMA 3.41 CAMPO VECTORIAL $D = r^3\hat{r}$ ENTRE DOS SUPERFICIES $R = 1$ Y $R = 2$ ENTRE $z = 0$ Y $z = 5$ CALCULAR

PREGUNTAR

$$\iint (r^3\hat{r})\cdot(r\,d\phi\,dz\,\hat{r}) = \int_0^5\int_0^{2\pi} r^4\,d\phi\,dz = r^4\cdot 2\pi\cdot 5\Big|_{r=1}^{r=2} = 150\pi$$

$$\iiint \nabla\cdot D\,dv = \iiint (2r^2\hat{r})\cdot(r\,dr\,d\phi\,dz) = \int_0^5\int_0^{2\pi}\int_1^2 2r^3\,dr\,d\phi\,dz$$

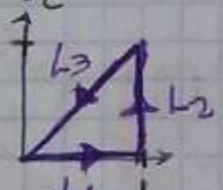
$$= \left(\frac{2}{4}r^4\cdot\phi\cdot z\right)\Big|_{r=1}^{r=2}\Big|_{\phi=0}^{2\pi}\Big|_{z=0}^{5} =$$

$d\ell$ EN CARTESIANAS $(dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z})$
EN CILINDRICAS $(dr\hat{r} + rd\phi\hat{\phi} + zd\hat{z})$ OJO
EN ESFÉRICAS

PROBLEMA 3-43.

PARA EL CAMPO VECTORIAL $E = xy\hat{x} - (x^2+2y^2)\hat{y}$
CALCULAR: PREGUNTA QUE ES $d\vec{\ell}$ $\vec{S}$

a) $\oint_C E \cdot d\vec{\ell}$ ALREDEDOR DEL CONTORNO TRIANGULAR INDICADO EN LA FIG.



$$L_1 = \int (xy\hat{x} - (x^2+2y^2)\hat{y}) \cdot (\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz)$$

$$L_1 = \int xy\,dx - \int (x^2+2y^2)dy = y\int x\,dx - x^2\int dy - 2\int y^2 dy$$

$$L_1 = \frac{yx^2}{2}\Big|_{x=1,y=0} - x^2y\Big|_{x=1,y=0} - \frac{2}{3}y^3\Big|_{y=0} = 0$$

$L1 + L2 + L3$

$$L_2 = y\frac{x^2}{2}\Big|_{x=1,y=0} - x^2y\Big|_{x=1,y=1} - \frac{2}{3}y^3\Big|_{y=1} = -\frac{5}{3}$$

$$L_3 = \frac{yx^2}{2}\Big|_{x=1,y=x} - x^2y\Big|_{x=1,x=y} - \frac{2}{3}y^3\Big|_{y=1} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \oint E \cdot d\ell = -1$

b) $\int_S (\nabla \times E) \cdot ds$

$$\nabla \times E = \left(\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \partial E_\phi}\right)\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

VER ESFÉRICAS Y CILINDRICAS OJO

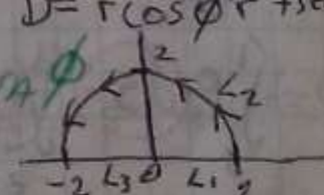
$$\nabla \times E = -2x - x = -3x\hat{z}$$

$$\iint (-3x)\hat{z} \cdot dx\,dy\,\hat{z} = \int_0^1 -3\int_0^x x\,dx\,dy = -1$$

PROBLEMA 3.45 VERIFICAR STOCKES PARA $B = r\cos\phi\hat{r} + \text{sen}\phi\hat{\phi}$

$$\oint_C B \cdot d\ell = \int_0^2 r\cos\phi\,dr + \int_0^{\pi} r\sin\phi\,d\phi$$

PREGUNTA ϕ



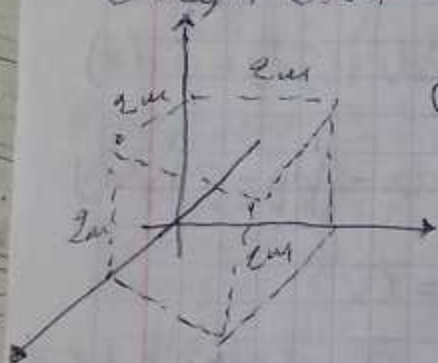
$$\iint \nabla B \cdot ds = \int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2} \left(\hat{z}\sin\phi\left(1+\frac{1}{r}\right)\right) \cdot (r\,dr\,d\phi\,\hat{z}) = 8$$

TAREA 1.1 4.1, 4.3, 4.5, 4.7, 4.11, 4.13

PROBLEMA 4.1 Un cubo 2m por lado está en el 1er octante en cartesianas con una esquina en el origen

OJO

CALCULAR LA CARGA TOTAL CONTENIDA SI LA DENSIDAD DE CARGA ESTÁ POR $\rho_v = xy^2 e^{-2z}$ mC/m^3



$$Q = \int_V \rho_v \, dV = \int_0^2\int_0^2\int_0^2 (xy^2 e^{-2z})(dx\,dy\,dz)$$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 \frac{-e^{-2z}}{2}\Big|_0^2 = -\frac{1}{12}x^2y^3e^{-2z}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}\left(1-e^{-4}\right)$$

PROBLEMA 4.3 LA CARGA TOTAL CONTENIDA EN UN CONO DEFINIDO POR $R \leq 2$ m y $0 \leq \theta \leq \pi/4$ $\rho_v = 10R^2\cos^2\theta$

$$Q = \int \rho_v \, dV = \int (10R^2(\cos^2\theta)) \cdot R^2 \sin\theta \, dR\,d\phi\,d\theta$$

PREGUNTA = NO PUDO HABER SIDO EN CILÍNDRICAS?

$$Q = 10\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} R^4\cos^2\theta\sin\theta\,dR\,d\phi\,d\theta = -\frac{2}{3}R^5\phi\cos^3\theta\Big|_{R\phi\theta} = 86.65\ mC$$

PROBLEMA 4.5 DETERMINAR LA CARGA TOTAL EN UN DISCO CIRCULAR DEFINIDO POR $r \leq a$ y $z = 0$ si:

a) $\rho_s = \rho_{s0}\cos\phi\ (C/m^2)$ ¿Cómo identifico S_z, S_r, S_ϕ?

$$Q = \int_S \rho_s \, dS_z = \int_{S_z} \rho_{s0}\cos\phi\,(\cancel{r}\,dr\,d\phi) = \rho_{s0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\cos\phi\,dr\,d\phi = \rho_{s0}\frac{r^2}{2}\sin\phi\Big|_{r\phi} = 0$$

b) $\rho_s = \rho_{s0}\sin^2\phi\ (C/m^2)$

$$Q = \rho_{s0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\sin^2\phi\,dr\,d\phi = \rho_{s0}\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\phi - \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\right)\Big|_{r=0}^{a}\Big|_{\phi=0}^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}\rho_{s0}$$

OJO

PROBLEMA 4.7 Si $J = \frac{5}{R}\hat{R}$ CALCULAR I A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE $R = 5m$

$$I = \int_S J \cdot dS_R = \int_{S_R} \left(\frac{5}{R}\right) \cdot \left(R^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta\right) = 5R \iint \sin\theta \, d\phi \, d\phi$$

$$I = -5R\phi\cos\theta \Big|_{R=5} \Big|_{\phi=0}^{2\pi} \Big|_{\theta=0}^{\pi} = 314.2 \text{ A}$$

PROBLEMA 4.11 La carga $q_1 = 6\mu C$ se encuentra en (1cm, 1cm, 0) y la carga q_2 está localizada en (0, 0, 4 cm) ¿Cuál será q_2 de forma que E en (0, 2cm, 0) no tenga componente y?

No le entendí

$$\vec{R} = (0, 2, 0)$$
$$\vec{R}_1 = (1, 1, 0)$$
$$(-1, 1, 0)$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R} - \vec{R}_1}{|\vec{R} - \vec{R}_1|^3}$$

$$|\vec{R} - \vec{R}_1| = \sqrt{(.01)^2 + (.01)^2} = \sqrt{.02}$$

$$\vec{E}_1(\vec{R}) = \frac{6\mu C}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-0.01\hat{x}, 0.01\hat{y})}{(\sqrt{0.02})^3}$$

$$\vec{R} = (0, 2, 0)$$
$$\vec{R}_2 = (0, 0, 4)$$
$$(0, 2, -4)$$

$$|\vec{R} - \vec{R}_2| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

205

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R} - \vec{R}_2}{|\vec{R} - \vec{R}_2|^3}$$

$$\vec{E}_2(\vec{R}) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(0.02\hat{y} - 0.04\hat{z})}{(\sqrt{0.20})^3}$$

$$\vec{E}_1(\vec{R}) + \vec{E}_2(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{6\mu C(-0.01\hat{x} + 0.01\hat{y})}{(2\times10^{-2})^{3/2}} + \frac{q_2(0.02\hat{y} - 0.04\hat{z})}{(20\times10^{-2})^{3/2}}\right]$$

DESPEJAMOS q_2 ¿?

$$= \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R} - \vec{R}_1}{|\vec{R} - \vec{R}_1|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R} - \vec{R}_2}{|\vec{R} - \vec{R}_2|^3}}$$

OJO

$$\boxed{F = q_3 \vec{E}}$$

OJO

$$\vec{E}_x = E_x \hat{x}$$

$$\vec{E}_y = E_y \hat{y} = \vec{0}$$

PROBLEMA 4.13 (S)

UNA CARGA ESTA DISTRIBUIDA A LO LARGO DE UN ARCO LOCALIZADO EN EL PLANO X-Y DEFINIDO POR $r = 2$ cm Y $0 \le \phi \le \pi/4$

SI $\rho_l = 5\ [\mu C/m]$ CALCULAR E, EN $(0,0,z)$

EVALUARLO EN EL ORIGEN.

TAREA 1.2 4.17, 4.20, 4.22, 4.24, 4.29, 4.31 Y 4.7 PAG 162

PROBLEMA 4.17 TRES LINEAS DE CARGA INFINITA PARALELAS AL EJE Z, ESTAN LOCALIZADAS EN LAS 3 ESQUINAS EN UNA FORMA DE COMETA SI ES SIMETRICA DEMOSTRAR QUE EL CAMPO ELECTRICO ES CERO EN EL ORIGEN.

$$\boxed{E = E_1 + E_2 + E_3}$$ OJO

$$E = -\hat{y}\,\frac{2\rho_l\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 R_1} + \hat{y}\,\frac{2\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$$

SI $\cos\theta = \dfrac{R_1}{R_2}$ $\therefore$ $E = -\hat{y}\,\dfrac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{R_1}{R_1 R_2} + \hat{y}\,\dfrac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0 R_2} = 0$

PROBLEMA 4.20 (206)

DADA LA DENSIDAD DE FLUJO ELECTRICO $D = 2(x+y)\hat{x} + (3x-2y)\hat{y}$

DETERMINAR ρ_v

OJO

a) $\rho_v = \nabla\cdot D = \dfrac{\partial f(D_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial f(D_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial f(D_z)}{\partial z} = \dfrac{d(2x+2y)}{dx} + \dfrac{d(3x-2y)}{dy} = 2-2 = 0$

b) LA CARGA TOTAL EN EL CUBO DE 2 MTS DE LADO EN EL 1ER OCTANTE x, y, z Y UNA DE SUS ESQUINAS EN EL ORIGEN.

$$Q = \int_V \nabla\cdot D\,dV = \int_0^2\int_0^2\int_0^2 0\,dx\,dy\,dz = 0$$

c) Q APLICANDO LA EQ. DE GAUSS

$$\boxed{Q = \oint_S D\,ds = \int_V \nabla\cdot D\,dV} = 0$$

OJO

(BUSCAR $d\vec{l}$ PARA ESFÉRICAS, CILÍNDRICAS, CARTESIANAS)

PROBLEMA 4.22. LA CARGA Q_1 DISTRIBUIDA EN UN CASCO ESFÉRICO DE RADIO a Y Q_2 DIST. SOBRE UN CASCO DE RADIO b CON $b > a$. CALCULAR E EN LAS REGIONES $R < a$, $a < R < b$, Y $R > b$ CON GAUSS

$D = D_R \hat{R}$

GAUSS OJO

$$\boxed{\oint_S D \cdot ds = Q_{tot.}}$$

$$\int_S (D_R \hat{R})(R^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \hat{R}) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} D_R R^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta$$

$$D_R = \frac{Q_{tot}}{4\pi R^2}$$

OJO

$$\boxed{D = \varepsilon_0 E \qquad E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{TOT}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

PARA $R < a$ $\quad Q_{tot} = 0 \quad E = E_R \hat{R} = \frac{Q_{TOT}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 0$

PARA $a < R < b$ $\quad Q_{tot} = Q_1 \quad E = E_R \hat{R} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

PARA $R > b$ $\quad Q_{tot} = Q_1 + Q_2 - \quad E = E_R \hat{R} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

PROBLEMA 4.24.

LA DENSIDAD DE CARGA ESTÁ EN COORDENADAS CILÍNDRICAS POR LA FUNCIÓN.

$\rho_v = 5re^{-r}$ APLICAR GAUSS PARA ENCONTRAR D,

OJO

$$\boxed{\nabla \cdot D = \rho_v} \Rightarrow D = rD_r \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) = 50re^{-r}$$

$$\int_0^r \frac{\partial (rD_r)}{\partial r} dr = \int_0^r 50 r^2 e^{-r} dr$$

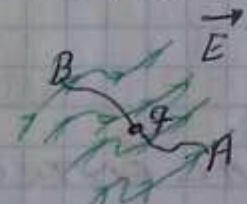
$$rD_r = D = \int_0^r 50 r^2 e^{-r} dr$$

PROBLEMA 4.29 UN ANILLO DE RADIO a LOCALIZADO EN X–Y SU CENTRO EN EL ORIGEN Y DENSIDAD UNIF ρ_l.

LEY DE GAUSS DIFERENCIAL Y 1ª ECUACION DE MAXWELL

POTENCIAL ELÉCTRICO

DADO UN CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ EL POTENCIAL ELECTRICO SE DEFINE COMO LA CANTIDAD LA ENERGIA O TRABAJO POR UNIDAD DE CARGA NECESARIA PARA TRANSPORTAR UNA CARGA DE A a B:



SE ASUME QUE LA CARGA SERÁ MOVIDA POR UNA FUERZA EXTERNA DE MODO QUE NO SE ACELERE.

$\vec{F}_{EXT} + q\vec{E} = 0$ ∴ LA FUERZA EXTERNA NECESARIA SERÁ

$$\vec{F}_{EXT} = -q\vec{E}$$

LA ENERGÍA TOTAL NECESARIA PARA TRANSPORTAR A LA CARGA DE A A B ES:

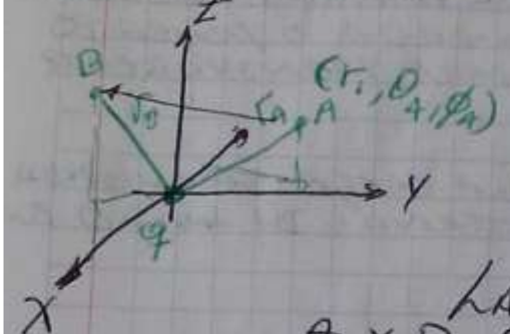
$$W_{BA} = \int_A^B \vec{F}_{EXT} \cdot \vec{dl} = -q\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

DEFINIMOS A LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE A Y B V_{AB}:

$$V_{AB} = \frac{W_{BA}}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

ESEM

EJEM. DETERMINAR LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS SITUADOS A UNA DISTANCIA r_A Y r_B DEL ORIGEN SI EN EL SE ENCUENTRA UNA CARGA PUNTUAL q.



SOLUCIÓN. PARA UNA CARGA PUNTUAL EN EL ORIGEN

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R^2}\hat{R}$$

LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE A Y B ES:

$$V_{BA} = V_B - V_A = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

donde: $dl = dR\hat{R} + R\sin\theta\, d\phi\hat{\phi} + R\,d\theta\hat{\theta}$

$$V_{BA} = V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{R}\right)\cdot\left(dR\hat{R}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

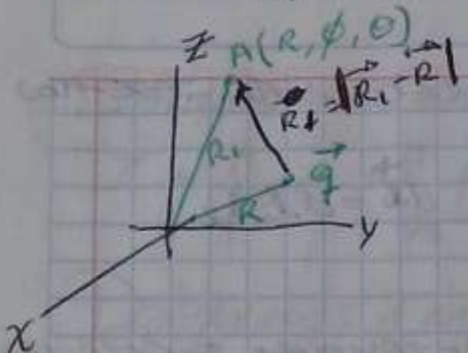
$$V_{BA} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

PERMITE ANALIZAR EL CAMPO ELÉCTRICO ASOCIADO A DISTRIBUCIONES DE CARGA EL ASOCIAR UN CAMPO ESCALAR A CADA DIFERENCIAL DE CARGA.

DEFINIREMOS EL CAMPO POTENCIAL DE UNA CARGA REFERENCIADO A $r_A \to \infty$ DE MODO QUE, PARA UN PUNTO SITUADO EN UNA DISTANCIA R DE LA CARGA EN EL ORIGEN.

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{CON} \quad \boxed{V(\infty) = 0}$$

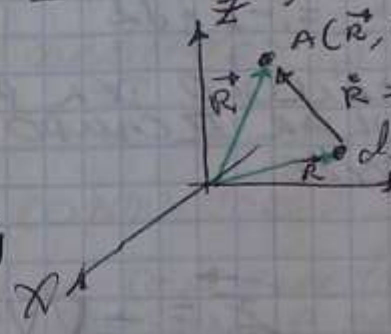
Si la carga no está en el origen



$$\vec{R}_t = |\vec{R}_1 - \vec{R}|$$

$$V(R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}_1 - \vec{R}|}$$

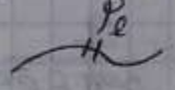
Si la carga es diferencial



$$\mathring{R} = |\vec{R} - \vec{R}_1|$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}_1 - \vec{R}|}$$

Asociado con distribuciones de carga:



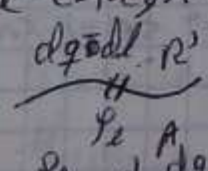
$dq = \rho_\ell dl$

$dq = \rho_s ds$

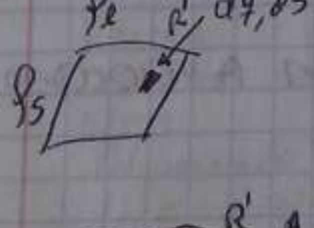
$dq = \rho_v dV$

Potencial Eléctrico

Por lo tanto, para determinar el potencial en puntos del espacio asociados a las diferentes distribuciones de carga:



$$V(A) = \int \frac{\rho_\ell dl}{4\pi\varepsilon_0 R'} \qquad dq = \rho_\ell dl \qquad R' = |\vec{R}_1 - \vec{R}|$$



$$V(A) = \int \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 R'}$$

$$V(A) = \int \frac{\rho_v dV}{4\pi\varepsilon_0 R'}$$

POTENCIAL ELÉCTRICO - CAMPO ELÉCTRICO

$I = \frac{C}{S} = \frac{dq}{dt}$

DE LA DEFINICIÓN DE DERIVADA DIRECCIONAL SABEMOS QUE:

$$\frac{dV}{dl} = \nabla V \cdot \hat{a}_l \,, \quad dV = \nabla V \cdot \vec{dl} \,, \quad \vec{dl} = dl\, a_l$$

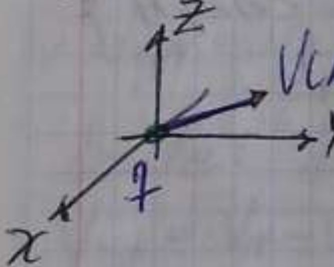
OJO

$$= -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$\therefore$ A PARTIR DEL CÁLCULO DEL POTENCIAL ELÉCTRICO ES POSIBLE CALCULAR EL CAMPO ELÉCTRICO ASOCIADO MEDIANTE

$$\vec{E} = -\nabla V$$

EJEM.



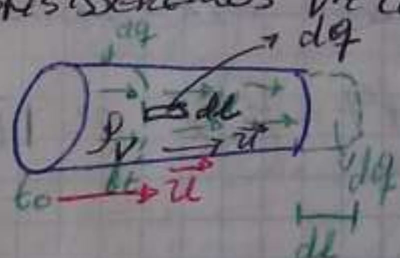
$$V(R) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}\right)$$

$$= -\left(-\frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R^2}\hat{R} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R^2}\hat{R}\right)$$

DENSIDAD DE CORRIENTE Y CONDUCTORES

CONSIDEREMOS UN CONDUCTOR EN EL CUAL CIRCULA CORRIENTE



DADO QUE LA CORRIENTE SE DEFINE COMO:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

CADA DIFERENCIAL DE CARGA SE DESPLAZA A VELOCIDAD $\vec{u}$

DONDE: $dq = \rho_v dV = \rho_v\, ds\, dl$

PERO: $u = \frac{dl}{dt}$, $dl = u\,dt$

$$dq = \rho_v\, u\, ds\, dt$$

$$\frac{dq}{dt} = dI = \rho_v\, u\, ds$$

(5 SEP) 1er Parcial.

Si tomamos la corriente total en el conductor

$$I = \int dI = \int_S \rho_v \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Definimos a la corriente $\vec{J} = \rho_v \vec{u} \left[\frac{A}{m^2}\right]$

Conductividad y conductores.

Dado un material con electrones y huecos libres, en la presencia de un campo eléctrico aparece un movimiento de cargas.

La cual se asocia con una densidad de corriente de conducción al interior del conductor, cuya intensidad dependería de las propiedades físicas del material mediante la relación.

$\vec{J_c} = \sigma \vec{E}$ Donde σ es la conductividad del material en $[\Omega^{-1}/m]$ o $\left[\frac{\text{Siemens}}{m}\right] = \left[\frac{S}{m}\right]$

Para algunos materiales:

Materiales	σ (S/m)
Plata	6.17×10^7
Cobre	5.8×10^7
Oro	4.1×10^7
Aluminio	3.82×10^7
Hierro	1.03×10^7
Acero Inox	0.11×10^7
Grafito	7×10^4
Agua de Mar	$4 \sim 5$
Agua destilada	$\sim 10^{-4}$
Baquelita	

RESISTENCIA

DE LA LEY DE OHM:

$$R = \frac{V_{ab}}{I}$$

PERO SI CONOCEMOS EL CAMPO ELÉCTRICO AL INTERIOR DEL CONDUCTOR:

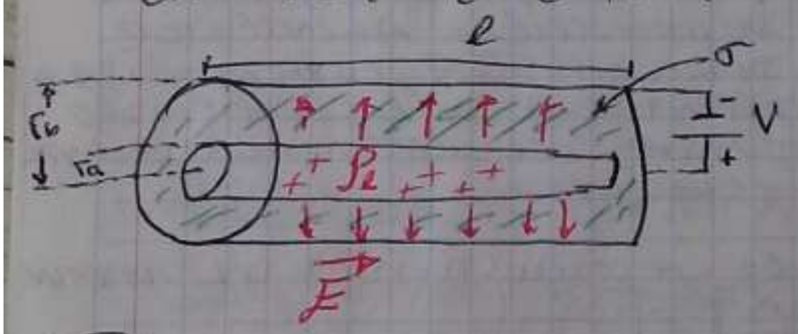
$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$I = \int_S \vec{J_0}\cdot d\vec{S} = \sigma\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \; R = \frac{-\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\sigma\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

OJO

EJEM. CALCULAR LA RESISTENCIA TOTAL DEL AISLANTE EN UN CABLE COAXIAL COMO EL MOSTRADO



SOLUCIÓN.

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

PARA EL CÁLCULO DE R EMPLEAMOS:

$d\vec{l} = dr\hat{r}$, $r = r_a$ a $r = r_b$

$d\vec{s} = r\,d\phi\,dz\,\hat{r}$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [-l/2, l/2]$

DE DONDE:

$$V_{ba} = -\int_{r_b}^{r_a} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{r_b}^{r_a} \left(\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}\right)\cdot(dr\,\hat{r}) = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon}\int_{r_b}^{r_a}\frac{dr}{r} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

$$V_{ab} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{-l/2}^{l/2}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}\right)\cdot\left(r\,d\phi\,dz\,\hat{r}\right) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}2\pi\cdot l = \frac{\rho_l l}{\varepsilon_0}$$

FINALMENTE

$$R = \frac{\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}{\sigma\left(\frac{\rho_l l}{\varepsilon_0}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}{2\pi\sigma l}\ \Omega$$

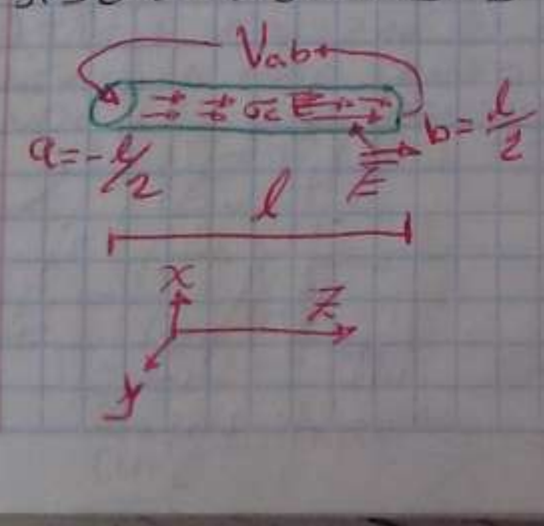
ES COMÚN QUE, PARA EL DIELÉCTRICO SE ANALICE LA CONDUCTANCIA.

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\sigma l}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}\ \Omega^{-1}$$

IGUALMENTE SE SUELE DEFINIR LA CONDUCTANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD

$$G' = \frac{G}{l} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}\left[\frac{S}{m}\right].$$

EJEM. DETERMINAR LA RESISTENCIA ENTRE LOS EXTREMOS DEL CONDUCTOR INTERNO DE UN CABLE COAXIAL SI SU CONDUCTIVIDAD ES: σ_c



SOLUCIÓN. AL SER UN MEDIO HOMOGÉNEO:

$\vec{E} = E_z \hat{z}$, CON E_z CTE.

$$-\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_{ab} = -\int_{l/2}^{-l/2} (\vec{E_z}\hat{z})\cdot(dz\,\hat{z})$$

$$V_{ab} = E_z l \qquad\qquad R = \frac{V}{I}$$

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_a} \vec{E}\cdot(r\,dr\,d\phi\,\hat{z}) = \frac{1}{2} r_a^2 \cdot 2\pi E_z = \pi r_a^2 E_z$$

$I = A E_z$, A Area seccional del conductor

ENTONCES.

$\cancel{\Delta l}$

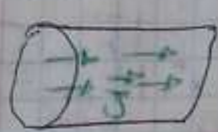
$$R = \frac{E_z l}{\sigma_c A E_z} = \frac{l}{\sigma_c A}\,\Omega$$

PARA CONDUCTORES

$$R' = \frac{R}{l} = \frac{1}{\sigma_c A}\;\frac{\Omega}{m}$$

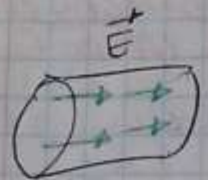
Conductores Perfectos y Dieléctricos Ideales.

Conductor Perfecto $(\sigma_c \to \infty)$



$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = 0$$ El campo eléctrico es nulo

Dieléctrico Ideal $(\sigma_c \to 0)$



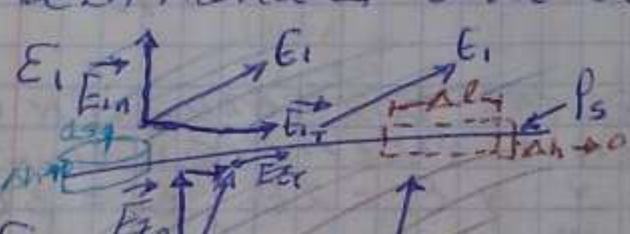
$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} = 0$$ La corriente de conducción es nulo.

Tarea 1-3

Problema 4.42, 4.43, 4.45, 4.54

Condiciones Eléctricas de Frontera

Relaciona a los campos eléctricos en ambos lados de la frontera entre dos medios



Donde cada medio presenta una distinta permitividad eléctrica ε_1 y ε_2 para los medios 1 y 2 respectivamente y se encuentran separados por una frontera que puede presentar una densidad de carga superficial ρ_s.

Para realizar el análisis en la frontera, descomponemos a cada campo en sus componentes. Tangencial y normal con respecto a la frontera.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1T} + \vec{E}_{1N}$$

$$\vec{E}_2 = \underbrace{\vec{E}_{2T}}_{\text{Tangencial}} + \underbrace{\vec{E}_{2N}}_{\text{Normal}}$$

• COMPONENTES TANGENCIALES.

DE LA FIGURA MOSTRADA, EMPLEANDO LA 2ª EC. DE MAXWELL.

$$\oint_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_{1T}\,\Delta l - E_{2T}\,\Delta l = 0 \quad \therefore \boxed{E_{1T} = E_{2T}}$$

CONDICION DE FRONTERA PARA LA TANGENCIAL DEL CAMPO ELECTRICO

COMPONENTES NORMALES

EMPLEANDO LA PRIMER EC. DE MAXWELL

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \rightarrow \cancel{E_{1N}A + E_{2N}} \rightarrow \epsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_S$$

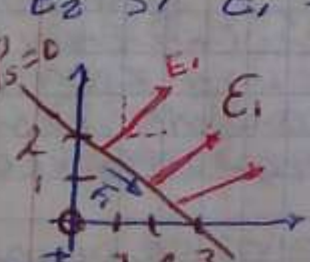
$$\varepsilon_1 E_{1N}\,\cancel{dS} - \varepsilon_2 E_{2N}\,\cancel{dS} = \rho_S\,dS \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 E_{1N} - \varepsilon_2 E_{2N} = \rho_S}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA DEL CAMPO ELÉCTRICO PARA LA COMPONENTE NORMAL A LA FRONTERA Y $\rho_S \neq 0$

SI NO EXISTE CARGA EN LA FRONTERA, $\rho_S = 0$

$\therefore \varepsilon_1 E_{1N} = \varepsilon_2 E_{2N}$

EJEM: LA FRONTERA ENTRE DOS MEDIOS EN EL PLANO ~~INCLINADO~~ INDICADO EN LA FIG. ENCONTRAR $\vec{E_2}$ SI $\vec{E_1} = 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}\ \frac{V}{m}$ Y $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$



PARA DESCOMPONER AL CAMPO EN NORMAL Y TANGENCIAL CALCULAMOS UN VECTOR NORMAL

$$\vec{n} = \vec{F_2} \times \vec{F_1} = \hat{z}\times(3\hat{x} - 2\hat{y}) = 3\hat{y} + 2\hat{x}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{3\hat{y} + 2\hat{x}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{x} + \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{y}$$

PROYECTAMOS $\vec{E}$ SOBRE $\hat{n}$

$$E_{1N} = \vec{E_1}\cdot\hat{n} = (2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z})\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\hat{x} + \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{y}\right) = \frac{4}{\sqrt{13}} + \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}}\left[\frac{V}{m}\right]$$

$$\vec{E_{1N}} = E_{1N}\,\hat{n} = \frac{10}{\sqrt{13}}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\hat{x} + \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{y}\right) = \frac{20}{13}\hat{x} + \frac{30}{13}\hat{y}$$

DADO QUE: $\vec{E_1} = \vec{E_{1N}} + \vec{E_{1T}} \Rightarrow \vec{E_{1T}} = \vec{E_1} - \vec{E_{1N}}$

$$E_{1T} = 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z} - \frac{20}{13}\hat{x} - \frac{30}{13}\hat{y} = \frac{6}{13}\hat{x} - \frac{4}{13}\hat{y} + \hat{z}$$

POR CONDICIONES DE FRONTERA,

$$\vec{E_{2T}} = \vec{E_{1T}} = \frac{6}{13}\hat{x} - \frac{4}{13}\hat{y} + \hat{z}$$

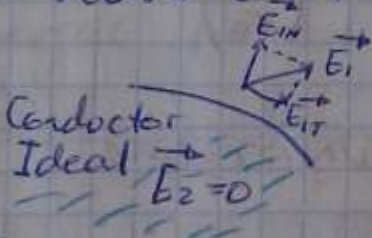
$$\vec{E_{2N}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\vec{E_{1N}} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{20}{13}\hat{x} + \frac{30}{13}\hat{y}\right)$$

$$\vec{E_{2N}} = \frac{40}{39}\hat{x} + \frac{60}{39}\hat{y}$$

$$\vec{E_2} = \vec{E_{2N}} + \vec{E_{2T}} \Rightarrow$$

$$\vec{E_2} = \frac{58}{39}\hat{x} + \frac{48}{39}\hat{y} + \hat{z} \left[\frac{V}{m}\right]$$

FRONTERA DE DIELÉCTRICO Y CONDUCTOR IDEAL



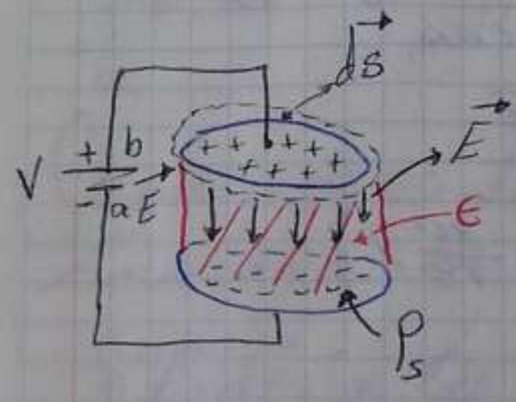
EN LA FRONTERA: $\vec{E_{1T}} = 0$

$$\varepsilon_1 E_{1N} = \rho_s \rightarrow E_{1N} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

ES DECIR QUE, EN LA FRONTERA CONDUCTOR IDEAL-DIELÉCTRICO EL CAMPO ELÉCTRICO ES NORMAL A LA SUPERFICIE DEL CONDUCTOR.

CAPACITANCIA.

UN CAPACITOR SE FORMA AL TENER DOS CONDUCTORES SEPARADOS POR UN DIELÉCTRICO



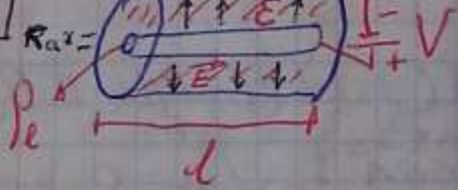
DEFINIMOS LA CAPACITANCIA CON LA SIG RELACIÓN

$$C = \frac{Q}{V}$$

EN TÉRMINOS DEL CAMPO ELÉCTRICO

$$C = \frac{\epsilon_0 \int_s \vec{E} \cdot \vec{ds}}{-\int_L \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$

EJEMPLO. DETERMINAR LA CAPACITANCIA ASOCIADA A UN CABLE COAXIAL:



SOLUCIÓN. DE CÁLCULOS ANTERIORES

$$V_{ba} = \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

SUPONIENDO QUE UNA DENSIDAD UNIFORME

$$Q = \rho_e l$$

ENTONCES.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{\rho_e} l}{\frac{\cancel{\rho_e}}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} \; F$$

DEFINIMOS LA CAPACITANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD

$$C' = \frac{C}{l}$$

PARA EL CABLE COAXIAL:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} \left(\frac{F}{m}\right)$$

NOTAMOS QUE: AL MULTIPLICARLA

$$\left(R = \frac{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}{2\pi\sigma l}\,\Omega\right)\left(C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}\,F\right) = RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[\frac{1}{S}\right]$$

RELACIÓN ENTRE σ Y ε DEL DIELÉCTRICO EN UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

EJEM: DETERMINAR LA CAPACITANCIA DE UN CONDUCTOR DE PLACAS PLANAS DE ÁREA A CON SEPARACIÓN ENTRE LOS CONDUCTORES d Y EL DIELÉCTRICO CON PERMITIVIDAD ε.

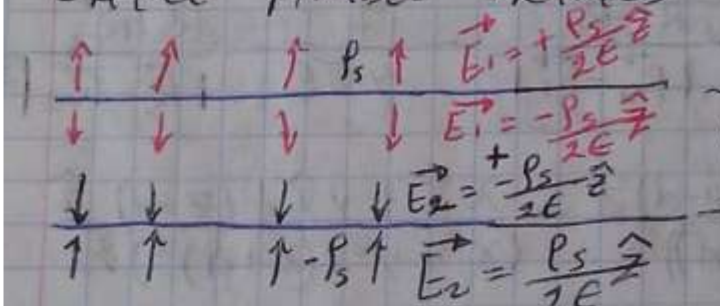
SOLUCIÓN: DE LA ECUACIÓN PARA UN DISCO DE CARGA.

$$\vec{E} = \pm\frac{\rho_s}{2\varepsilon}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{z}$$

PARA EL CASO EN EL CUAL $z \ll a$

$$\vec{E} = \pm\frac{\rho_s}{2\varepsilon}\hat{z}$$

ENTRE AMBOS PLANOS CONDUCTORES.



$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}z$$

SUPONIENDO UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA UNIFORME

$$\rho_s = \frac{Q}{A}$$

CAPACITANCIA

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s A}{\frac{\rho_s}{\varepsilon}d} = \frac{\varepsilon A}{d}\,F$$

CALCULAMOS EL VOLTAJE

$$V = -\int \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_0^d\left(-\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{z}\right)\cdot(dz\,\hat{z}) = \frac{\rho_s}{\varepsilon}d$$

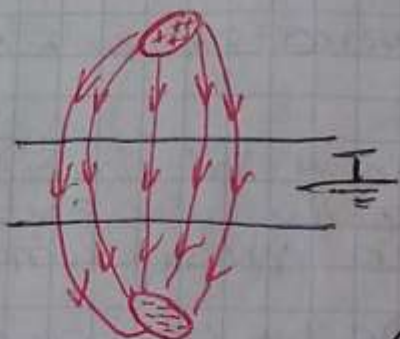
VOLTAJE

$$\therefore\ V = \frac{\rho_s}{\varepsilon}d$$

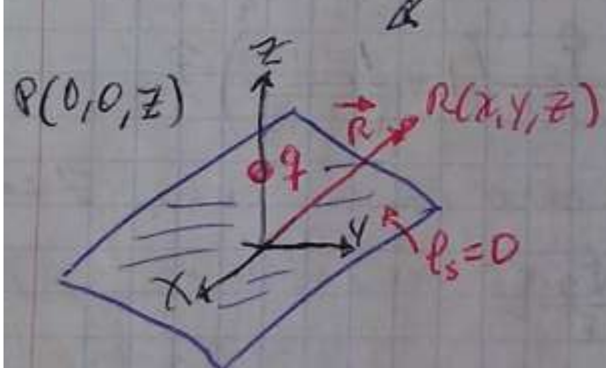
MÉTODO DE LA IMAGEN

AQUI EXAM.

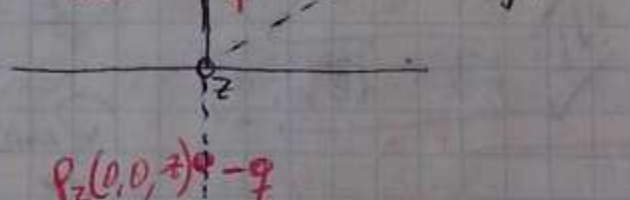
ESTE MÉTODO PERMITE DETERMINAR EL CAMPO ELÉCTRICO ASOCIADO A UN CAMPO CARGADO EN LA PRESENCIA DE UN PLANO INFINITO CONDUCTOR DE CARGA NULA.



EJEMPLO: EMPLEAR EL MÉTODO DE LA IMAGEN PARA CALCULAR EL CAMPO ELÉCTRICO ASOCIADO A UNA CARGA PUNTUAL q SITUADA EN EL PUNTO $P(0,0,Z)$ SI EL PLANO XY ES UN CONDUCTOR INFINITO CON CARGA NULA



SOLUCIÓN.



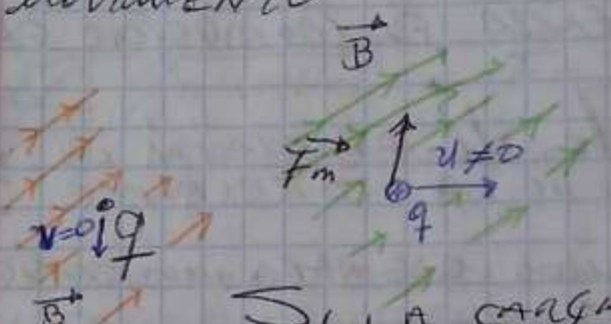
$$\vec{E}(R) = \vec{E}_q + \vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon}\cdot\frac{\vec{R}-\vec{R}_1}{|\vec{R}-\vec{R}_1|^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon}\cdot\frac{\vec{R}-\vec{R}_2}{|\vec{R}-\vec{R}_2|^3}$$

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z-d)\hat{z}}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}} - \frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z+d)\hat{z}}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}}\right)$$

CAMPOS MAGNÉTICOS INVARIANTES.

FUERZA MAGNÉTICA.

EL CAMPO MAGNÉTICO SE DESCRIBE A PARTIR DE LA DENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$ (T), EL CUAL PRODUCE UNA FUERZA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS EN MOVIMIENTO



$$\boxed{\vec{F_m} = q\,\vec{u} \times \vec{B}}$$ FUERZA MAGNÉTICA

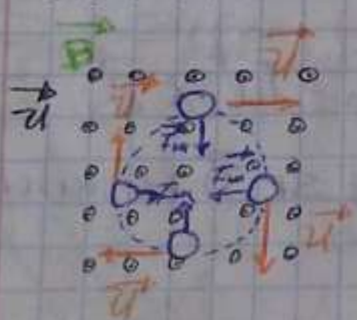
DONDE $\vec{u}$ ES LA VELOCIDAD DE LA CARGA

SI LA CARGA SE ENCUENTRA EN PRESENCIA DE UN CAMPO ELÉCTRICO Y UN CAMPO MAGNÉTICO EXPERIMENTARÁ UNA FUERZA ELECTROMAGNÉTICA

$$\vec{F_{EM}} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

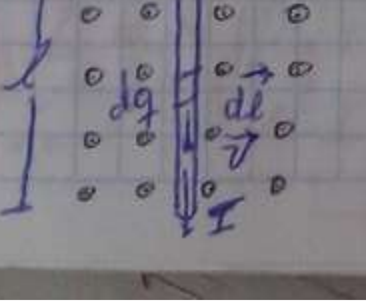
TAMBIÉN CONOCIDA COMO FUERZA DE LORENTZ

LA FUERZA MAGNÉTICA, A DIFERENCIA DE LA FUERZA ELÉCTRICA, NO EJERCE NINGÚN TRABAJO SOBRE LA CARGA, YA QUE:



$$W_m = \oint \underbrace{\vec{F_m} \cdot \vec{dl}}_{\text{ORTOGONALES}} = 0$$

FUERZA MAGNÉTICA EN UN CONDUCTOR QUE TRANSPORTA CORRIENTE.



EN UN CONDUCTOR, QUE TRANSPORTA UNA CORRIENTE $I = \frac{dq}{dt}$, CADA DIFERENCIAL DE CARGA SE MUEVE CON UNA VELOCIDAD

$$\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt}$$

∴ CADA CARGA DIFERENCIAL EXPERIMENTA UNA FUERZA MAGNÉTICA DIFERENCIAL

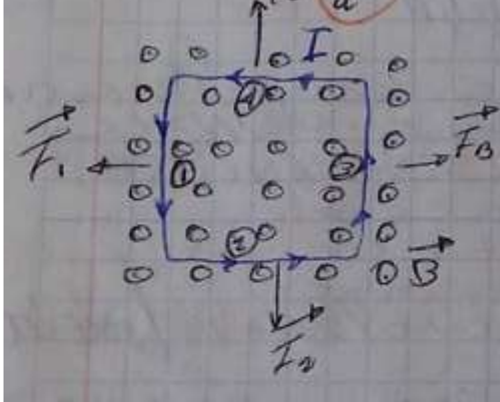
$$d\vec{F}_m = dq\,\vec{v} \times \vec{B} = dq\,\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \qquad \frac{dq}{dt} = I$$

$$\boxed{d\vec{F}_m = I\,d\vec{l} \times \vec{B}}$$

LA FUERZA QUE EXPERIMENTA EL CONDUCTOR ES:

$$\vec{F}_m = I \int_l d\vec{l} \times \vec{B}$$

donde $d\vec{l}$ APUNTA EN LA DIRECCIÓN DE LA CORRIENTE I



NOTEMOS QUE PARA UNA TRAYECTORIA CERRADA.

$$\vec{F}_m = I \oint_l d\vec{l} \times \vec{B} = 0$$

(SI EL CAMPO $\vec{B}$ ES UNIFORME)

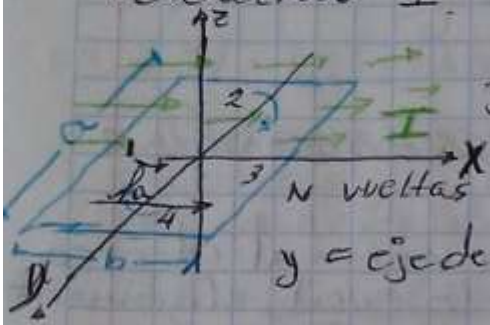
FUERZA EN LA PRESENCIA DE UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

EN ESTE CASO $\quad \vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B}$

FUERZA MAGNÉTICA SI $\vec{B}$ ES UNIFORME.

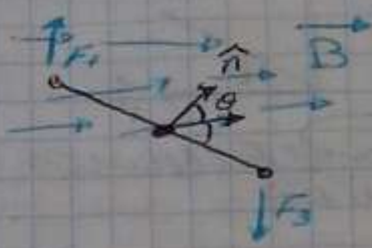
MOMENTO DE FUERZAS EN N ESPIRAS

CONSIDEREMOS UNA BOBINA DE N ESPIRAS COMO LA MOSTRADA EN LA FIGURA LA CUAL TRANSPORTA UNA CORRIENTE I.



$B = B_0 \hat{x}$

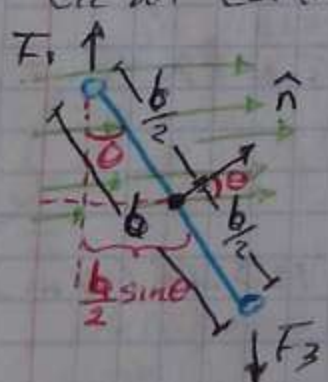
$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$



ASUMIENDO QUE EL CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B} = B_0 \hat{x}$ ES UNIFORME, LA FUERZA EXPERIMENTADA EN LOS CONDUCTORES SON:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{F_1} &= I(-a\hat{y} \times B_0\hat{x}) = I a B_0 \hat{z} \\
\vec{F_4} &= I(\vec{l_4} \times B_0\hat{x}) = I b B_0 \sin(90° - \theta)\hat{y} \\
\vec{F_3} &= I(a\hat{y} \times B_0\hat{x}) = -I a B_0 \hat{z} \\
\vec{F_2} &= I(\vec{l_2} \times B_0\hat{x}) = -I b B_0 \sin(90° - \theta)\hat{y}
\end{aligned}\right\} \sum F_i = 0$$

SI BIEN LA SUMA DE FUERZA NULA, LAS FUERZAS $\vec{F_1}$ Y $\vec{F_3}$ PROVOCAN UN MOMENTO DE FUERZA (O TORQUE) EN LA ESPIRA:



$\vec{B} = B_0 \hat{x}$

$\vec{\tau_1} = \vec{d_1} \times \vec{F_1} = \frac{b}{2} \sin\theta \, I a B_0 \hat{y}$

$\vec{\tau_3} = \vec{d_3} \times \vec{F_3} = \frac{b}{2} \sin\theta \, I a B_0 \hat{y}$

τ_2 y $\tau_4 = 0$

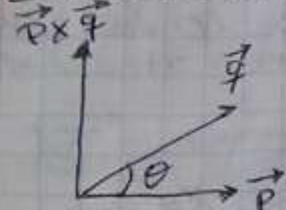
EL MOMENTO DE FUERZAS TOTAL ES:

$$\vec{\tau} = N(\vec{\tau_1} + \vec{\tau_3}) = N I a \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) B_0 \sin\theta \hat{y} = N I \underbrace{ab}_{A = \text{Area}} B_0 \sin\theta \hat{y}$$

$$\therefore \vec{\tau} = N I A B_0 \sin\theta \hat{y}$$

OJO

Si notamos que:



$$\vec{p}\times\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta\,\hat{n}$$

DEFINIMOS AL MOMENTO MAGNÉTICO DE LA ESPIRA

$m = NIA\hat{n}$ con $\hat{n}$ un vector normal al area de la espira, de lo cual, el momento de fuerzas que experimenta una espira en un campo magnético uniforme es:

$$\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$$

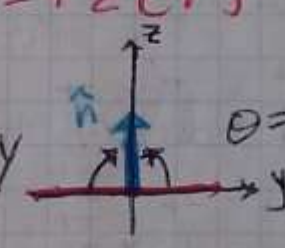
Esta expresión es válida para cualquier espira de cualquier forma plana y cualquier campo magnético uniforme.

EL VECTOR $\hat{n}$ DEBE CUMPLIR LA REGLA DE LA MANO DERECHA. EN RELACION DE LA CORRIENTE I.

EJEMPLO. DETERMINAR EL MOMENTO DE FUERZA QUE EXPERIMENTA UNA ESPIRA EN LAS POSICIONES MOSTRADAS. SI:

$r = 20$ cm, $I = 10$ A $N = 50$

$\vec{B} = 4\hat{z}\,(T)$

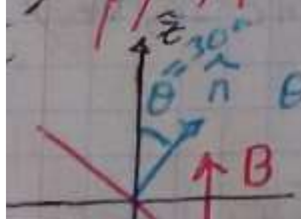


$\theta = 0$

$$N\cdot I\cdot \pi r^2$$

$$\vec{m} = (50)(10)(\pi(0.2)^2) = 62.83\,\hat{z}$$

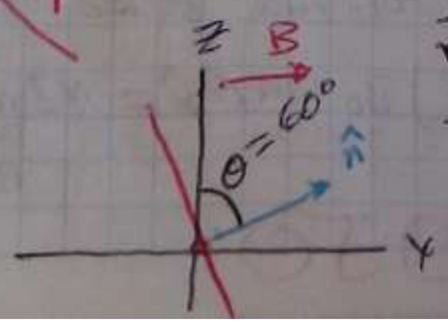
$$\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B} = 62.83\,\hat{z}\times 4\hat{z} = 0$$



$\theta = 30°$

$$\vec{m} = 62.83$$

$$\vec{\tau} = (62.83)(4)(\sin 30°) = 125.66\,(N\,m)$$



$$\vec{m} = 62.83$$

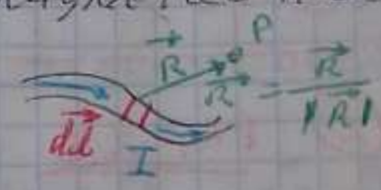
$$\vec{\tau} = (62.83)(4)(\sin 60°) = 217.64\,\hat{x}\,[N\,m]$$

MOMENTO DE FUERZA EN N ESPIRAS

REVISAR LA LEY DE BIOT-SAVART CAP 5-2 PAG 213 DEL LIBRO DE FAWAZ ULABY.

LEY DE BIOT-SAVART

DADA UNA CORRIENTE ELECTRICA QUE CIRCULA POR UN CONDUCTOR, EL CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO ESTÁ DADO POR LA RELACIÓN.



$$\vec{dH} = \frac{I}{4\pi}\frac{\vec{dl}\times\hat{R}}{R^2}$$

$$\vec{dH} = \frac{I}{4\pi}\frac{\vec{dl}\times\vec{R}}{|R|^3}$$

DONDE H: INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO $\left(\frac{A}{m}\right)$

$$B = \mu \vec{H}$$

μ: PERMEABILIDAD DEL MEDIO MAGNÉTICA $\left(\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\frac{H}{m}\right)$

EJEM: DADO UN ANILLO DE RADIO a SOBRE EL PLANO XY CENTRADO EN EL ORIGEN QUE TRANSPORTA UNA CORRIENTE I COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA DETERMINAR EL CAMPO MAGNÉTICO $\vec{H}$ EN CUALQUIER PUNTO SOBRE EL EJE Z

PAG 216

SOLUCIÓN:

$$\vec{dl} = r\,d\phi\,\hat{\phi} \quad \text{SI } r=a \Rightarrow \vec{dl} = a\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$\vec{R} = -a\hat{r} + z\hat{z}$$

$$\vec{dl}\times\vec{R} = a^2 d\phi\,\hat{z} + az\,d\phi\,\hat{r}$$

$$\vec{dH} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{a^2 d\phi\,\hat{z} + az\,d\phi\,\hat{r}}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{\vec{dl}\times\vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

INTEGRANDO $\quad \vec{dH} = d\vec{H_z} + d\vec{H_r}$

$$d\vec{H_z} = \frac{I a^2 d\phi}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \qquad \vec{H_z} = \int \frac{I a^2 d\phi}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

$$d\vec{H_r} = \frac{I a z\, d\phi}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{r} \qquad \vec{H_r} = \int d\vec{H_r} = 0$$

PORQUE NO DEPENDE DE ϕ SINO DE z

$$\hat{r} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,y = 0$$

FINALMENTE.

$$\boxed{\vec{H}(0,0,z) = \frac{I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}\ \frac{A}{m}}$$ OJO

CAMPO MAGNÉTICO EN EL EJE DE LA ESPIRA CIRCULAR

$$\boxed{\vec{B}(0,0,z) = \frac{I a^2 \mu}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{z}\ (T)}$$ OJO

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m

EJEMPLO 2 PAG 216

DETERMINAR EL CAMPO MAGNÉTICO EN EL PUNTO INDICADO DADO EL CONDUCTOR EN FORMA DE REBANADA DE PASTEL DE LA FIG.

SOLUCIÓN.

1. $\vec{dl}_1 = dr\,\hat{r}$
$\vec{R}_1 = -a\,\hat{r}$
$\vec{dl}_1 \times \vec{R}_1 = 0$

3. $\vec{dl} = -dr\,\hat{r}$
$\vec{R}_3 = -a\,\hat{r}$
$\vec{dl}_3 \times \vec{R}_3 = 0$

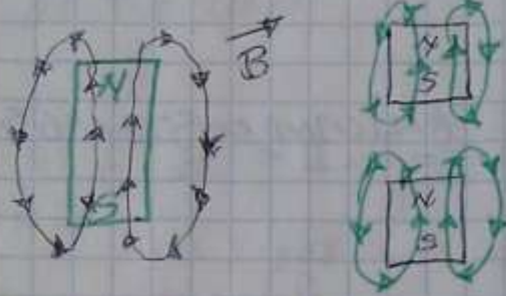
2. $\vec{dl}_2 = a\,d\phi\,\hat{\phi}$
$\vec{R}_2 = -a\,\hat{r}$
$\vec{dl}_2 \times \vec{R}_2 = a^2\,d\phi\,\hat{z}$

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{\vec{dl}\times\vec{R}}{R^3} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{a^2\,d\phi}{a^3}\,\hat{z} = \frac{I}{4\pi a}\,d\phi\,\hat{z}$$

$$H = \frac{I}{4\pi a}\int_{\phi_0}^{\phi_0+\phi_1} d\phi\,\hat{z}$$

$$H = \frac{I\phi_1}{4\pi a}\,\hat{z}$$

LEY DE GAUSS PARA MAGNETISMO



SIEMPRE ESTÁN ASOCIADOS EL POLO NORTE Y POLO SUR

$$\boxed{\Phi_{MAGNÉTICO} = \oint \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0}$$

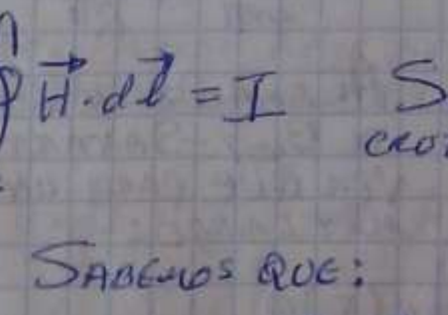
SI EMPLEAMOS EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA:

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = \int_V (\nabla\cdot\vec{B})\,dV = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$$ 3a EC. de MAXWELL

TAREA LEER CAP 5-4.2 LEY DE AMPERE.

LEY DE AMPERE

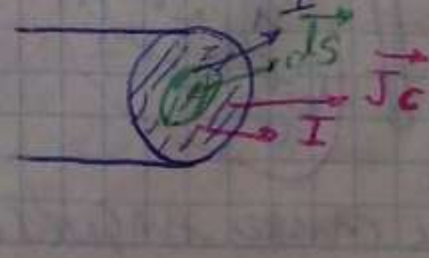
DADA UNA CORRIENTE ELÉCTRICA Y UN CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO LA LEY DE AMPERE ESTABLECE QUE:



LA INTEGRAL CERRADA DE LÍNEA DEL CAMPO MAGNÉTICO SERÁ IGUAL A LA CORRIENTE QUE ATRAVIESA LA SUPERFICIE DELIMITADA POR DICHA TRAYECTORIA Y SU SIGNO RESPETA LA REGLA MANO DE

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = I$$

SI ANALIZAMOS LA CORRIENTE QUE CRUZA LA SUPERFICIE:



SABEMOS QUE:

$$I' = \int_S \vec{J_c}\cdot\vec{ds}$$

DONDE $\vec{J}_c$ ES LA DENSIDAD DE CORRIENTE DE CONDUCCIÓN EN EL MEDIO

ENTONCES

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = I' = \int_S \vec{J}_c \cdot \vec{ds} \quad \text{APLICANDO STOKES}$$

$$\int_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_S (\nabla\times\vec{H})\cdot\vec{ds} = \int_S \vec{J}_c\cdot\vec{ds}$$

ENTONCES PARA CUALQUIER PUNTO EN EL ESPACIO

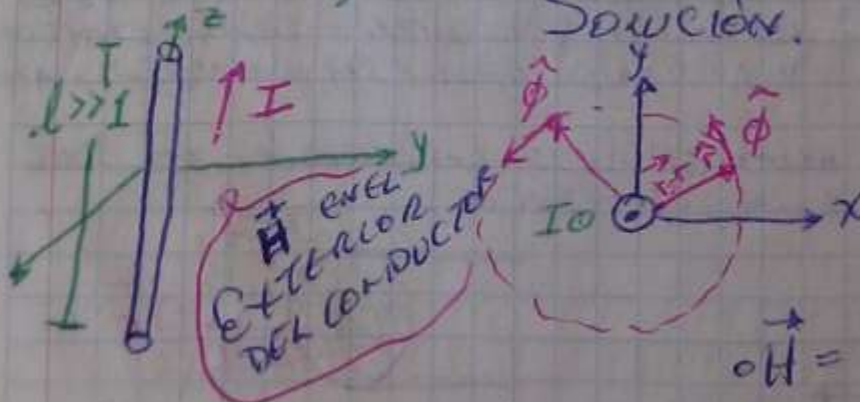
$$\boxed{\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_c = \sigma\vec{E}}$$

4ª EC. DE MAXWELL O LA LEY DE AMPÈRE EN FORMA DIFERENCIAL

EMPLEO DE LA LEY DE AMPERE

La ley de Ampere, EN FORMA SIMILAR A GAUSS PERMITE CALCULAR UN CAMPO MAGNÉTICO BAJO CIERTAS CONDICIONES DE SIMETRÍA CON RESPECTO DE LA TRAYECTORIA CERRADA ELEGIDA. CONTORNO AMPERIANO Y DE QUE EL CAMPO MAGNÉTICO SEA CTE EN CONTORNO

EJEM. DETERMINAR CON AMPERE EL CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO $\vec{H}$ A UN CONDUCTOR RECTO MUY LARGO SITUADO EN EL EJE Z, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA



SOLUCIÓN.

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{\vec{dl}\times\vec{R}}{R^3}$$

AL ANALIZAR LA LEY DE BIOT-SAVART, PODEMOS VER QUE PARA UN CONDUCTOR MUY LARGO:

$$\circ\ \vec{H} = H_\phi(r)\hat{\phi}$$

- EL CAMPO MAGNÉTICO PERMANECERÁ CTE PARA UNA DISTANCIA r CTE.

ELEGIMOS UN CONTORNO AMPERIANO CIRCULAR DE RADIO r:

$$\vec{dl} = r\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = I \Rightarrow \int_0^{2\pi} (H_\phi(r)\,\hat{\phi})\cdot(r\,d\phi\,\hat{\phi})$$

$$= H_\phi(r)\,r\int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi(r)\,r\cdot 2\pi = I.$$

$$H_\phi(r) = \frac{I}{2\pi r}$$ $\therefore$ EL CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO AL CONDUCTOR ES

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{\phi}}$$ OJO $\left[\frac{A}{m}\right]$

LA DENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\hat{\phi}}$$ OJO

SOLUCIÓN: 5.2 PAG 214.

EJEMPLO 2 DETERMINAR EL CAMPO MAGNÉTICO AL INTERIOR DEL MISMO CONDUCTOR CILÍNDRICO SI PRESENTA UN RADIO a Y UNA PERMEABILIDAD MAGNÉTICA μ_c

SOLUCIÓN NUEVAMENTE

$$\vec{H} = \vec{H}_\phi(r) = H_\phi(r)\,\hat{\phi}$$

APLICAMOS LEY DE AMPERE EN LA TRAYECTORIA CERRADA AL INTERIOR DEL CONDUCTOR:

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I' \Rightarrow \frac{A_{cond}}{A_c'} = \frac{I}{I'} \Rightarrow I\cdot\frac{A_c'}{A_{cond}}.$$

$$\int_0^{2\pi} H_\phi(r)\,r\,d\phi = I\cdot\frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{I r^2}{a^2} \therefore$$

$$H_\phi(r) = \frac{I \cdot r}{2\pi a^2} \quad \therefore$$

$$\vec{H} = \frac{I r}{2\pi a^2}\hat{\phi}, \quad r \in [0, a)$$

Y LA DENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$ ES:

$$B = \mu_c \vec{H} = \mu_c \frac{I r}{2\pi a^2}\hat{\phi}, \quad r \in [0, a)$$

EJEMPLO: DETERMINAR SI EL CONDUCTOR PRESENTA UNA CONDUCTIVIDAD σ_c PARA EL EJEMPLO ANTERIOR, EL CAMPO ELÉCTRICO ASOCIADO AL INTERIOR Y AL EXTERIOR DEL CONDUCTOR.

$$\vec{J_c} = \sigma_c \vec{E} = \nabla \times \vec{H}$$

SOLUCIÓN

$$\vec{E} = \frac{\vec{J_c}}{\sigma_c} = \frac{1}{\sigma_c}\nabla \times \vec{H}$$

CILINDRICAS

OJO

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial H_z}{\partial \phi}} - \cancel{\frac{\partial H_\phi}{\partial z}}\right)\hat{r} + \left(\cancel{\frac{\partial H_r}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial r}}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} - \cancel{\frac{\partial H_r}{\partial \phi}}\right)\hat{z}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r I r}{2\pi a^2}\right)\right)\hat{z} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{I}{\pi \sigma_c a^2}\hat{z}$$

CAMPO ELÉCTRICO AL INTERIOR DEL CONDUCTOR

$\vec{H}$ y $\vec{E}$ SON ORTOGONALES

EJERCICIO:

CALCULAR EL CAMPO ELÉCTRICO AL EXTERIOR DEL CONDUCTOR (EL MEDIO EXTERNO ES

$$E = 0.$$

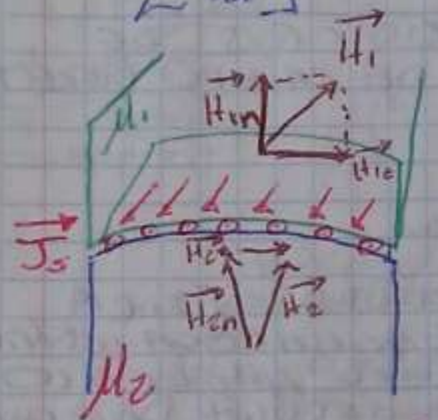
TAREAS: 5.3, 5.4, 5.5, 5.9, 5.11, 5.13, 5.19, 5.21
5.23, 5.32, 5.36

EXAMEN MIERCOLES 17.

CONDICIONES MAGNÉTICAS DE FRONTERA

CONSIDEREMOS DOS MATERIALES CON DIFERENTE PERMITIVIDAD MAGNÉTICA COMO LOS MOSTRADOS EN LA FIGURA ENTRE LOS CUALES PUEDE FLUIR UNA CIERTA DENSIDAD DE CORRIENTE SUPERFICIAL

$\vec{J_s}\left[\frac{A}{m}\right]$

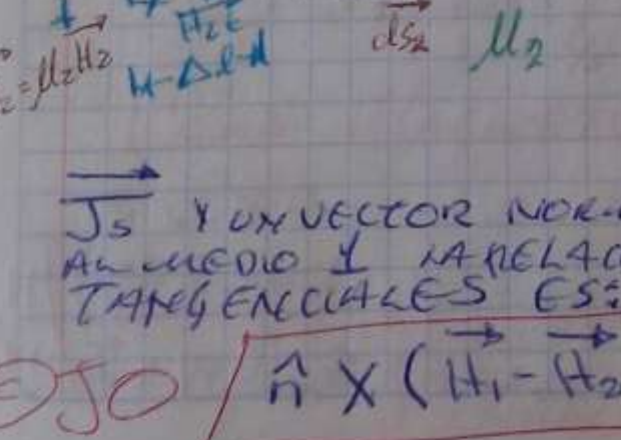


LA DENSIDAD DE CORRIENTE SUPERFICIAL $\vec{J_s}$ SE DEFINE COMO LA CANTIDAD DE CORRIENTE dI QUE CIRCULA POR UNIDAD TRANSVERSAL DE LONGITUD dl EN UNA SUPERFICIE

$$\vec{J_s} = \frac{dI}{dl}\hat{u} \quad \frac{A}{m}$$

DONDE $I = \int J_s dl$

SI CONSIDERAMOS LA FRONTERA Y LAS COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL DE LOS CAMPOS MAGNÉTICOS:



DE LA LEY DE AMPERE

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I$$

$$\underbrace{H_{2t}\Delta l}_{\text{MEDIO 2}} - \underbrace{H_{1t}\Delta l}_{\text{MEDIO 1}} = \underbrace{J_s \Delta l}_{\text{CORRIENTE ENCERRADA}}$$

$\vec{J_s}$ Y UN VECTOR NORMAL $\hat{n}$ QUE VIAJA DEL MEDIO 2 AL MEDIO 1 LA RELACIÓN ENTRE LOS CAMPOS TANGENCIALES ES:

OJO $\boxed{\hat{n} \times (\vec{H_1} - \vec{H_2}) = \vec{J_s}}$ CONDICIÓN DE FRONTERA PARA LAS COMPONENTES TANGENCIALES.

EN EL CASO EN EL QUE $\vec{J_s} = 0 \Rightarrow \vec{H_{2t}} = \vec{H_{1t}}$

DE LA LEY DE GAUSS.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{1n} \cancel{\Delta S} - B_{2n} \cancel{\Delta S} = 0$$

$$B_{1N} = B_{2N} \quad \text{si } \vec{B} = \mu \vec{H}$$

CONDICIÓN DE FRONTERA PARA COMPONENTES NORMAL DE CAMPO MAGNÉTICO $\boxed{\mu_1 \vec{H_{1n}} = \mu_2 \vec{H_{2n}}}$ OJO

LA APLICACIÓN DE ESTAS CONDICIONES DE FRONTERA ES SIMILAR AL CASO DE CAMPO DIELÉCTRICO

INDUCTANCIA

LA INDUCTANCIA ES AQUELLA CANTIDAD FÍSICA QUE DESCRIBE LA CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN FORMA DE CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO A UNA CORRIENTE QUE CIRCULA POR UN CONDUCTOR

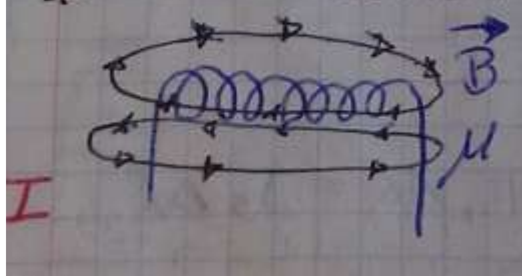
$$L = \frac{\Lambda}{I} [H]$$

DONDE: Λ FLUJO MAGNÉTICO ENLAZADO

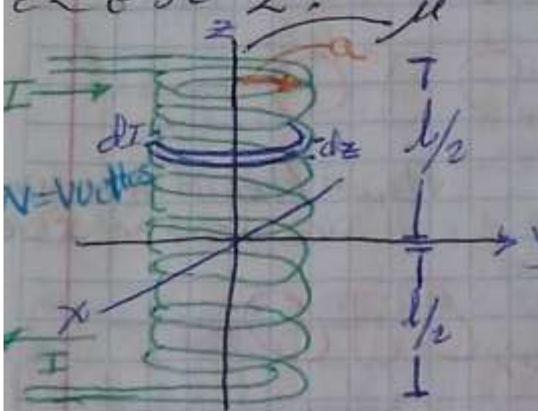
$$\Lambda = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

N = NÚMERO DE VUELTAS EN CASO DE SER UN EMBOBINADO (ó N=1 SI ES UN ÚNICO CONDUCTOR)

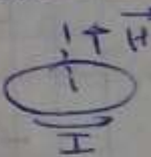
I = CORRIENTE ELÉCTRICA



Considere el solenoide de la fig, el cual está conformado por un conductor de N vueltas en una disposición cilíndrica y con un núcleo de permeabilidad magnética μ, radio a y altura l centrado en xy con el eje del solenoide sobre el eje z.

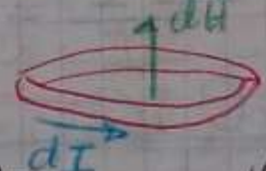


Sabemos que, para un anillo



$$\vec{H} = \frac{I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

de altura diferencial dz que transporta una corriente dI



Si suponemos que el campo magnético es aproximadamente uniforme al interior del anillo:

$$\vec{dH} = \frac{a^2 dI}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \text{donde} \quad dI = \frac{N}{l} I \, d\hat{z}$$

Numero de vueltas
Corriente efectiva
long, total del cable

Al interior del solenoide

$$\vec{dH} = \frac{a^2 N I \, dz}{2l(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Integramos para obtener el campo magnético al interior del solenoide

$$H = \frac{a^2 N I}{2l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

050

Mediante cambio de variable:

$$\vec{H} = \frac{a^2 N I}{2l} \cdot \frac{z}{a^2\sqrt{z^2+a^2}} \Bigg|_{-l/2}^{l/2} \hat{z} = \frac{NI}{2l}\left[\frac{l}{\sqrt{\frac{l^2}{4}+a^2}}\right] z = \vec{H} = \frac{NI}{\sqrt{l^2+4a^2}} \hat{z}$$

Campo magnético al interior del solenoide

Si $l \gg a$

$$\sqrt{l^2+4a^2} \approx l$$

$$\vec{H} = \frac{NI}{l} \hat{z}$$ } para un solenoide largo

AQUI 2DO EXAM

Para el cálculo de la inductancia:

$$L = \frac{\Lambda}{I} \qquad \Lambda = N\int \vec{B}\cdot d\vec{S}\ , \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\Lambda = N\int \mu\left(\frac{NI}{l}\hat{z}\right)\cdot\left(r\,dr\,d\phi\,\hat{z}\right)$$

$$\Lambda = \mu \frac{N^2 I A_{sol}}{l}\ [Wb]$$

OJO

A_{sol} = Area transversal del solenoide

Finalmente:

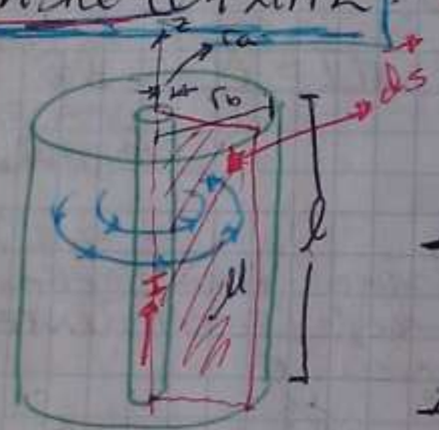
$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu N^2 A_{sol}}{l}\ [H]$$

OJO

Ejem OJO

Cable coaxial.

$$d\vec{S} = dr\,dz\,\hat{\phi}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\hat{\phi}$$

$$\Lambda = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{-l/2}^{l/2}\int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{\mu I}{2\pi r}\phi\right)\cdot\left(dr\,dz\,\hat{\phi}\right)$$

$$\Lambda = \frac{\mu I l}{2\pi}\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

OJO

$$L = \frac{\Lambda}{I}$$

$$L = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) H$$

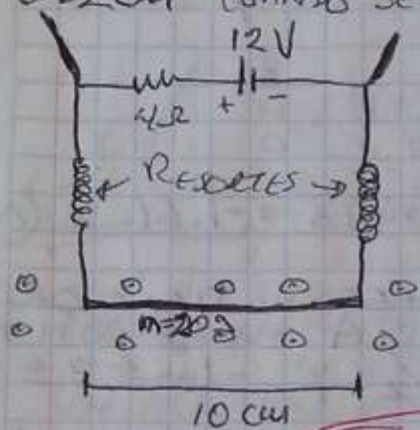
OJO Inductancia de un cable coaxial

Definimos la inductancia por unidad de longitud

$L' = \frac{L}{l}$. Si es cable coaxial: $L' = \frac{\mu \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}{2\pi}\left[\frac{H}{m}\right]$

TAREA
5.3, 5.4, 5.5, 5.9, 5.11, 5.13, 5.19, 5.21, 5.23, 5.32, 5.36

5.3 EN SIG CTO UTILIZA DOS RESORTES IDÉNTICOS PARA SOPORTAR UN ALAMBRE HORIZONTAL DE 10 cm DE LARGO CON MASA DE 20g.
SIN CAMPO MAGNÉTICO EL PESO DEL ALAMBRE HACE QUE LOS RESORTES SE ALARGUEN CADA UNO UNA DISTANCIA DE 0.2 CM CUANDO SE ACTIVA CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EL LA REGIÓN, LOS RESORTES SE ALARGAN 0.5 cm



¿CUAL ES LA INTENSIDAD DEL FLUJO MAGNÉTICO B?

LA EC. DE FUERZA PARA EL RESORTE ES $F = Kd$ DONDE K ES LA CTE DEL RESORTE Y d LA DISTANCIA QUE SE HA ALARGADO.

OJO CAMPO Y FLUJO MAGNÉTICO ES IGUAL

DESPEJANDO $K = \frac{mg}{2d}$

SABEMOS QUE $F = Kd = \frac{1}{2}mg$

$K = \frac{(20\times10^{-3})(9.8)}{(2)(2\times10^{-3})} = 0.49$ N/m PARA LOS PRIMEROS 0.2 cm

SÓLO MULTIPLICAMOS POR LOS 0.5 cm EXTRAS $F = (K)(0.5) = 245$ mN
TAMBIÉN SABEMOS QUE $F_m = I\ell \times B$ CON ℓ Y B SON RECTOS
ENTONCES SI YA SABEMOS $F_m = 245$ mN $\ell = 10$ cm
Y QUEREMOS SABER B SÓLO NOS FALTA SABER LA I.
SABEMOS QUE $I = \frac{V}{R} = \frac{12V}{4\Omega} = 3A$.

$\therefore$ $F_m = |I||\ell||B|$ DESPEJANDO $B = \frac{F_m}{I\ell} = \frac{(245\times10^{-3})}{(3A)(1\times10^{-1})} = 0.81T$

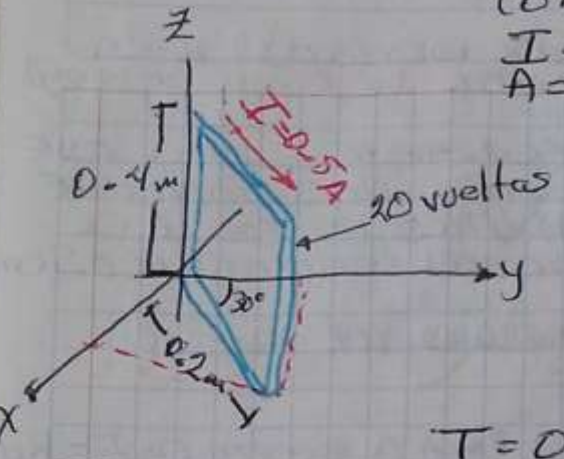
PROBLEMA 5.4

LA ESPIRA DE LA FIG. SE COMPONE DE 20 VUELTAS Y ESTÁ ENGOZNADA (¿QUÉ (?:)) SOBRE Z Y ∢30° CON Y
$I = 0.5A$
¿CUAL ES LA MAGNITUD DEL MOMENTO DE TORSIÓN EJERCIDA EN LA ESPIRA CON UN CAMPO UNIFORME $B = 2.4\hat{y}$ T
CUANDO SE OBSERVA DESDE ARRIBA ¿LA DIRECCIÓN DE ROTACIÓN ES EN SENTIDO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ?

SABEMOS QUE EL TORQUE MAGNETIC

SE DESCRIBE COMO $\boxed{T = m \times B}$ OJO

CON $m = N I A \hat{n}$



$I = 0.5A \quad N = 20$ vueltas Y $A = b \times h =$

$A = (0.2m)(0.4m) = 0.08 m^2$

$\hat{n} = -\cos 30° \hat{x} + \sin 30° \hat{y}$

$m = \hat{n}(0.8) \qquad B = 2.4 \hat{y}$

	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$
m	$-\cos 30(0.8)$	$\sin 30(0.8)$	0
B	0	2.4	0

$T = 0 + 0 - \cos 30(0.8)(2.4)\hat{z} = -1.66 \hat{z}\ (N \cdot m)$

PROBLEMA 5.5 EN UN SIST. DE COORD. CILÍNDRICAS UN ALAMBRE DE $2m = l$, $I = 5A$ EN $\hat{z}$ POSITIVA LOCALIZADO EN $r = 4cm$, $\phi = \pi/2$ Y $-1m \leq z \leq 1m$

a) SI $B = 0.2\cos\phi\,\hat{r}$ CUAL ES LA FUERZA MAG DEL ALAMBRE? ($F = I l \times B$ = FUERZA MAGNÉTICA)

b) CUANTO TRABAJO PARA GIRAR EL ALAMBRE 1 VEZ SOBRE $\hat{z}$ EN DIRECCIÓN ϕ NEGATIVA CON $r = 4$ CMS

c) A QUE ÁNGULO ϕ ES MÁXIMA LA FUERZA?

SABEMOS QUE $F = I l \times B$ OJO $\quad I = 5A \quad l = 2\hat{z} \quad B = 0.2\cos\phi\,\hat{r}$

$F = 5(2\hat{z}) \times 0.2\cos\phi\,\hat{r} = 10\hat{z} \times 0.2\cos\phi\,\hat{r}$

$\hat{r}$	$\hat{\phi}$	$\hat{z}$
0	0	10
$0.2\cos\phi$	0	0

$= 0 + (10)(0.2\cos\phi)\hat{\phi} + 0 = F = 2\cos\phi\,\hat{\phi}$

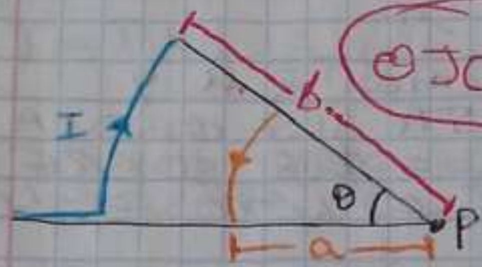
OJO CON $\phi = \pi/2 \quad \therefore \quad F = 2\cos(\pi/2)\hat{\phi}$

$\boxed{W = \int F \cdot dl} = 2\int \cos(\pi/2)\hat{\phi} \cdot (r\,d\phi\,\hat{\phi}) = 2\int \cos(\phi)\,d\phi = 2r\int_0^{2\pi} \cos\phi\,d\phi$

$W = -2r(\text{sen}(2\pi) - \text{sen}(0))$

PROBLEMA 5.9

LA ESPIRA DE LA FIG SON LÍNEAS RADIALES Y SEGMENTOS DE CÍRCULOS CON CENTRO EN P. DETERMINAR EL CAMPO MAGNÉTICO H EN EL PUNTO P EN FUNCIÓN DE a, b, θ e I.



OJO $H = \frac{I\theta}{4\pi l}\hat{z}$ DIRECCIÓN CONTRARIA $-H$ CON $l = a$ Y $l = b$

$$H = \frac{I\theta}{4\pi a} - \frac{I\theta}{4\pi b} = \frac{I\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

PROBLEMA 5.11

UN ALAMBRE INFINITO TRANSPORTA 25 A DIRECCIÓN $\hat{x}$ CERCA DE UNA ESPIRA CIRCULAR DE 20 vueltas LOCALIZADA EN $X-Y$. SI EL CAMPO MAGNÉTICO EN EL CENTRO ES CERO ¿CUÁL ES LA DIRECCIÓN Y MAGNITUD DE LA CORRIENTE QUE FLUYE EN LA ESPIRA?

SABEMOS DE LA EC. QUE:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\hat{z} \qquad H = \frac{NI_2}{2a}$$

IGUALANDO CON μ_0

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{NI_2}{2a} \quad \therefore \quad \frac{NI_2}{2a} = \frac{I_1}{2\pi d}$$

DESPEJANDO I_2: $I_2 = \frac{a I_1}{\pi N d}$

$$I_2 = \frac{(1)(25)}{(\pi)(20)(2)} = 0.2\,A$$

PROBLEMA 5.13

UN CABLE CON ORIENTACIÓN ESTE-OESTE TRANSPORTA I, SE ENCUENTRA A 8 M SOBRE LA TIERRA. SI LA DENSIDAD DE FLUJO MAGNÉTICO POR UN MEDIDOR EN LA SUPERFICIE ES DE 15 μT CUANDO LA CORRIENTE FLUYE EN EL CABLE Y 20 μT CUANDO LA CORRIENTE ES CERO ¿CUÁL ES LA MAGNITUD DE I?

FLUJO MAGNÉTICO $= \vec{B}$ $\boxed{\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}}$ OJO

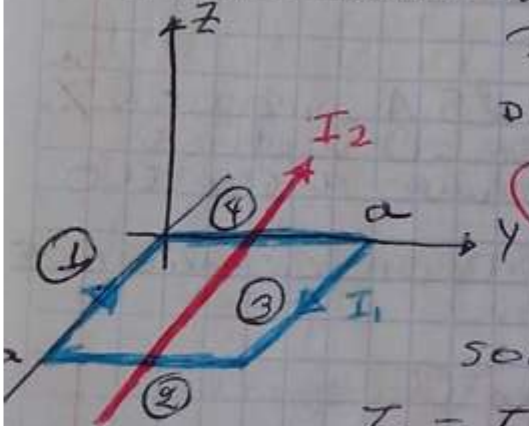
SABEMOS QUE EL $\vec{B}$ SON CONTRARIOS POR LO QUE $B = 20 - 15 = 5\mu T$ TAMBIEN QUE ESTÁ A 8 m.

DE LA EC. $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$ OJO

DESPEJANDO $I = \dfrac{B 2\pi d}{\mu_0} = \dfrac{(5\mu T)(2\pi)(8\,m)}{\mu_0}$ A.

5.19 UNA ESPIRA CUADRADA DE LADOS 2 m Y TRANSPORTA UNA CORRIENTE $I_1 = 5A$ SI SE COLOCA UN CONDUCTOR LARGO CON $I_2 = 10\,A$ SOBRE LOS PUNTOS MEDIOS DE DOS DE LOS LADOS DE LA ESPIRA

DETERMINAR LA FUERZA NETA QUE ACTUA



PARA EL LADO 1, I_1 y I_2 VAN EN LA MISMA DIRECCIÓN.

$$F_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_1 a}{2\pi\left(\frac{a}{2}\right)} \hat{y} = 2 \times 10^{-5} N \hat{y}$$

COMO EL LADO 4 y 2 SON ORTOGONALES SON CERO.

$$F_3 = F_1 \therefore F_{TOTAL} = F_1 + F_3 = 2(2 \times 10^{-5} N)\hat{y}$$

PROBLEMA 5.21

UN CONDUCTOR LARGO Y CILÍNDRICO EJE Z TIENE $r = a$ TRANSPORTA UNA CORRIENTE QUE SE CARACTERIZA POR $J = \dfrac{J_0}{r}\hat{z}$ J_0 ES CTE Y r radial AL EJE DEL CILINDRO

OBTENER UNA EXPRESIÓN PARA EL CAMPO MAGNET. H PARA.

) $0 \leq r \leq a$

$$I_1 = \iint J \cdot dS = \iint \left(\frac{J_0}{r}\hat{z}\right)\left(r\,dr\,d\phi\,\hat{z}\right) = J_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{a} dr\,d\phi = J_0 2\pi a \quad H = J_0$$

$r \geq a$

PROBLEMA 5.23

EN CIERTA REGIÓN CONDUCTORA EL CAMPO MAGNÉTICO ESTA DADA EN CILINDRICAS

$$H_\phi = \frac{4}{r}\left[1-(1+3r)e^{-3r}\right]\hat{\phi}$$

OJO ENCUENTRE LA DENSIDAD DE LA CORRIENTE J

$$J = \nabla \times H = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$

$$J = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r}\right)\hat{z} = 24e^{-3r}\,\hat{z}$$

PROBLEMA 5.32. EN LA FIG. EL PLANO $x-y=1$ SEPARA EL MEDIO 1 DE PERMEABILIDAD μ_1 DEL MEDIO 2 PERM. μ_2. SI NO EXISTE CORRIENTE SUPERFICIAL EN LA FRONTERA Y $B_1 = 2\hat{x} + 3\hat{y}$ (T) DETERMINAR B_2 Y EVALUAR EN $\mu_1 = 5\mu_2$

$\boxed{\text{~~PROBLEMA 5.36 UN SELENOIDE~~}}$

PUNTOS EN EL PLANO $(0,-1,0), (1,0,0), (1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)(1) = \hat{z} \qquad \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y} + \hat{x} \qquad \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$A_1 = \hat{x} + \hat{y} \quad A_2 = \hat{z} \qquad A_2 \times A_1 = \hat{y} - \hat{x}$

$|A_1 \times A_2| = \sqrt{2} \qquad \hat{n}_2 = \dfrac{A_2 \times A_1}{|A_2 \times A_1|} = \dfrac{\hat{y}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$

COMPONENTE NORMAL

$B_{1n_0} = \hat{n}_2 \cdot B_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad$ PARA LA $B_{1n} = \hat{n}_2 B_{1n_0} = \left(\dfrac{\hat{y}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\hat{x}}{\sqrt{2}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\hat{y}}{2} - \dfrac{\hat{x}}{2}$

COMPONENTE TANGENCIAL $B_{1t} = B_1 - B_{1n} =$

PROBLEMA 5.36

UN SELENOIDE CON UNA LONGITUD DE 20 CM Y UN RADIO 5 CM CON 400 vueltas Y UNA CORRIENTE DE 12 A

SI $Z=0$ REPRESENTA EL PUNTO MEDIO DEL SELENOIDE, TRAZAR CURVA PARA $|H(Z)|$ EN FUNCIÓN DE Z A LO LARGO DEL EJE DEL SELENOIDE EN LA REGIÓN $-20\text{ cm} \leq Z \leq 20\text{ cm}$ EN PASOS DE 1 CM.

SABEMOS QUE $l = 20\text{ cm}$ $\quad Z = a\tan\theta \quad a^2+t^2 = a^2\sec^2\theta$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{Z}{\sqrt{z^2+a^2}} \qquad$ SI $Z = Z - Z_p \quad \sin\theta = \dfrac{(Z - Z_p)}{\sqrt{(z-Z_p)^2+a^2}}$

$$H(0,0,1) = (0,0,Z_p) = \frac{B}{\mu}$$

FEM MOVIL.

CONSIDERESE UN CONDUCTOR QUE SE DESPLAZA AL INTERIOR DE UN CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$ UNIFORME E INVARIANTE CON UNA VELOCIDAD $\vec{u}$

LAS CARGAS LIBRES AL INTERIOR EXPERIMENTAN UNA FUERZA MAGNÉTICA

$$F_m = q\,\vec{u} \times \vec{B}$$

ES DECIR

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{F}_m}{q} = \vec{u} \times \vec{B}$$

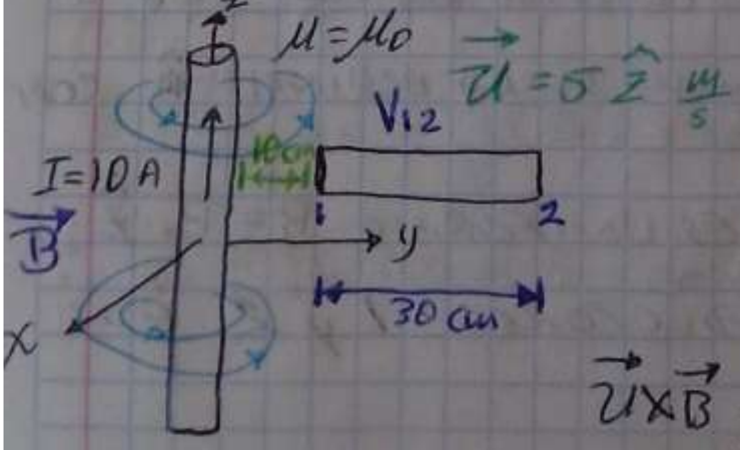
EL CUAL CONOCEMOS COMO CAMPO ELECTRICO MOVIL

EL POTENCIAL QUE APARECE ENTRE LAS TERMINA-LES 1 Y 2 DEL CONDUCTOR V_{12} SE CALCULA EN LA FORMA USUAL.

$$V_{12} = V_{FEM}^{m} = \int_1^2 \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad \text{DE DONDE:}$$

$$V_{12} = V_{FEM}^{M} = \int_1^2 (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

EJEM: DETERMINAR LA FEM MOVIL INDUCIDA EN CONDUCTOR COMO EL DE LA FIG.



SOLUCIÓN

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}\ T$$

$$\vec{u} = 5\,z\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{u} \times \vec{B} = -\frac{5\mu_0 I}{2\pi r}\hat{r} = \vec{E}_m\left[\frac{V}{m}\right]$$

$$V_{12} = \int_{0.4}^{0.1} \left(-\frac{5\mu_0 I}{2\pi r}\hat{r}\right)\cdot dr\,\hat{r} = \cancel{\oint} = -\frac{5\mu_0 I}{2\pi}\int_{0.4}^{0.1}\frac{dr}{r}$$

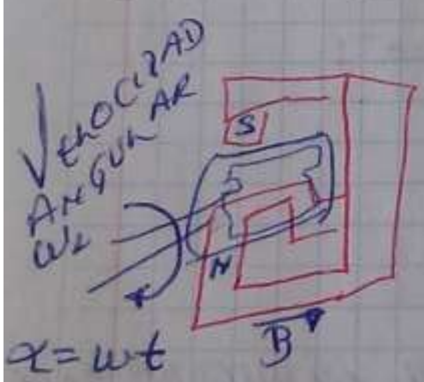
$$= \frac{5\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{0.4}{0.1}\right) V$$

$$= \frac{(5)(4\times10^{-7})(10)}{2\pi}\ln\left(\frac{0.4}{0.1}\right) = 13.84\,\mu V$$

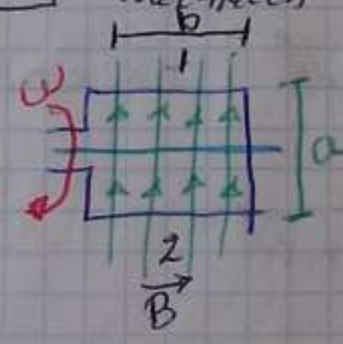
GENERADOR ELECTROMAGNÉTICO

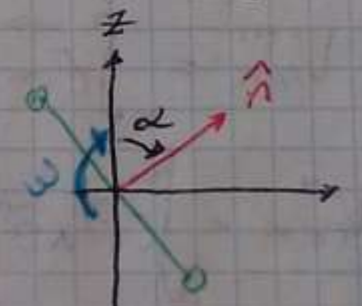
UN GENERADOR ELECTROMAGNÉTICO ES LA CONTRA PARTE DE UN MOTOR ELÉCTRICO

ENERGÍA ELÉCTRICA → $\boxed{\text{MOTOR}}$ → ENERGÍA MECÁNICA → $\boxed{\text{GENERADOR}}$ → ENERGÍA ELÉCTRICA.



$\alpha = \omega t$





PARA EL PRESENTE ANÁLISIS CONSIDEREMOS QUE:
- → x ES EL EJE DE GIRO
- → α ES EL ÁNGULO DE LA NORMAL DE LA BOBINA $\hat{n}$ CON RESPECTO DEL EJE z
- → ω ES CTE $(\alpha = \omega t)$
- → EL CAMPO MAGNÉTICO ES UNIFORME $\vec{B} = B_0\,\hat{z}$

LA VELOCIDAD DE LOS CONDUCTORES 1 Y 2 ES:

$\vec{u}_1 = \frac{a}{2}\omega\hat{n} \quad \vec{u}_2 = -\frac{a}{2}\omega\hat{n}$

EL CAMPO ELECTRICO EN AMBOS CONDUCTORES ES:

$\vec{E}_1 = \vec{u}_1 \times \vec{B} = \left(\frac{a}{2}\omega\hat{n}\right)\times\left(B_0\hat{z}\right) = \frac{a}{2}\omega B_0 \sin(\alpha)\hat{x}$

$\vec{E}_2 = -\vec{E}_1 = -\frac{a}{2}\omega B_0 \operatorname{sen}(\alpha)\hat{x}$

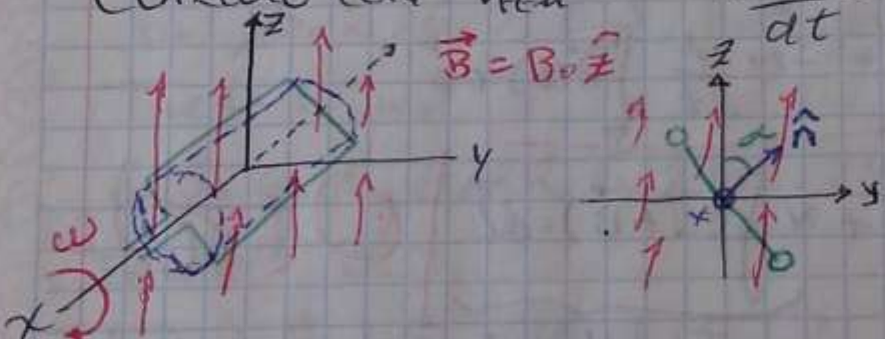
$V_{12} = V_{FEM} = \int_2^1 \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$

$V_{FEM} = V_{12} = ab\,\omega B_0 \sin(\alpha)$

$\boxed{V_{12} = A\,\omega\,B\sin(\omega t)\ V}$ OJO

EJEM: GENERADOR ELÉCTRICO

(CÁLCULO CON $V_{FEM} = -N\frac{d\phi}{dt}$



$\vec{B} = B_0\hat{z}$

EN ESTE CASO, NUEVAMENTE SABEMOS QUE $\alpha = \omega t$

EL FLUJO MAGNÉTICO QUE ATRAVIESA A LA SUPERFICIE ES:

$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S (B_0\hat{z})\cdot(ds\,\hat{n}) = \int B_0 \cos\alpha\, dS = B_0 \int_S \cos\alpha\, ds$

$\therefore\ \phi = B_0 \cos\alpha\, A$ con $A = ab$ = área de la bobina

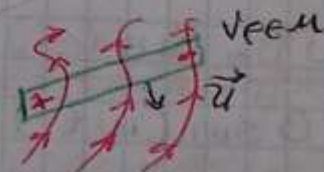
DE LA LEY DE FARADAY

$$V_{FEM} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 \cos\alpha\, A) = -\frac{d}{dt}(B_0 A \cos \omega t)$$

$$V_{FEM} = A B_0 \omega \sin \omega t \quad [V]$$

- FEM ASOCIADA A UN CONDUCTOR EN MOVIMIENTO EN UN CAMPO MAGNÉTICO VARIANTE.
- EN ESTE CASO, TANTO EL CONDUCTOR SE MUEVE EN EL ESPACIO CON LA VELOCIDAD $\vec{u}$ Y EL CAMPO MAGNÉTICO CAMBIA CON EL TIEMPO

$$\vec{B} = \vec{B}(t)$$



PARA DETERMINAR LA FEM INDUCIDA APLICAMOS LA LEY DE FARADAY NUEVAMENTE

$$V_{FEM} = -N\frac{d}{dt}\phi(t) = -N\frac{d}{dt}\int_{S} \vec{B}(t)\cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{V_{FEM} = \underbrace{-N\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}}_{\text{FEM DE TRANSFORMADOR}} + \underbrace{N\oint (\vec{u}+\vec{B})\cdot d\vec{l}}_{\text{FEM MOVIL}}}$$

OJO

EN GENERAL ES MÁS SIMPLE CALCULAR EN LA PRIMER INSTANCIA EL FLUJO MAGNÉTICO $\phi(t)$ Y DESPUES CALCULAR LA FEM INDUCIDA MEDIANTE

$$\boxed{V_{FEM} = -N\frac{d\phi(t)}{dt}}$$

OJO

EJEM. CALCULAR LA FEM INDUCIDA DEL CAMPO $\vec{B}$

ES VARIANTE EN LA FORMA.

$$\vec{B} = B_0 e^{-0.2t}\,\hat{z}$$

SOLUCIÓN

$$\phi(t) = \int \vec{B}(t)\cdot d\vec{s} = \int (B_0 e^{-0.2t}\,\hat{z})(ds\,\hat{n})$$

$$\phi(t) = B_0 e^{-0.2t} \cos\alpha\, A \quad \text{con } A = ab : \text{área de la bobina}$$

$$V_{FEM} = -\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(B_0 e^{-0.2t} A \cos\omega t)$$

DERIVANDO Y FACTORIZANDO

$$\therefore \boxed{V_{FEM} = (0.2\cos\omega t + \omega\sin\omega t)\, B_0 A e^{-0.2t}}$$

OJO

TAREA : 3.1

6.1, 6.2, 6.3, 6.5, 6.9, 6.11, 6.13 (INDUCCION Y FARADAY)

TAREA : 3.2

6.15, 6.17, 6.22, 6.23, 6.24, 6.25 (CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO Y ONDAS E.M.)

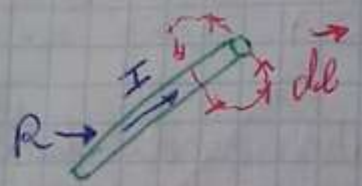
TAREA : 3.3

1.3, 1.5, 1.9, 1.14, 1.15, 1.21, 1.22 (ONDAS, NÚMEROS COMPLEJOS Y FAZORES)

4ta Ecuación de Maxwell y la corriente de desplazamiento.

Sabemos que, si no existen campos magnéticos variantes con el tiempo, la 4ta Ec. de Maxwell (Ley de Ampere) indica que:

En forma diferencial



$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J_c} = \sigma \vec{E}$$

Sin embargo, esta ecuación se encuentra incompleta ya que le falta considerar el efecto de el cambio del campo eléctrico en el medio,

Corriente de desplazamiento

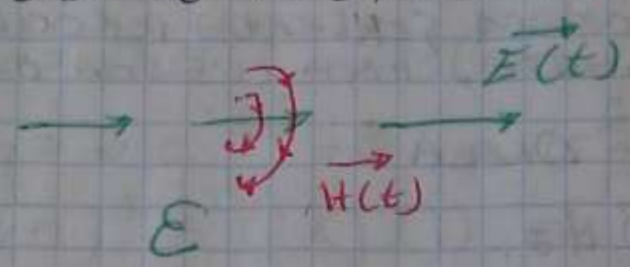
Si consideramos el cambio de campo eléctrico en el interior de un dieléctrico

Aparece una "corriente de desplazamiento" definida como:

$$\vec{J_D} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{dt}$$

La cual no es una corriente de conducción, pero se comporta como si lo fuera.

DE ESTA FORMA, LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO DE ACUERDO CON LA LEY DE AMPERE TAMBIEN TENDRÁ ASOCIADO UN CAMPO MAGNÉTICO. ES DECIR:



OJO

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \underbrace{\sigma \vec{E}}_{\substack{\text{CORRIENTE DE CONDUCCIÓN} \\ \vec{J}_c}} + \underbrace{\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\substack{\text{CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO} \\ \vec{J}_D}}}$$

TAREA 3.3
1.3, 1.5, 1.9, 1.14, 1.15, 1.21, 1.22

1.3 - UNA ARMÓNICA VIAJA EN UNA CUERDA GENERADA POR OCILADOR DE 180 VIBRACIONES POR MINUTO. UNA CRESTA O MAXIMO RECORRE 300 CM EN 10 s
¿CUAL ES LA LONGITUD DE ONDA?

$f = \frac{180}{60} \frac{\text{vibraciones}}{s} = 3\ Hz.$

$\upsilon_p = \frac{300}{10} \frac{cm}{s} = 0.3\ m/s$

LONGITUD DE ONDA $\lambda = \frac{\upsilon_p}{f} = \frac{0.3\ m/s}{3\ Hz} = 0.1\ m$

1.5.- LA ALTURA DE UNA OLA OCEÁNICA ES LA FUNC.

$y(x,t) = 1.5\ sen(0.5t - 0.6x)\ m$

LA VELOCIDAD DE FASE Y LA LONGITUD DE ONDA, TRACE ($y(x,t)$) CON $t = 2s$ A LO LARGO DEL INTERVALO DESDE $x = 0$ A $x = 2\lambda$

SI DESPLAZAMOS LA FUNCIÓN $\pi/2$ QUEDA.

$y(x,t) = 1.5\cos(0.5t - 0.6x - \pi/2)$ Y ASI LO PODEMOS VER COMO $y(x,t) = A\cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$

ASI SABEMOS QUE

OJO

$\omega = 2\pi f = 0.5 \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.6 \quad \upsilon_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{0.5}{0.6} = 0.8\bar{3}$

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.6} = 10.47$

1.9.- UN OCILADOR GENERA 20 VIBRACIONES EN 50 s. UNA CRESTA UNA DISTANCIA DE 2.8 m EN 5 s.
CUAL ES LA LONGITUD DE ONDA?

$T = \cancel{\frac{20}{50}} = \cancel{0.4} \qquad \upsilon_p = \frac{2.8}{5} = 0.56 \qquad \lambda = T \cdot \upsilon_p = (0.4)(56)$

$T = \frac{50}{20} = 2.5 \qquad \lambda = 1.024$

15

$j = (e^{\frac{\pi}{2} j})'$

1.19.- EVALUAR Y EXPRESAR EN FORMA RECTANGULAR

$Z_1 = 4e^{j\pi/3} = 4(\cos \pi/3 + \sin \pi/3\, j) = 2 + 3.46j$

$Z_2 = \sqrt{3}\, e^{\frac{3\pi}{4} j} = \sqrt{3}(\cos \frac{3}{4}\pi + \sin \frac{3}{4}\pi\, j) = -1.22 + 1.22j$

$Z_3 = 6\, e^{-\frac{\pi}{2} j} = 6(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \sin(-\frac{\pi}{2}) j) = = -6j$

$Z_4 = j^3 = (j)(j)(j) \Rightarrow j = \sqrt{-1} \quad j^2 = -1 \quad = -j$

$Z_5 = j^{-4} = \frac{1}{j^4} = \frac{1}{(j^2)(j^2)} = \frac{1}{(-1)(-1)} = 1$

$Z_6 = (1-j)^3 = (1-j)(1-j) = 1 - j - j + j^2 = \cancel{1} - 2j \cancel{-1} = -2j(1-j)$

$-2j + 2j^2 = -2j + 2(-1) = -2 - 2j$

$Z_7 = (1-j)^{1/2}$

1.15 LOS SIG NUM COMPLEJOS. $Z_1 = \overset{\alpha}{3} - j\overset{\beta}{2}$, $Z_2 = -4 + 3j$

a) FORMA POLAR. $z' = |z|\, e^{j\theta} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

$Z_1 = \sqrt{3^2 + 2^2}\, e^{j\tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)} = 3.6\, e^{-j33.7}$

$Z_2 = \sqrt{4^2 + 3^2}\, e^{j\tan^{-1}\left(\frac{3}{-4}\right)} = 5\, e^{j143.13}$

b) DETERMINAR Z_1 c) EL PRODUCTO DE Z_1 CON Z_2 EN POLAR

d) DETERMINAR Z_1 / Z_2 EN FORMA POLAR

e) DETERMINAR Z_1^3 EN FORMA POLAR

b) $|Z_1| = |3 - j2| = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3.6$

$|Z_1| = \sqrt{(3 - j2)(3 + j2)} = 3.6$

c) $(Z_1)(Z_2) = (3.6\, e^{-33.7j})(5\, e^{143.13j}) = 18\, e^{109.4j}$

d) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3.6\, e^{-33.7j}}{5\, e^{143.1j}} = 0.72\, e^{-176.8j}$

e) $Z_1^3 = (3.6\, e^{-33.7j})^3 = 3.6^3\, e^{(-33.7 \times 3)j} = 46.65\, e^{-101.1j}$

PROBLEMA 1.21

UNA FUENTE DE VOLTAJE $V_s(t) = 25\cos(2\pi \times 10^3 t - 30^\circ)$ CONECTADA A UNA CARGA RC EN SERIE.

$R = 1\,M\Omega$

$C = 200 \times 10^{-12}\,\mu F$

OBTENGA LA EXPRESIÓN PARA $V_c(t)$, EL VOLTAJE A TRAVEZ DEL CAPACITOR.

$$V_c = V_s\left(\frac{1/jwC}{R + 1/jwC}\right) = \frac{V_s}{R + jwRC}$$

$$V_s = 25\cos(\underbrace{2\pi \times 10^3}_{\omega} t - 30^\circ)$$

$$V_s = 25e^{-30j} \qquad \omega = 2\pi \times 10^3$$

SUSTITUYENDO

$$V_c = \frac{25e^{-30j}}{1 + j(2\pi \times 10^3)(1M\Omega)(200 \times 10^{-12} F)} = \frac{25e^{-30j}}{1.6e^{51.48j}} = 15.62e^{-81}$$

$$V_c = 15.62e^{-81.5j} \approx 15.62\cos(2\pi \times 10^3 t - 81.5)$$

PROBLEMA 1.22

ENCONTRAR LOS FASORES

a) $v(t) = 3\cos(wt - \pi/3) = 3e^{-\pi/3\,j}$

b) $v(t) = 12\sin(wt + \pi/4) = 12\cos(\pi/2 - (wt + \pi/4)) = 12e^{-}$

c) $i(x,t) = 2e^{-3x}\sin(wt + \pi/6) = 2e^{-3x}\cos(\pi/2 - (wt + \pi/6))$

$= 2e^{-3x}\cos(wt - \pi/3) = 2e^{-3x}e^{-\pi/3\,j}$

d) $i(t) = -2\cos(wt + 3\pi/4) = -2e^{\frac{3\pi}{4}j} = 2e^{-\pi j}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}j} = 2e^{-\frac{\pi}{4}}$

e) $i(t) = 4\sin(wt + \pi/3) + 3\cos(wt - \pi/6)$

$i(t) = 4\cos(\pi/2 - (wt + \pi/3)) + 3\cos(wt - \pi/6)$

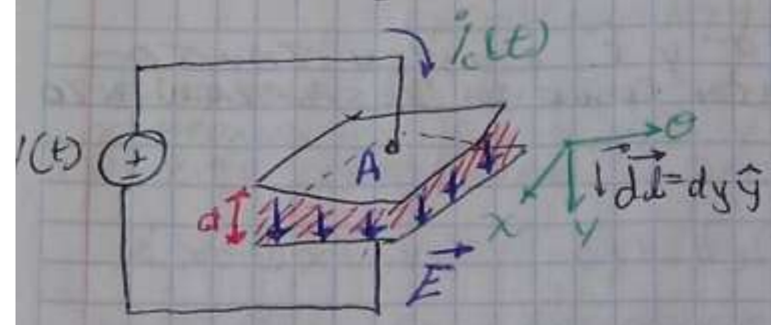
$i(t) = 4\cos(wt - \pi/6) + 3\cos(wt - \pi/6)$

$i(t) = 7\cos(wt - \pi/6) = 7e^{-\pi/6\,j}$

EJEM.

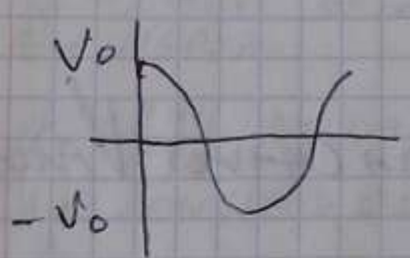
DADO UN CAPACITOR DE PLACAS PLANAS, DETERMINAR LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO ANTE SUS TERMINALES EL VOLTAJE ES:

$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$



ASUMIENDO QUE AL INTERIOR DE UN CAPACITOR DE PLACAS PLANAS EL CAMPO ELÉCTRICO ES UNIFORME

$$V(t) = -\int \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_d^0 (E_y\,\hat{y})(dy\,\hat{y})$$



$$V(t) = E_y\, d \Rightarrow \vec{E} = \frac{V(t)}{d}\hat{y} = \frac{V_0}{d}\cos\omega t\,\hat{y}$$

LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO. ES:

$$\vec{J_0} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{V_0}{d}\cos\omega t\,\hat{y}\right)\right) =$$

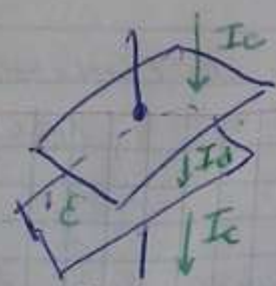
$$\vec{J_0} = -\frac{V_0}{d}\omega\varepsilon \sin\omega t\,\hat{y}$$

LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO TOTAL AL INTERIOR DEL CAPACITOR ES:

$$I_d = \int_S \vec{J_0} \cdot \vec{dS} = \iint_S \left(-\frac{V_0}{d}\omega\varepsilon \sin\omega t\,\hat{y}\right)\cdot(dx\,dz\,\hat{y})$$

Corriente entre las placas OJO

$$I_d = V_0\,\omega \underbrace{\frac{A\varepsilon}{d}}_{C = \frac{A\varepsilon}{d}} \sin\omega t = \boxed{I_d(t) = -V_0\,\omega\, C \sin\omega t \;[A]}$$

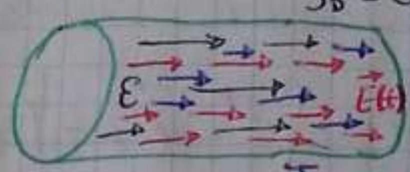


$$I_c(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$I_c(t) = -V_0\,\omega C\sin(\omega t) \quad [A]$$

* En un material con σ y ε existen tanto corriente de conducción como de desplazamiento

$$J_D = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$



$$J_c = \sigma\vec{E}(t)$$

Ecuaciones de Maxwell para campos variantes

Fenómenos electromagnéticos

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

En general, los campos electromagnéticos pueden cambiar tanto en el espacio como en el tiempo

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t)$$

$$= E_x(x,y,z,t)\hat{x} + E_y(x,y,z,t)\hat{y} + E_z(x,y,z,t)\hat{z}$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x,y,z,t) =$$

$$= H_x(x,y,z,t)\hat{x} + H_y(x,y,z,t)\hat{y} + H_z(x,y,z,t)\hat{z}$$

Campos Armónicos

$$\vec{E}(x,t) = E_0\cos(\omega t - kx + \phi_z)\hat{z}$$

Ejem de campo armónico $\vec{E}$ que viaja en dirección $+x$ con frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ con una única componente en z.

En el caso general

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_x\cos(\omega t - kx + \phi_x)\hat{x} + E_y\cos(\omega t - kx + \phi_y)\hat{y} +$$
$$+ E_z\cos(\omega t - kx + \phi_z)\hat{z}$$

Donde E_x, E_y, E_z son las magnitudes de los componentes en x, y, z y además pueden ser función de las coordenadas es decir:

$$E_x = E_x(x,y,z) \quad E_y = E_y(x,y,z) \quad E_z = E_z(x,y,z)$$

$\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular en rad/s y f en Hertz.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es la cte de propagación en rad/m y λ la longitud de onda en metros

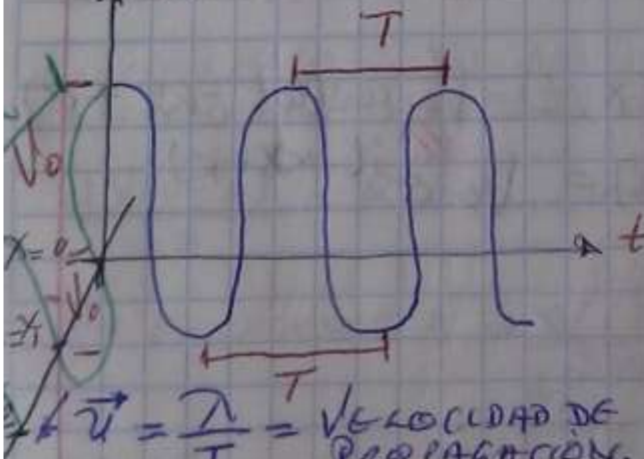
l = es la dirección de propagación.

($l = x, l = -x, l = y, l = -y, l = z, l = -z$ o combinación)

ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z los ángulos de fase de los componentes.

Análisis de Ondas

Análisis de onda escalar que oscila a una frecuencia ω y se propaga en la dirección



T: Periodo (s)

$f = \frac{1}{T}$ f(Hz)

$\omega = 2\pi f \ (\text{rad/s}) = \frac{2\pi}{T}$

$V(t,x) = V_0\cos(2\pi f t - \underline{k}x + \phi)$

$\vec{v} = \frac{\lambda}{T}$ = Velocidad de propagación.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}}$ OJO

$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

- Representación de señales cosenoidal mediante fasores.

$$C = \alpha + j\beta$$

En su forma polar.

$$C = |C|\, e^{j\theta}$$

Donde $|C| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ $\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Con la relación de Euler

$$C = \underbrace{|C| \cos \theta}_{\alpha} + j \underbrace{|C| \sin \theta}_{\beta}$$

$$\therefore \alpha = |C| \cos\theta = \mathbb{R}_e\{C\} = \mathbb{R}_e\{\alpha + j\beta\}$$

Para representar mediante un # complejo empleamos fasorez

$$V(x;t) = V_0 \cos(\underbrace{\omega t - Kx + \phi}_{\theta})$$

$$= \mathbb{R}_e\{V_0 \cos(\omega t - Kx + \phi) + j V_0 \sin(\omega t - Kx + \phi)\}$$

$$= \mathbb{R}_e\{V_0 e^{j(\omega t - Kx + \phi)}\}$$

$$= \mathbb{R}_e\{\boxed{V_0 e^{j(-Kx + \phi)}}\, e^{j\omega t}\}$$

FASOR

Definimos al fasor de $V(x,t) = V_0 \cos(\omega t - Kx + \phi)$

como $\mathbb{V}(x) = V_0\, e^{j(-Kx + \phi)}$

PROPIEDADES DE FASORES.

- DIFERENCIA CON RESPECTO DEL TIEMPO

SEA LA SEÑAL.

$$V(z;t) = V_0 \cos(\omega t - kz + \phi)$$

Y SU FASOR

$$\mathbb{V}(z) = V_0 e^{j(-kz+\phi)}$$

LA DERIVADA DE $V(z;t)$ CON RESPECTO DEL TIEMPO ES.

$$\frac{\partial V(z;t)}{\partial t} = -\omega V_0 \sin(\omega t - kz + \phi)$$

PERO $\quad -\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi/2)$

$$\therefore \frac{\partial V(z;t)}{\partial t} = \omega V_0 \cos(\omega t - kz + \phi + \pi/2) = Y(z;t)$$

CUYO FASOR ES:

$$\mathbb{Y}(z) = \omega V_0 e^{j(-kz+\phi)+j\pi/2} = \omega \underbrace{\boxed{e^{j\pi/2}}}_{j} V_0 e^{j(-kz+\phi)}$$

ES DECIR:

SEÑAL DEL TIEMPO $\qquad$ FASOR.

$$V(z;t) = V_0 \cos(\omega t - kz + \phi) \Longleftrightarrow \mathbb{V}(z) = V_0 e^{j(-kz+\phi)}$$

$$\frac{\partial V(z;t)}{\partial t} = \omega V_0 \cos(\omega t - kz + \phi) \Longleftrightarrow j\omega \mathbb{V}(z)$$

OJO!

DIFERENCIACIÓN RESPECTO DEL ESPACIO $(x, y, z, r, \phi, z, R, \theta)$

EN ESTE CASO ES POSIBLE REALIZAR LA DERIVADA DIRECTAMENTE EN EL FASOR ASÍ COMO EN SEÑAL EN TIEMPO:

$$\frac{\partial V(z;t)}{\partial z} = kV_0 \sin(\omega t - kz + \phi) = kV_0 \cos(\omega t - kz + \phi - \tfrac{\pi}{2})$$

EN EL FASOR: $\dfrac{\partial \mathbb{V}(z)}{\partial z} = -jkV_0 e^{j(-kz+\phi)}$

COMO $\quad -j = e^{-j\pi/2}$

L: $Z = j\omega L$ $\quad$ C: $Z = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = k V_0 e^{j(-kz+\phi-\pi/2)}$$

ES DECIR:

$$\frac{\partial V(z;t)}{\partial z} = k V_0 \cos(\omega t - kz + \phi - \pi/2)$$

FORMA FASORIAL DE LAS EC. DE MAXWELL

DADO UN MEDIO CON UNA DENSIDAD DE CARGA VARIANTE $\rho_v(x,y,z,t)$, CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICO VARIANTES $\vec{E}(x,y,z,t)$, $\vec{H}(x,y,z,t)$

PERMITIVIDAD ELÉCTRICA $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$
PERMITIVIDAD MAGNÉTICA $\mu = \mu_r \mu_0$ Y CONDUCTIVIDAD σ, LAS EC. DE MAXWELL INDICA QUE LA RELACIÓN ENTRE ELLAS ESTÁ DADA POR:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

SI EL CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO VARIAN EN FORMA COSEINODAL CON UNA FRECUENCIA ω ASÍ COMO LAS CARGAS:

$$\vec{E}(x,y,z;t) \Longleftrightarrow \vec{\mathbb{E}}(x,y,z)$$

$$\vec{H}(x,y,z;t) \Longleftrightarrow \vec{\mathbb{H}}(x,y,z)$$

$$\rho_v(x,y,z;t) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(x,y,z)$$

ENTONCES LAS EC. DE MAXWELL EN FORMA ~~DIFERENCIAL~~ FASORIAL

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E}$$

EN LA ÚLTIMA ECUACIÓN NOTAMOS QUE, EN FASORES SE FACTORIZA $\vec{E}$

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E} = j\omega\left(\frac{\sigma}{j\omega} + \varepsilon\right)\vec{E}$$

$$= j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}$$

SI DEFINIMOS A LA PERMITIVIDAD COMPLEJA

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

ENTONCES LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA FASORIAL ES:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

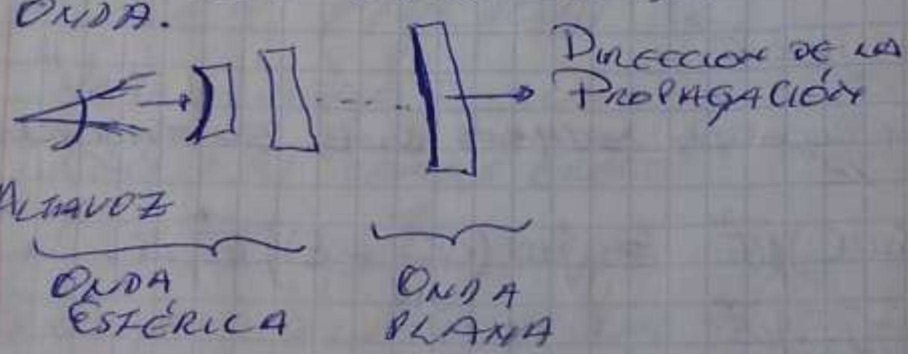
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_c\vec{E}$$

CASO: MEDIOS SIN PÉRDIDAS ($\sigma = 0$) Y SIN CARGAS LIBRES ($\rho_v = 0$)

CON ONDAS PLANAS

UNA ONDA PLANA LA DEFINIMOS COMO AQUELLA ONDA EN LA CUAL LAS PROPIEDADES (COMO INTENSIDAD) DEL CAMPO NO CAMBIA EN DIRECCIONES TANGENCIALES SINO SOLO EN LA ORTOGONAL AL PLANO DE LA ONDA.



ES DECIR, ES UNA ONDA PLANA EL CAMPO NO CAMBIA EN DIRECCIONES ORTOGONALES A LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN.

DE ESTE MODO SI EL MEDIO NO TIENE CARGAS LIBRES Y NO PRESENTA PÉRDIDAS, LAS EC. DE MAXWELL SE SIMPLIFICAN Y TOMAN LA FORMA:

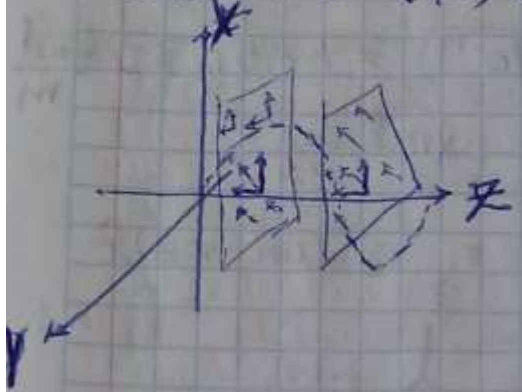
$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbb{E}} &= -j\omega\mu \vec{\mathbb{H}} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbb{H}} &= j\omega\varepsilon \vec{\mathbb{E}} \end{aligned}\right\} \text{CASO SIN PÉRDIDAS Y SIN CARGAS LIBRES}$$

Y NOTAMOS QUE $\varepsilon_c = \varepsilon$

EJEM: DE ONDAS PLANAS

SEA: $\vec{E}(x;t) = E_{x0}\cos(\omega t - kz + \phi_x)\hat{x}$

$E_{y0}\cos(\omega t - kz + \phi_y)\hat{y}$



EJEM. UNA ANTENA DE μONDAS GENERA UN CAMPO ELÉCTRICO

$\vec{E}(z,t) = 2\cos(\omega t - kz)\hat{x}$ A UNA FRECUENCIA DE $F = 2450$ MHz.

$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0) = \varepsilon$ $\quad \mu = (\mu_0 \mu_r)$

QUE SE PROPAGA EN EL AIRE $(\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1)$

DETERMINAR

1) LA IMPEDANCIA INTRÍNSECA DEL MEDIO
2) LA CONSTANTE DE PROPAGACIÓN
3) LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN
4) EL CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO
5) LA LONGITUD DE ONDA.

SOLUCIÓN

$\approx 120\pi = 376.99$

1) $= \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12}}} = 376.82\,\Omega = \eta_0$

* PARA EL ESPACIO LIBRE SE TOMA LA CTE DE IMPEDANCIA INTRÍNSECA

$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.82 \approx 120\pi\,\Omega$ OJO

SIGUE

$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$
$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ OJO

2) $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ $\quad \omega = 2\pi f \quad \mu = \mu_0 \quad \varepsilon = \varepsilon_0$

$$k = (2\pi)(2.45\times10^{9})\sqrt{(4\pi\times10^{-7})(8.85\times10^{-12})} = k = 51.33\ \frac{rad}{m}$$

3) $$u = \frac{\omega}{k} = u = \frac{2\pi(2.45\times10^{9})\ rad/s}{51.33\ rad/s} = \approx 3\times10^{8}\ m/s$$

4) $$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0}\hat{k}\times\vec{E} \qquad \vec{E}(z) = 2e^{j(-kz)}\hat{x} = 2\cos(\omega t - kz)\hat{x}$$

$\hat{k}$ = Dirección de propagación. FASOR

$$\vec{H} = \frac{1}{120\pi}\left(\hat{z}\times 2e^{j(-kz)}\hat{x}\right)$$

$$\vec{H} = \frac{2}{120\pi}\left(e^{-j(kz)}\right)\hat{y} = 5.3\,e^{j(-kz)}\hat{y} =$$

$$\vec{H} = 5.3\cos\left((2\pi)(2.45\times10^{9}t) - 51.33z\right)\hat{y}\ \frac{mA}{m}$$ OJO

5) $$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{51.33} = 0.122m = 12.2\ cm$$

EJEMPLO: DADO EL CAMPO ELECTRICO

$$\vec{E}(y,t) = 4\cos(\omega t - 20y)\hat{x} + 10\cos(\omega t - 20y)\hat{z}$$

QUE SE PROPAGA EN UN MEDIO CON $\varepsilon_r = 5$, $\mu_r = 1$ DETERMINAR

1) LA DIRECCION DE PROPAGACIÓN $\hat{k}$
2) LA FRECUENCIA ANGULAR DE LA ONDA EN Hz
3) EL CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO.

1) $\hat{k} = \hat{y}$

2) $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow$

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{20}{\sqrt{\mu_0\cdot 5\cdot\varepsilon_0}} = \frac{20}{\sqrt{(4\pi\times10^{-7})(5)(8.85\times10^{-12})}} = 2.6\times10^{9}\ \frac{rad}{m}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi f$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.6\times10^{9}}{2\pi} \therefore f = 426.8\ MHz$$

B) $\vec{\mathbb{H}}(z) = \frac{1}{\eta}\hat{k}\times\vec{E} = \vec{\mathbb{E}}(y) = 4e^{j(-20y)}\hat{x} + 10e^{j(-20y)}\hat{z}$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{5\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{5\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{5(8.88\times10^{-12})}} \approx 168.6\ \Omega$$

Producto Cruz

$$\vec{\mathbb{H}}(z) = \frac{1}{168.6}\hat{y}\times\left(4e^{j(-20y)}\hat{x} + 10e^{j(-20y)}\hat{z}\right)\hat{y}$$

$$\vec{\mathbb{H}} = -\frac{4}{168.6}e^{j(-20y)}\hat{z} + \frac{10}{168.6}e^{j(-20y)}\hat{x}$$

$$\vec{\mathbb{H}} = -\frac{4}{168.6}\cos(2.6\times10^{9}t + 20y)\hat{z} + \frac{10}{168.6}\cos(2.6\times10^{9}t - 20y)\hat{x}\ \frac{mA}{m}$$

* LA EC. QUE PERMITE EL CÁLCULO EL CÁLCULO DEL DEL CAMPO ELECTRICO A PARTIR DE MAGNÉTICO ES:

$$\vec{\mathbb{E}} = -\eta\,\hat{k}\times\vec{\mathbb{H}}$$

$$= -168.6\left(\hat{y}\times\left(-\frac{4}{168.6}e^{j(-20y)}\hat{z} + \frac{10}{168.6}e^{j(-20y)}\hat{x}\right)\right)$$

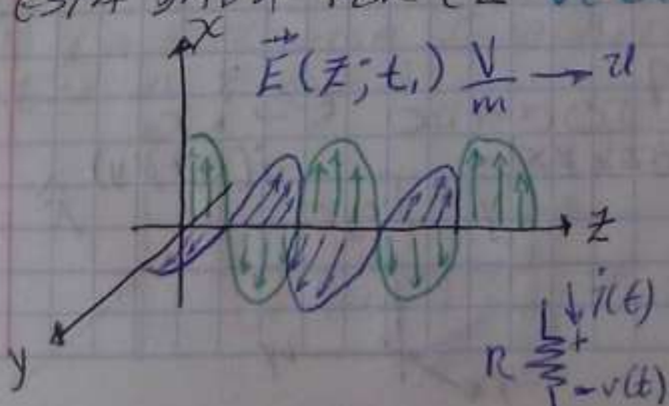
$$\vec{\mathbb{E}} = 4e^{j(-20y)}\hat{x} + 10e^{j(-20y)}\hat{z}$$

POTENCIAL ELECTROMAGNÉTICO

DADA UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA PLANA DADA POR UN CAMPO MAGNÉTICO BARIABLE

$$\vec{E}(z;t) = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi x)\hat{x} + E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y)\hat{y}$$

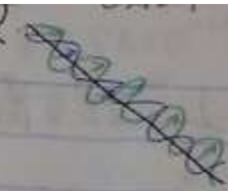
LA CANTIDAD DE POTENCIAL ELÉCTRICO QUE TRANSMITE ESTA DADA POR EL VECTOR DE POYNTING



$\vec{H}(z;t_1)\ \frac{A}{m}$

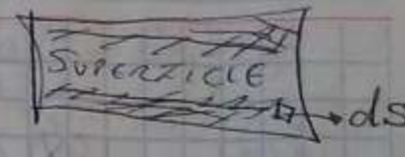
$\eta(\varepsilon,\mu)$

$P(t) = V(t)(i(t))\ W$



EL CUAL SE DEFINE COMO:
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

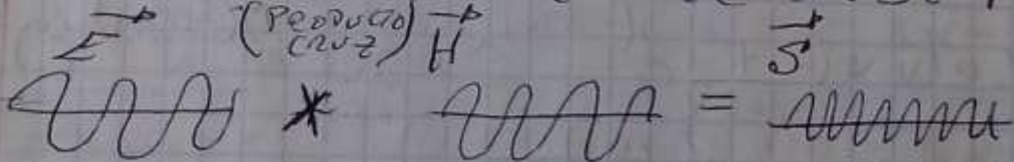
ESTE VECTOR DE POYNTING INDICA LA CANTIDAD DE POTENCIA INSTANTÁNEA QUE TRANSPORTA LA ONDA EM POR UNIDAD DE ÁREA, ADEMÁS QUE SU DIRECCIÓN COINCIDE CON LA DE PROPAGACIÓN DE LA ONDA E.M.



LA POTENCIA TOTAL INSTANTÁNEA QUE INCIDA EN UNA SUPERFICIE S ESTÁ DADA POR:

$$P_{INST}(t) = \int_S \vec{S}\cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{s}$$

COMO TANTO $\vec{E}$ Y $\vec{H}$ CAMBIAN CON EL TIEMPO, TAMBIÉN LO HACE EL VECTOR DE POYNTING $\vec{S}$



∴ SE PUEDE CALCULAR EL VALOR PROMEDIO DE LA DENSIDAD DE POTENCIA $\vec{S}$ MEDIANTE:

$$\vec{S}_{PROM} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\times\vec{H}^*\right\} \frac{W}{m^2}$$

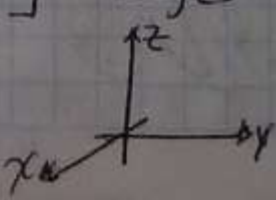
POR EJEMPLO PARA EL CAMPO ELÉCTRICO DESCRITO ANTERIORMENTE, PERO EN FASORES.

$$\vec{E}(z) = E_{ox}\, e^{-j(kz+\phi x)}\,\hat{x} + E_{oy}\, e^{-j(kz+\phi y)}\,\hat{y}$$

DONDE $\hat{k} = \hat{z}$

EL CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO ES:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{k}\times\vec{E} = \frac{1}{\eta}\left(E_{ox}\, e^{-j(kz+\phi x)}\,\hat{y} - E_{oy}\, e^{-j(kz+\phi y)}\,\hat{x}\right.$$



PARA EL CONJUGADO. $(\alpha + j\beta)^* = \alpha - j\beta$

$(re^{j\theta})^* = re^{-j\theta}$

$$\vec{H}^* = \frac{1}{\eta}\left(E_{ox} e^{jkz - \phi x j}\,\hat{y} - E_{oy} e^{jkz - \phi y j}\,\hat{x}\right)$$

$$\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{\eta}\left(E_{ox} e^{-jkz + j\phi x}\,\hat{x} + E_{oy} e^{-jkz + \phi y}\,\hat{y}\right) \times \left(E_{ox} e^{jkz - \phi x j}\,\hat{y} - E_{oy} e^{jkz - \phi y j}\,\hat{x}\right)$$

PRODUCTO CRUZ

POTENCIA ELECTROMAGNÉTICA.

$$\therefore \underline{\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{\eta}\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)\hat{z}}$$

$$\vec{S}_{prom} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\}$$

$$\underline{\vec{S}_{prom} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta}\,\hat{k}}$$

POTENCIA PROMEDIO EN MEDIOS SIN PÉRDIDAS. $(\sigma = 0)$

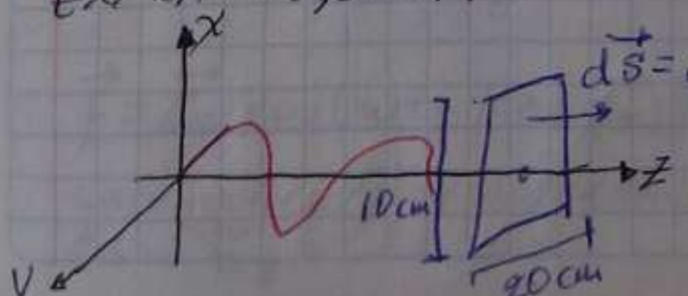
OJO

EJEM. UNA ONDA EM PLANA TIENE UN CAMPO ELÉCTRICO DADO POR

$$\vec{E} = 200 \sin(\omega t - kz + 15^\circ)\,\hat{x}$$

SI LA $f = 100$ MHz Y EL MEDIO ES DE EL ESPACIO LIBRE

I) LA EXPRESIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO.
II) EL CAMPO MAGNÉTICO ASOCIADO
III) EL VECTOR DE POYNTING
IV) EL VECTOR DE POTENCIA PROMEDIO
V) LA POTENCIA QUE INCIDE EN EL PLANO MOSTRADO EN LA FIGURA.



SIGUE

1) $\omega = 2\pi f = 2(\pi)(100\,MHz) = 200\pi \times 10^6$ rad/s

2) $K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = (200\pi \times 10^6)\left(\sqrt{(4\pi \times 10^{-7})(8.85\times 10^{-12})}\right)$

$K = 2.1$ rad/m

$\vec{E} = 200 \sin(\omega t - kz + 15°)\hat{x}$

SUSTITUYENDO

$\vec{E} = 200 \cos(200\pi \times 10^6 t - 2.1z + 15° - 90°)\hat{x}\ \frac{V}{m}$

$\vec{E} = 200 \cos(200\pi \times 10^6 t - 2.1z - 75°)\hat{x}\ \frac{V}{m}$

II) $\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{k} \times \vec{E}$ $\quad \vec{E}_{FASOR} = \vec{E} = 200e^{-j2.1z}\,e^{-j75°}\,x$

$k = \hat{z}$

$\eta = 120\pi$

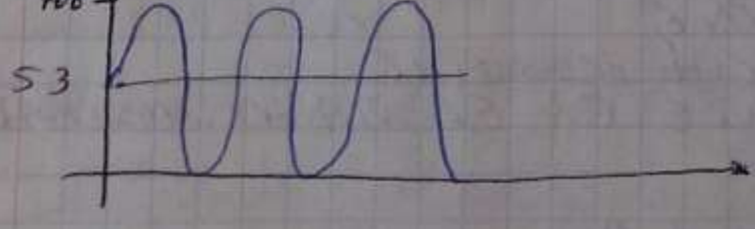
$\vec{H} = \frac{1}{120\pi}\left(200\,e^{-j2.1z - j75°}\right)\hat{y}$

$\vec{H} = 0.53 \cos(200\pi \times 10^6 t - 21z - 75°)\hat{y}\ \frac{A}{m}$

III) $\vec{S} = \underbrace{\vec{E} \times \vec{H}}_{ARRIBA} = 106\cos^2(\omega t - Kz - 75°)\hat{z}$

$= \frac{106}{2}(1 + \cos(2\omega t - 2Kz - 150°)\hat{z}$

$\vec{S} = 53 + 53\cos(2\omega t - 2Kz - 150°)\hat{z}\ \frac{W}{m^2}$



IV) $\vec{S}_{prom} = \frac{200^2}{2(120\pi)}\hat{z} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta}\hat{k} = 53\,\hat{z}\ \frac{W}{m^2}$

V) $P_{prom} = \int_S \vec{S}\cdot\vec{ds} = \int_{-0.1}^{0.1}\int_{-0.05}^{0.05} (53\,\hat{z})(dx\,dy)\hat{z} = 53(0.1)(0.2)\ W$

$P_{prom} = 1.06\ W$

POLARIZACIÓN DE ONDA.

LA POLARIZACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA DESCRIBE EL LUGAR GEOMÉTRICO QUE TRAZA LA PUNTA DEL CAMPO ELÉCTRICO EN UNA POSICIÓN EN EL ESPACIO DETERMINADA CUANDO ES VISTA DESDE SU DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN PUDIENDO SER ÉSTA:

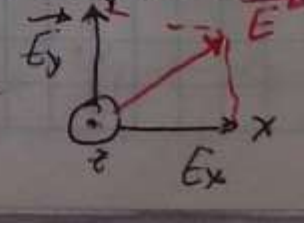
- POLARIZACIÓN LINEAL
- POLARIZACIÓN CIRCULAR (DE MANO IZQ. O DERECHA)
- POLARIZACIÓN ELÍPTICA (DE MANO IZQ. O DERECHA)

LA PROPAGACIÓN, SUELE REFERIRSE A UNA COMPONENTE DEL CAMPO ELÉCTRICO, SIENDO ESTA AQUELLA QUE EN PRODUCTO CRUZ CON LA SEGUNDA COMPONENTE INDIQUE LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN.

POR FINES DE PRESENTACIÓN, UN CAMPO QUE SE PROPAGA EN DIREC +Z Y PRESENTA COMPONENTES $\vec{E_x}$ Y $\vec{E_y}$

$\vec{E} = \vec{E_{x0}}\cos(\omega t - kz + \phi_x)\,\hat{x} + E_{y0}\cos(\omega t - kz + \phi_y)\,\hat{y}$ DON

LA COMPONENTE DE REFERENCIA ES $\vec{E_x}$.



POLARIZACIÓN LINEAL

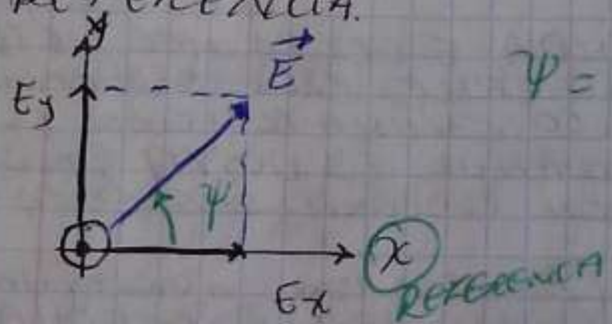
ESTE CASO OCURRE CUANDO LAS FASES DE LOS COMPONENTES DEL CAMPO CON REFERENCIA COSENOIDAL SON IGUALES ES DECIR: PARA EL CASO DE ANÁLISIS:

$$\phi_x = \phi_y$$

O CUANDO SU RELACIÓN OCURRE EN MÚLTIPLOS DE 180°

$$\phi_y = \phi_x \pm n \cdot 180°,\ n = 0, 1, 2 \ldots$$

SI EXISTEN AMBAS COMPONENTES, ENTONCES EL CAMPO ELÉCTRICO PRESENTARÁ UN ÁNGULO DE INCLINACIÓN ψ CON RESPECTO DE LAS COMPONENTES DE REFERENCIA.



$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}\cos(\omega t + \phi_y)}{E_{x0}\cos(\omega t + \phi_x)}\right)$$

SI AMBAS FASES SON IGUALES ($\phi_x = \phi_y$)

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}\cancel{\cos(\omega t)}}{E_{x0}\cancel{(\cos(\omega t))}}\right)$$

OJO $\boxed{\psi = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right)}$ POLARIZACIÓN LINEAL COMPONENTE EN FASE

SI LAS COMPONENTES SE ENCUENTRAN FUERA DE FASE POR 180°:

$$\phi_y = \phi_x + 180° \Rightarrow \psi = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}\cos(\omega t + \phi_x + 180°)}{E_{x0}\cos(\omega t + \phi_x)}\right)$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(-\frac{E_{y0}\cos\cancel{(\omega t + \phi_x)}}{E_{x0}\cos\cancel{(\omega t + \phi_x)}}\right)$$

OJO $\boxed{\psi = -\tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right)}$ POLARIZACIÓN LINEAL, COMPONENTES FUERA DE FASE POR ± 180°

- POLARIZACIÓN CIRCULAR

ESTE CASO OCURRE CUANDO LAS MAGNITUDES CUANDO LAS COMPONENTES SON IGUALES ($E_{x0} = E_{y0}$) Y LA DIFERENCIA DE FASE ENTRE ELLAS ES DE $\pm 90^\circ$ ES DECIR:

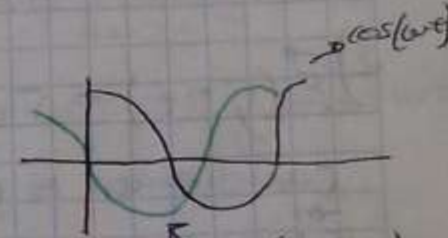
$$\delta = \phi_y - \phi_z = \pm 90^\circ$$

REFERENCIA

ENTONCES CON ESTA CONDICIÓN:

$$\phi_y = \delta + \phi_x$$

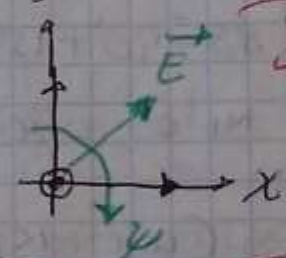
$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}\cos(\omega t + \phi_y)}{E_{x0}\cos(\omega t + \phi_x)}\right)$$



$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}\cos(\omega t + \phi_x + \delta)}{E_{x0}\cos(\omega t + \phi_x)}\right)$$

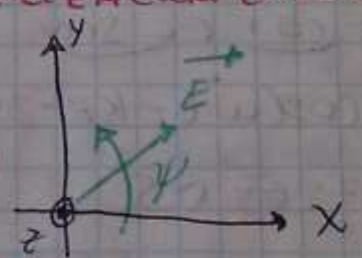
Como $\delta = +90^\circ$ = POLARIZACIÓN CIRCULAR DE MANO IZQUIERDA (LHC) OJO

$$\psi = -(\omega t + \phi_x)$$



COMO $\delta = -90^\circ$ = POLARIZACIÓN CIRCULAR DE MANO DERECHA (RHC)

$$\psi = \omega t + \phi_x$$



EN CUALQUIER CASO DE POLARIZACIÓN CIRCULAR EL CAMPO ELÉCTRICO PRESENTA MAGNITUD CTE.

$$\vec{E} = E_{x0}\cos(\omega t - kz + \phi_x)\hat{x} + E_{x0}\cos(\omega t - kz + \phi_x + \delta)\hat{y}$$

PARA LA MAGNITUD

$$|\vec{E}| = E_{x0}^2\cos^2(\omega t - kz + \phi_x)\hat{x} + E_{x0}^2\cos^2(\omega t - kz + \phi_x + \delta)\hat{y}$$

± 90

$$\therefore \boxed{|\vec{E}| = |E_{x0}|}$$

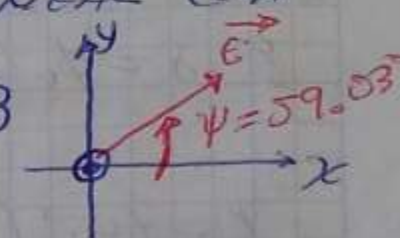
OJO

EJEM. DETERMINAR EL ESTADO DE POLARIZACIÓN DE LAS SIGUIENTES ONDAS EM PLANAS, Y EN SU CASO, DETERMINAR SU ÁNGULO DE INCLINACIÓN.

1) $\vec{E}(z;t) = 3\cos(\omega t - kz + 10°)\hat{x}^{REF} + 5\cos(\omega t - kz + 10°)\hat{y}$

Como $\phi_x = 10° = \phi_y$ LAS COMPONENTES SE ENCUENTRAN EN FASE Y $\therefore$ LA POLARIZACIÓN ES LINEAL CON ÁNGULO DE INCLINACIÓN

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59.03$$



2) $\vec{E}(y;t) = 5\cos(\omega t - ky + 15°)\hat{z}^{REF} + 5\sin(\omega t - ky + 85°)\hat{x}$

CAMBIAMOS A COS EL SIN

$\vec{E}(y;t) = 5\cos(\omega t - ky + 15°)\hat{z} + 5\cos(\omega t - ky + 85° - 90°)\hat{x}$

SU DIFERENCIA ES:

$$\delta = \phi_x - \phi_z = 85° - 90° + 15° = -20°$$

COMO δ NO ES NI $0°, \pm 90°$

3) $\vec{E}(z;t) = 5\cos(\omega t - kz + 25°)\hat{x} + 5\sin(\omega t - kz - 65°)\hat{y}$

CAMBIAMOS A COS EL SIN $\quad \phi_x = 25 \quad \phi_y = -155°$

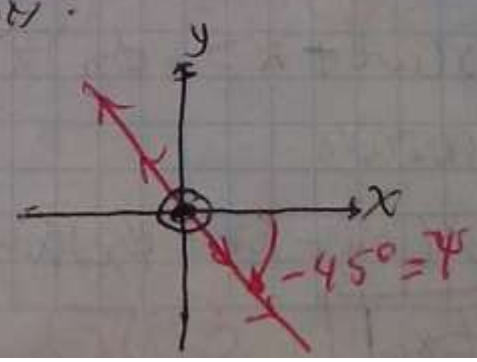
$\vec{E}(z;t) = 5\cos(\omega t - kz - 25°)\hat{x} + 5\cos(\omega t - kz - 65 - 90°)\hat{y}$

LA DIF DE FASE ES

$$\delta = \phi_y - \phi_x = -155 - 25 = -180°$$

$\therefore$ LA POLARIZACIÓN ES LINEAL Y FUERA DE FASE POR 180° CON ÁNGULO DE INCLINACIÓN:

$$\psi = -\tan\left(\frac{5}{5}\right) = -45°$$



TAREA 3.1

6.1, 6.2, 6.3, 6.5, 6.9, 6.11, 6.13

6.1.- EL INTERRUPTOR EN LA ESPIRA INFERIOR SE CIERRA EN EL INSTANTE $t=0$, LUEGO SE ABRE EN EL INSTANTE t_1. CUAL ES LA DIRECCIÓN DE LA CORRIENTE I EN LA ESPIRA SUPERIOR

CUANDO EL INTERRUPTOR SE CIERRA LA CORRIENTE VA EN EL SENTIDO DEL RELOJ, Y EN SENTIDO INVERSO CUANDO SE ABRE NUEVAMENTE EL INTERRUPTOR.

6.2.- LA ESPIRA QUE APARECE SE ENCUENTRA EN EL PLANO x-y Y $B = B_0 \operatorname{sen} \omega t\, \hat{z}$ CON B_0 POSITIVO. CUAL ES LA DIRECCIÓN DE I ($\hat{\phi}$ ó $-\hat{\phi}$) CUANDO:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{-1}{R}\int_S \frac{\partial B}{\partial t}\cdot ds \qquad I = \frac{-A}{R}\frac{\partial}{\partial t}B_0 \sin \omega t = -\frac{AB_0\omega}{R}\cos \omega t$$

a) $t=0$ $\cos \omega t = 1$ $I<0$ ∴ LA DIRECCIÓN ES $-\hat{\phi}$

b) $\omega t = \pi/4$ $\cos \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴ LA DIRECCIÓN ES $I<0 \Rightarrow -\hat{\phi}$

c) $\omega t = \pi/2$ $\cos \omega t = 0$ ∴ $I = 0$

6.3.- UNA BOBINA TIENE 100 vueltas ENROLLADO EN UN ARMAZON CUADRADO DE 0.25 m. LA BOBINA ESTÁ EN EL ORIGEN.
DETERMINAR LA FEM INDUCIDA ENTRE LOS EXTREMOS ABIERTOS DE LA BOBINA SI EL CAMPO MAGNÉTICO ES:

a) $B = 20e^{-3t}\hat{z}$ OJO

$$V_{FEM} = -N\frac{d}{dt}\int_{-0.125}^{0.125}\int_{-0.125}^{0.125} B\cdot(dx\,dy)\hat{z} \quad ∴ V_{FEM} = \frac{d}{dt}\left[-100\int_{-0.125}^{0.125}\int_{-0.125}^{0.125} 20e^{-3t}\,dx\,dy\right]$$

$V_{FEM} = 375e^{-3t}$ V.

b) $B = 20\cos x \cos 10^3 t\,\hat{z}$

$$V_{FEM} = -100\frac{d}{dt}\int_{-0.125}^{0.125} 20\int_{-0.125}^{0.125}\cos 10^3 t \cos x\,dx\,dy$$

$V_{FEM} = 124.6 \sin 10^3 t$

c) $B = 20\cos x \sin 2y \cos 10^3 t\,\hat{z}$

$$V_{FEM} = -100\frac{d}{dt}\left(20\cos 10^3 t\int_{-0.125}^{0.125}\int_{-0.125}^{0.125}\cos x \sin 2y\,dx\,dy\right) = 0$$

6.5 ANTENA DE TELEVISIÓN DE ESPIRA CIRCULAR CON $0.02\,m^2$ DE ÁREA SE ENCUENTRA EN LA PRESENCIA DE UNA SEÑAL DE 300 MHz CUANDO SE LE ORIENTA PARA RESPUESTA MÁXIMA LA ESPIRA DESARROLLA UNA FEM DE 30 mV PICO
¿CUÁL ES LA MAGNITUD PICO DE B DE LA ONDA INCIDENTE.

OJO

$$V_{FEM} = -A\frac{d}{dt}\left[B_0 \cos(\omega t + \alpha_0)\right] = A B_0 \omega \sin(\omega t + \alpha_0)$$

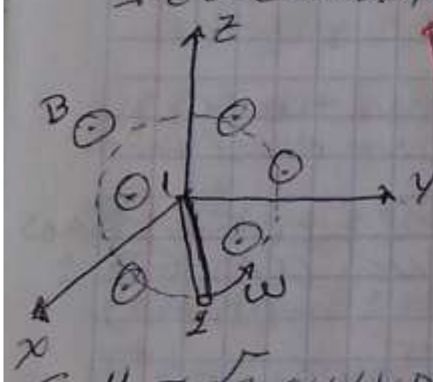
EL VALOR MÁXIMO ES ALCANZADO CUANDO $\sin(\omega t + \alpha_0) = 1$

$30\times10^{-3} = AB\omega$ $\quad \omega = 2\pi f \quad \omega = 6\pi\times10^{8}$

$A = 0.02\,m^2 \quad V_{FEM} = 30\,mV$

$$B = \frac{30\times10^{-3}}{A\omega} = 0.8\,\frac{nA}{m}$$

6.9 UNA BARRA METÁLICA DE 50 cm DE LARGO GIRA ENTORNO AL EJE Z A 90 REV/MIN CON EL EXTREMO 1 FIJO EN EL ORIGEN
DETERMINAR LA FEM INDUCIDA SI $B = 2\times10^{-4}\,\hat{z}\,T$



$$V_{FEM} = \int_2^1 (u\times B)\cdot \vec{dl} = \int_{r=0.5m}^{0} (3\pi r \times 2\times10^{-4})\cdot(dr) = -236\,\mu V$$

$u = \omega r\hat{\phi}$
$u = 3\pi r$

OJO

6-11.- EL CILINDRO GIRA EN SU EJE A 1200 REV/MIN CON $B = 6\hat{r}$ EL CILINDRO CON RADIO = 5 cm Y ALTO = 10 cm QUE VOLTAJE INDUCE $\quad \omega = 2\pi f \quad f = \frac{1200}{60}$

OJO

$$V_{FEM} = \int_0^{L} (u\times B)\,dl \qquad u = \omega r\hat{\phi} = \left(2\pi\cdot\frac{1200}{60}\right)(5\times10^{-2}\,m) = 2\pi\,\hat{\phi}$$

$$V_{FEM} = \int_0^{0.1m} (2\pi\hat{\phi}\times 6\hat{r})\cdot dz\,\hat{z} = -3.77$$

6.13.- DISCO CIRCULAR SE ENCUENTRA EN EL PLANO X-Y GIRA CON ω UNIFORME ALREDEDOR DE Z EL DISCO $r=a$ EN UNA DENSIDAD DE FLUJO MAGNÉTICO $B = B_0 \hat{z}$

OBTENGA LA FEM EN EL BORDE RESPECTO AL CENTRO DEL DISCO

$$V_{FEM} = \int_0^a (u \times B)\, dl \qquad u = \omega r \hat{\phi} \quad B = B_0 \hat{z} \quad dl = dr\, \hat{r}$$

$$V_{FEM} = \int_0^a \left((\omega r \hat{\phi}) \times (B_0 \hat{z})\right) dr\, \hat{r} = \omega B_0 \frac{a^2}{2}$$

244

TAREA 3.2 6.15, 6.17, 6.22, 6.23, 6.24, 6.25

6.15.- UN CAPACITOR COAXIAL $l = 6\,cm$ DIELECTRICO CON $\varepsilon_r = 9$ LOS RADIOS DE LOS CONDUCTORES SON 0.5 cm Y 1.0 cm SI EL $V(t) = 50 \operatorname{sen}(120\pi t)$ ¿CUAL ES LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO?

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l}\hat{r} \quad V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \therefore E = \frac{50\sin(120\pi t)}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{r}$$

OJO

$$E = \frac{50\sin(120\pi t)}{r\ln(2)}\hat{r} = \frac{V}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{r} = \frac{72.1}{r}\sin(120\pi t)\ \frac{V}{m}$$

$$D = \varepsilon E \quad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E \qquad D = 9\left(8.85\times10^{-12}\right)\left(\frac{72.1}{r}\sin(120\pi t)\right)$$

$$D = \frac{5.75\times10^{-9}}{r}\sin(120\pi t)\,\hat{r}\ \frac{C}{m^2} \qquad S = 2\pi r l\,\hat{r}$$

$$I_d = \frac{\partial D}{\partial t}\cdot S = (5.75\times10^{-9})(120\pi)(2\pi l)(\cos(120\pi t)) = 0.82\cos(120\pi t)$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad I = C\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{d}{dt}[50\operatorname{sen}(120\pi t)] = 0.82\cos(120\pi t)$$

CAPACITOR PLACAS PARALELAS

$$R = \frac{d}{\sigma A}, \quad I_c = \frac{V}{R} = \frac{V\sigma A}{d} \quad E = \frac{V}{d} \quad I_d = \frac{\partial D}{\partial t}\cdot A = \varepsilon A\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon A}{d}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

OJO EN ESTE EJERCICIO

6.17.- UNA ONDA EM SE PROPAGA EN EL MAR TIENE UN C.E. CON UNA VARIACIÓN RESPECTO AL TIEMPO ~~[illegible]~~ $E = E_0 \cos\omega t\, \hat{z}$ SI LA

PERMITIVIDAD DEL AGUA ES $81\varepsilon_0$ Y SU CONDUCTIVIDAD ES 4 (S/m) DETERMINE LA RAZÓN ENTRE LAS MAGNITUDES DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE DE CONDUCCIÓN Y LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO EN LAS SIG FRECUENCIAS.

$J_d = \frac{\partial}{dt} D = \varepsilon \frac{\partial}{dt} E$ $\quad J = \sigma E$ $\Rightarrow \boxed{\left|\frac{J}{J_d}\right| = \left|\frac{\sigma E}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 E}\right| = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0}}$

$\omega = 2\pi f$ $\quad \sigma =$ conductividad

a) $f = 1\,KHz$ $\quad \omega = 2\pi \times 10^3$

$$\left|\frac{J}{J_d}\right| = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{4}{(2\pi \times 10^3)(81)(8.854 \times 10^{-12})} = 888 \times 10^3.$$

PARA b) $f = 1\,MHz$ $\quad \omega = 2\pi \times 10^6$ $\therefore \left|\frac{J}{J_d}\right| = 888$

c) $f = 1\,GHz$ $\quad \omega = 2\pi \times 10^9$ $\therefore \left|\frac{J}{J_d}\right| = 0.888$

d) $f = 100\,GHz$ $\quad \omega = 2\pi \times 10^{11}$ $\therefore \left|\frac{J}{J_d}\right| = 8.88 \times 10^{-3}$

6.22 EL CAMPO ELÉCTRICO DE UNA ONDA EM. QUE SE PROPAGA EN EL AIRE SE DETERMINA MEDIANTE

$$E(z,t) = 4\cos(6\times 10^8 t - 2z)\hat{x} + 3\,\mathrm{sen}(6\times 10^8 t - 2z)\hat{y} \quad \frac{V}{m}$$

DETERMINAR EL C.M. ASOCIADO $H(z,t)$

$$H = \frac{1}{-j\omega\mu} \nabla \times E \qquad = \frac{1}{-j\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4e^{-j2z} & & \end{vmatrix}$$

6.23 EL CAMPO MAGNÉTICO EN UN MATERIAL ELÉCTRICO CON $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ Y $\sigma = 0$ ESTÁ DETERMINADO POR

$H(y,t) = 5\cos(2\pi \times 10^7 t + ky)\hat{x}$ CALCULAR K Y E

$$E = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \vec{H} \qquad K = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r}}{c}$$

6.24 DADO UN CAMPO ELÉCTRICO $E = E_0 \operatorname{sen} ay \cos(\omega t - kz)$ DONDE E_0, a, ω, k SON CTES DETERMINAR H

$$\mathbb{E} = E_0 \sin ay \, e^{-jkz} \hat{x} \qquad \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_0 \sin ay \, e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbb{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbb{E}$$

$$\mathbb{H} = \frac{E_0}{\omega\mu} \left[k \sin ay \, \hat{y} - j a \cos ay \, \hat{z} \right] e^{-kz}$$

6.25 EL CAMPO ELÉCTRICO IRRADIADO POR UNA ANTENA BIPOLAR CORTA O DE MEDIA ONDA ESTÁ EN COORDENADAS ESFÉRICAS POR:

$$E(R,\theta;t) = \frac{2\times10^{-2}}{R} \operatorname{sen}\theta \cos(6\pi\times10^{8} t - 2\pi R)\hat{\theta}$$

DETERMINAR $H(R,\theta;t)$

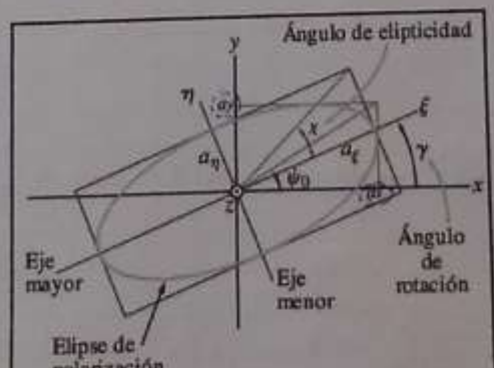
$$\mathbb{E} = \frac{2\times10^{-2}}{R} \operatorname{sen}\theta \, e^{-j2\pi R}$$

$$\mathbb{H} = \frac{1}{-j\omega\mu} \nabla \times \mathbb{E} = \frac{53}{R} \sin\theta \, e^{-j2\pi R} \hat{\phi}$$

09/10/2014

$a_x = E_{x0}$

$a_y = E_{y0}$



POLARIZACIÓN ELÍPTICA

EL CASO MÁS GENERAL DE POLARIZACIÓN OCURRE CUANDO
$E_{x_0} = E_{y_0}$ Y CUANDO $\delta \neq 0°$, $\delta \neq 90°$, $\delta \neq 180°$

LA CARACTERIZACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA POLARIZACIÓN ELÍPTICA SE DESCRIBE A PARTIR DE:

γ: ÁNGULO DE INCLINACIÓN CON RESPECTO DEL EJE DE REFERENCIA $(-90°, 90°)$

χ: ÁNGULO DE ELIPTICIDAD $(-45°, 45°)$

ψ_0: ÁNGULO AUXILIAR $(0, 90°)$

PARA DETERMINAR Y BOSQUEJAR EL TIPO DE POLARIZACIÓN ELÍPTICA PRESENTE, ESTOS ÁNGULOS SE RELACIONAN MEDIANTE LAS EC.:

$$\tan \psi_0 = \frac{E_{y_0}}{E_{x_0}} \quad (\psi_0 \in (0, 90°)) \qquad \tan 2\gamma = (\tan 2\psi_0)\cos\delta \quad (\gamma \in (-90°, 90°))$$

$$\operatorname{sen} 2\chi = (\operatorname{sen} 2\psi_0)\operatorname{sen}\delta \quad (\chi \in (-45°, 45°))$$

DONDE, SI $\cos\delta > 0 \Rightarrow \gamma > 0$
$\cos\delta < 0 \Rightarrow \gamma < 0$

Y SI $\chi \in (0, 45°) \Rightarrow$ POLARIZACIÓN ELÍPTICA DE MANO IZQUIERDA

$\chi \in (-45°, 0°) \Rightarrow$ POLARIZACIÓN ELÍPTICA DE MANO DERECHA

EJEMPLO

DETERMINAR EL EDO DE POLARIZACIÓN DE UNA ONDA CON CAMPO ELÉCTRICO.

$$\vec{E}(z;t) = 3\cos(\omega t - kz + 30°)\hat{x} - 4\sin(\omega t - kz + 45°)\hat{y}$$

SOLUCIÓN. LO PASAMOS A COS (·)

$$\vec{E}(z;t) = 3\cos(\omega t - kz + 30°)\underset{\leftarrow \text{REF.}}{\hat{x}} + 4\cos(\omega t - kz + \overbrace{45° + 90°}^{135°})\hat{y}$$

LA DIFERENCIA DE FASE ENTRE LAS COMPONENTES x Y y ES:

$$\delta = \phi_y - \phi_x = 135° - 30° = \boxed{105° = \delta}$$

CON BASE EN δ Y ψ_0 CALCULAMOS EL ÁNGULO DE ELIPTICIDAD χ

$\cancel{\tan^{-1}\psi_0 = \frac{4}{3}}$

$\tan\psi_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow \psi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \psi_0 = 53.13^\circ$

$\operatorname{sen} 2\chi = (\operatorname{sen} 2\psi_0)\operatorname{sen}\delta = (\operatorname{sen}((2)(\underset{\psi_0}{53.13}))\operatorname{sen}(\underset{\delta}{105^\circ}) = 0.9272$

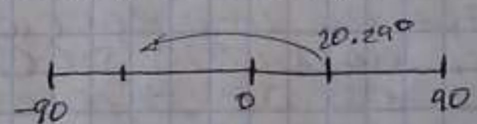
$\operatorname{sen}(2\chi) = 0.9272 \qquad \chi = \frac{\operatorname{sen}^{-1}(0.9272)}{2} = 34^\circ$

FINALMENTE CALCULAMOS EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN γ

$\cos\delta = \cos(105^\circ) = -0.25 < 0 \;\therefore\; \gamma < 0$

$\tan 2\gamma = (\tan 2\psi_0)\cos\delta = (\tan((2)(53.13^\circ))(-0.25) = 0.8571$

$\tan 2\gamma = 0.8571 \Rightarrow \gamma = \frac{\tan^{-1}(0.8571)}{2} = 20.29^\circ$

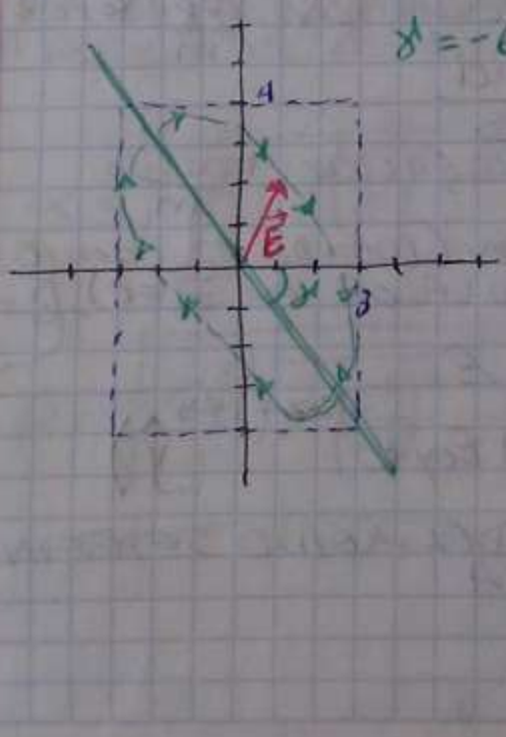


SI LA SOLUCIÓN DEBE SER $\gamma < 90^\circ$
PERO ES $\tan 2\gamma = 0.8571$ CON
$\gamma = 20.29$ SE LE RESTA $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

$\gamma - 90^\circ = 20.29^\circ - 90^\circ = -69.71^\circ \Rightarrow \gamma = -69.71^\circ$

$\therefore$ LA POLARIZACIÓN QUE TENEMOS ES ELÍPTICA DE MANO IZQUIERDA CON INCLINACIÓN DE -69.71°

$\gamma = -69.71^\circ$



EJEMPLO Determinar el estado de polarización de la onda con campo eléctrico cuyo fasor es:

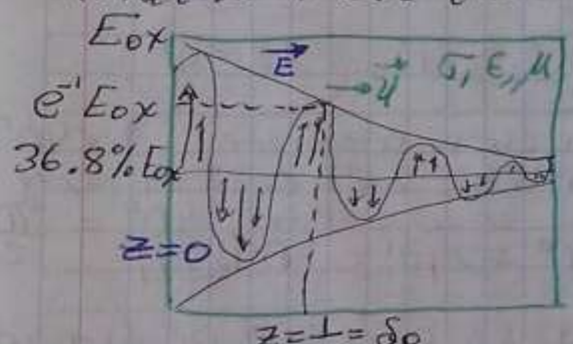
$$\vec{E}(z) = (3\hat{x} - 3j\hat{y})e^{-jkz}$$

$$E(z) = 3e^{-jkz}\hat{x} - 3je^{-jkz}\hat{y} = 3\cos(\omega t - kz) - 3\cos(\omega t - kz) \quad -90°$$

$\phi_y = -90 \quad \phi_x = 0$ Solución: Polarización de mano derecha

Propagación en medios con pérdidas.

En medios con pérdidas $(\sigma \neq 0)$ una onda EM se aleja de forma exponencial a medida que penetra en el.



Si la onda de campo EM se propaga en la dirección de z, su magnitud decae en términos de z considerando $z=0$ el punto de inicio

$$\vec{E}(z,t) = e^{-\alpha z}\left(E_{ox}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\hat{x} + E_{oy}(\omega t - \beta z + \phi_y)\hat{y}\right)$$

Donde:

α = Factor o coeficiente de atenuación $\frac{Np}{m}$ Np = Neper

ω = Frecuencia angular $\frac{rad}{s}$

β = Cte de fase o de propagación $\frac{rad}{m}$

δ = Profundidad de penetración (cuando el campo eléctrico cae un 36.8 % de su valor en $z=0$), $\delta = \frac{1}{\alpha}$

Su expresión fasorial de E

$$E(z) = e^{-\alpha z}\left(E_{ox}e^{-j\beta z + j\phi_x}\hat{x} + E_{oy}e^{-j\beta z + j\phi_y}\hat{y}\right)$$

Ahora la ~~tan~~ permitividad del medio se define como permitividad compleja

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

DONDE $\varepsilon' = \varepsilon$: PARTE REAL DE LA EC.

$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$: PARTE IMAGINARIA DE LA EC.

IGUALMENTE LA IMPEDANCIA INTRÍNSECA SE RESPETA MEDIANTE LA IMPEDANCIA INTRÍNSECA DEL MEDIO CON PÉRDIDAS O IMPEDANCIA INTRÍNSECA COMPLEJA.

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon' - j\varepsilon''}}$$

LA RELACIÓN ENTRE LOS FASORES DEL CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO ES:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_c}\hat{k} \times \vec{E} \qquad \vec{E} = -\eta_c \, k \times \vec{H}$$

UNA CONSECUENCIA DE UN MEDIO CON PÉRDIDAS EN LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EM ES EL DESFASE ENTRE EL CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

* CÁLCULO DE α Y β

EN EL CASO GENERAL, LOS VALORES DE α Y β SE OBTIENEN A PARTIR DEL CONOCIMIENTO DE $\omega, \varepsilon, \mu, \sigma$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1} \quad \left[\frac{Np}{m}\right]$$

OJO

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1} \quad \left[\frac{Np}{m}\right]$$

UNA CLASIFICACIÓN DE MATERIALES SE PUEDE REALIZAR A PARTIR DE LA RELACIÓN ~~$\sigma/\omega\varepsilon$~~ $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$, Y SIMPLIFICAR TAMBIÉN EL CÁLCULO DE α Y β

$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} > 100$ BUEN CONDUCTOR

EN ESTE CASO, LOS CÁLCULOS PARA α Y β SE SIMPLIFICAN

$$\alpha \simeq \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon''}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

OJO

$$\beta \simeq \alpha \simeq \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon''}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

$$\eta_c = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} = \sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\sigma}\,e^{j45^\circ}$$

PARA $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} < 0.01$ DIELÉCTRICO CON BAJAS PÉRDIDAS

OJO

$$\alpha \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\beta \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\eta_c \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

* Si $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} \in (0.01, 100)$ DEBERÁN EMPLEARSE LAS RELACIONES EXACTAS

EJEMPLO: UN CAMPO ELECTRICO SE PROPAGA EN AGUA DE MAR Y PARTE DE LA SUPERFICIE A EL FONDO EN $z=0^+$ SI PARA EL AGUA DE MAR

$\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$ $\sigma = 4\ \frac{S}{m}$ Y EL CAMPO ELÉCTRICO

EN $z=0^+$ ES : $\vec{E}(0;t) = 100\cos(\omega t + 15°)\ \hat{x}$

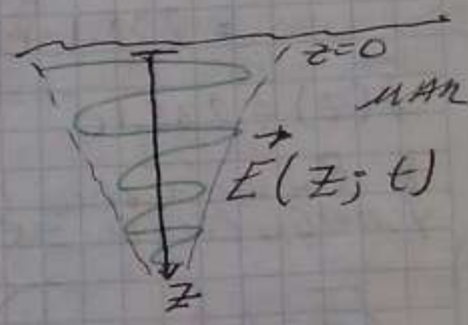
DETERMINAR SI $f = 1KHz$

i) LOS TÉRMINOS α, β, η

ii) LA PROFUNDIDAD DE PENETRACIÓN

iii) LA EXPRESIÓN DE CAMPO ELECTRICO

iv) LA EXPRESIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO



(1) $\varepsilon' = \varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = (80)(8.85\times10^{-12}) = 7.08\times10^{-10}$

$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} = \frac{4}{2\pi(1\times10^3)} = 6.36\times10^{-4}$

$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = 89\times10^4 > 100$ ∴ EL AGUA DE MAR ES UN BUEN CONDUCTOR A 1 KHZ

POR LO QUE:

$\alpha \simeq \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi(1kHz)(1)(\mu_0)(4)} = 1.2\ \frac{Np}{m}$

$\beta \simeq \sqrt{\pi f \mu \sigma} =\ \ //\ \ = 1.2\ \frac{rad}{m}$

$\eta_c = \sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\sigma}\,e^{j45°} = \sqrt{2}\left(\frac{1.2}{4}\right)e^{j45°} = 0.42\,e^{j45°}\ \Omega$

(2) δ_p = PROFUNDIDAD DE PENETRACIÓN $= \delta_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1.2} = 0.833\,m$

(3) EXPRESIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO

$\vec{E}(z;t) = e^{\alpha z}(E_{0x}\cos(\omega t - \beta z + \phi)\hat{x} + E_{0y}(\omega t - \beta z + \phi_y)\hat{y})$

$\vec{E}(z;t = e^{-1.2z}\,100\cos(2000\pi t - 1.2z + 15°)\hat{x}$

$$E(z) = 100e^{-1.2z}\,100\cos(2000\pi t - 1.2z + 15^\circ)\hat{x}$$

(4) - LA EXPRESIÓN CAMPO MAGNÉTICO

$$\vec{E}(z) = 100e^{-1.2z} e^{j(-1.2z+15^\circ)}\hat{x}$$

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta_c}\hat{k}\times\vec{E} = \frac{1}{0.42e^{j45^\circ}}100e^{-1.2z}e^{j(-1.2z+15^\circ)}\,y$$

$$= 238.1\,e^{-j45^\circ}e^{-1.2z}e^{j(-1.2z+15^\circ)} \qquad -45^\circ+15^\circ=-30^\circ$$

$$\vec{H}(z) = 238.1e^{-1.2z}\cos(2000\pi t - 1.2z - 30^\circ)\,\hat{y}$$

* EN UN MEDIO CON PÉRDIDAS EL CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO SE DEFASAN ENTRE SÍ.

EJERCICIO: DETERMINAR LA POTENCIA PROMEDIO DEL MISMO EJEMPLO.

$$\vec{S}_{prom} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}$$

SE CAMBIA SIGNO EN LA EXP. IMAG. DE $\vec{H}$ A $\vec{H}^*$ $e^{+j} \rightarrow e^{-j}$

OJO

$$\vec{H}^* = 238.1e^{-1.2z}e^{-j(-1.2+15^\circ-45^\circ)}\hat{y}$$

OJO SE CANCELAN

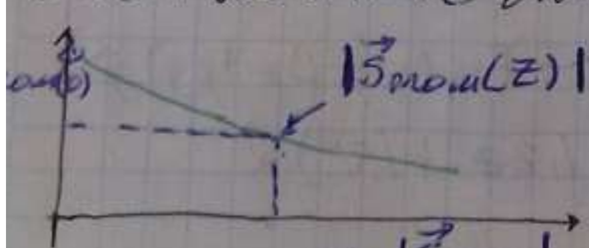
$$\vec{E}\times\vec{H}^* = (100e^{-1.2z}e^{j(-1.2z+15^\circ)})(238.1e^{-1.2z}e^{j(1.2z-15^\circ+45^\circ)})\hat{z}$$

$$= 23810e^{-2.4z}e^{j45^\circ}\hat{z}$$

$$S_{prom} = \frac{1}{2}(23810e^{-2.4z}\cos 45^\circ)\hat{z}$$

$$S_{prom} = 8418.1e^{-2.4z}\,\hat{z}\ \frac{W}{m^2} = |\vec{S}_{prom}(z)|$$

NOTAMOS QUE LA POTENCIA DECAE CON LA DISTANCIA EN UN MEDIO CON PÉRDIDAS, ES COMÚN COMPARAR DICHA CAÍDA MEDIANTE UNA RAZÓN



$$G = \frac{|\vec{S}_{prom}|}{|\vec{S}_{prom}(0)|}\ (1)$$ ADIMENSIONAL

DADO QUE EN SISTEMAS DE COMUNICACIONES INALAMBRICAS LA CAIDA SUELE SER MUY GDE, SE EMPLEA UNA ESCALA LOGARÍTMICA, CONOCIDA COMO bel.

LA RAZÓN DE CAIDA DE POTENCIA EN DECIBELES SE EXPRESA MEDIANTE.

$$G_{DB} = 10 \log_{10} G = 10 \log_{10} \left(\frac{|\vec{S}_{prom}(Z)|}{|\vec{S}_{prom}(0)|} \right) dB$$

EJEMPLO: PARA EL EJERCICIO ANTERIOR, CALCULAR LA RAZON DE CAIDA DE POTENCIA EN dB PARA LAS PROFUNDIDADES

$\delta_p = 0.833 m.$

$|\vec{S}_{prom}(0)| = 8418.1 \frac{W}{m^2}$

1) $Z = \delta_p$
2) $Z = 2\delta_p$
3) $Z = 5\delta_p$
4) $Z = 10\delta_p$
5) $Z = 20\delta_p$

$\to 8418.1 e^{-2.4(Z m)}$

Z_m	$\vert\vec{S}_{prom}(Z)\vert$	$G = \frac{\vert\vec{S}_{prom}(Z)\vert}{\vert\vec{S}_{prom}(0)\vert}$	$G_{DB} = 10\log_{10}(G)$
1) 0.833	1140	0.13	-8.86
2) 1.666	154.4	0.018	-17.44
3) 4.166	0.38	45×10^{-5}	-43.45
4) 8.333	1.74×10^{-5}	2.06×10^{-9}	-86.86
5) 16.66	3.6×10^{-14}	4.18×10^{-18}	-173.78

TAREA 3.4. 24 OCT. 40 puntos

7.1, 7.2, 7.4, 7.7, 7.8, 7.14, 7.15, 7.21, 7.25, 7.27, 7.30.

TAREA 3.4

7.1, 7.2, 7.4, 7.7, 7.8, 7.14, 7.15, 7.21, 7.25, 7.27, 7.30

7.1- EL CAMPO MAGNÉTICO ES $H = 30\cos(10^8 t - 0.5y)\,\hat{z}$ mA

CALCULAR a) LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE ONDA

b) LA VELOCIDAD DE FASE

c) LA LONGITUD DE ONDA EN EL MATERIAL

d) LA PERMITIVIDAD RELATIVA DEL MATERIAL

e) EL FASOR DE CAMPO ELÉCTRICO.

a) POSITIVO DIRECCIÓN $\hat{y}$

b) $\omega = 10^8$, $k = 0.5$

OJO u_p = VELOCIDAD DE FASE $= \frac{\omega}{k} = \frac{10^8}{0.5} = 2\times10^8$

c) LONGITUD DE ONDA EN EL MATERIAL $= \lambda$

$\frac{2\pi}{k}$ $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.56$

d) PERMITIVIDAD RELATIVA DEL MATERIAL ε_r $c = 3\times10^8$

$\varepsilon_r = \left(\frac{c}{u_p}\right)^2 = \left(\frac{3\times10^8}{2\times10^8}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$ $\mathbb{H} = \frac{1}{\eta_c}\hat{k}\times\vec{\mathbb{E}}$

e) FASOR DE CAMPO ELÉCTRICO

$\mu = 120\pi$ $\varepsilon = \varepsilon_r$

$\mathbb{E} = -\eta\,\hat{k}\times\mathbb{H}$ $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2.25}} = 251.33$

OJO $\hat{k} = \hat{y}$

$\mathbb{H} = 30e^{-j0.5y}\times10^{-3}\ A\ \hat{z}$

	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$
$-\eta$	0	-251.33	0
$\mathbb{H}$	0	0	$30e^{-j0.5y}\times10^{-3}$

$\mathbb{E} = -7.53e^{-j0.5y}\,\hat{x}$

7.2 ESCRIBA EXPRECCIONES GEN. PARA LOS CE Y CM

DE UNA ONDA PLANA SINOSOIDAL DE 1GHZ EN DIRECCION $+\hat{y}$ Y EN UN MEDIO NO MAGNET. SIN PERDIDAS CON PERMITIVIDAD RELATIVA $\varepsilon_r = 9$. EL C.E. ESTÁ POLARIZADO EN DIREC. $\hat{x}$ SU VALOR PICO = 6 V/m Y SU INTENSIDAD DE 4 V/m EN $t=0$ Y $y = 2$ cm.

$f = 1\,GHz,\ \varepsilon_r = 9,\ \mu_r = 1 \quad E = 4 \quad t = 0 \quad y = 2 \quad E_x = 6$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^9$ rad/s.

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{2\pi f}{C}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$$ OJO

$$\therefore K = \frac{2\pi \times 10^9}{3 \times 10^8}\sqrt{9} = 20\pi \text{ rad/m}$$

$$E = 6\cos(2\pi \times 10^9 t - 20\pi \hat{y} + \phi_0)$$

Como $t = 0$ y $y = 2\,cm = 0.02\,m$ $E = 4$.

$$4 = 6\cos(-20\pi(0.02) + \phi_0)$$

$$4 = 6\cos(-0.4\pi + \phi_0). \Rightarrow \frac{4}{6} = \cos(-0.4\pi + \phi_0).$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = -0.4\pi + \phi_0. \Rightarrow 0.84 + 0.4\pi = \phi_0$$

$\phi_0 = 2.097$ rad $\qquad \frac{180°}{\pi} = \frac{x}{2.097} \quad x = \frac{2.097(180)}{\pi} = 120.1°$

$$E = 6\cos(2\pi \times 10^9 t - 20\pi \hat{y} + 2.097\,\text{rad})$$

7.4 EL CAMPO ELEC. DE UNA ONDA PLANA QUE SE PROPAGA

$$E = [3\,\text{sen}(\pi\times10^7 t - 0.2\pi x)\hat{y} + 4\cos(\pi\times10^7 t - 0.2\pi x)\hat{z}]$$

a) LA LONGITUD DE ONDA $= \lambda$ $\quad k = 0.2\pi$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10$$

b) ε_r

OJO $\quad u_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad \therefore \quad \varepsilon_r = \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = \frac{(3\times10^8)0.2\pi}{\pi\times10^7} = 36$

c) H

$$H = \frac{1}{\eta}\hat{k}\times E = \frac{1}{\eta}\hat{x}\times[\underbrace{3\,\text{sen}(\pi\times10^7 t - 0.2\pi x)}_{a}\hat{y} + \underbrace{4\cos(\pi\times10^7 t - 0.2\pi x)}_{b}\hat{z}]$$

$\eta_0 = 120\pi$

OJO $\quad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{6} = 62.83\ \Omega$

$$\left.\begin{matrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{1}{62.83} & 0 & 0 \\ 0 & a & b \end{matrix}\right\} -\hat{y}\frac{1}{62.83}b + \hat{z}\frac{1}{62.83}a$$

$$H = \frac{3}{62.83}\text{sen}(\pi\times10^7 t - 0.2\pi x)\hat{z} - \frac{4}{62.83}\cos(\pi\times10^7 t - 0.2\pi x)\hat{y}$$

7.7 UNA ONDA POLAR. RHC CON UN MÓDULO DE $+2$ V/m $\hat{z}$ ESCRIBA LA EXPRECIÓN PARA EL VECTOR DE CE. DE LA ONDA DADO QUE LA LONGITUD DE ONDA ES DE 6 cm.

MODULO $|E| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 2$ V/m $\quad \therefore \quad a\sqrt{2} = 2 \therefore a = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$$E = a\cos(\omega t + kz)\hat{x} + a\sin(\omega t + kz)\hat{y}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.06} = 104.71\ \text{rad/m}$$

OJO

$$\omega = kc = (104.71)(3\times10^8) = \pi\times10^{10} = 3.1416\times10^{10}$$

$$E = \frac{2}{\sqrt{2}}\cos(\pi\times10^{10}t + 104.71z)\hat{x} + \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi\times10^{10}t + 104.71z)\hat{y}$$

7.8 PARA EL C.E.

$$E(z,t) = a_x \cos(\omega t - Kz)\hat{x} + a_y \cos(\omega t - Kz + \delta)\hat{y}$$

IDENTIFICAR EL EDO DE POLARIZACIÓN
DETERMINAR LOS ÁNGULOS DE POLARIZACIÓN (γ, χ)
TRAZAR EL LUGAR GEOMÉTRICO DE $E(0,t)$ PARA

a) $a_x = 3\ V/m$, $a_y = 4\ V/m$, y $\delta = 0$
b) $a_x =$ 〃 〃 〃 y $\delta = 180$
c) 〃 〃 〃 $\delta = 45^\circ$
d) 〃 〃 〃 $\delta = -135^\circ$

$$\psi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 0.9272\ \text{rad}$$

$$\frac{0.9272}{x} = \frac{\pi}{180}$$

$$x = \frac{(0.9272)180}{\pi} = 53.12^\circ$$

$$\tan 2\gamma = (\tan 2\psi_0)\cos\delta$$

$$\sin 2\chi = (\sin 2\psi_0)\sin\delta$$

$$\gamma = \frac{\tan^{-1}}{2}(\tan 2\psi_0)\cos\delta = \psi_0\cos\delta$$

$$\chi = \frac{\sin^{-1}}{2}(\sin 2\psi_0)\sin\delta = \psi_0\sin\delta$$

TABLA.

a_x	a_y	δ	ψ_0	γ	χ	
3	4	0	53.12	53.12	0	LINEAL
3	4	180	53.12	-53.12	0	LINEAL
3	4	45	53.12	37.56	37.56	LHC
3	4	-135	53.12	-37.56	-37.56	RHC

7.14 Con cada combinación de parámetros determinar tipo de dieléctrico.

Calcular $\alpha, \beta, \lambda, u_p$ y η_c:

a) $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 5$, $\sigma = 10^{-12}$ S/m a 10 GHz (Vidrio)

b) $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 12$, $\sigma = 0.3$ S/m a 100 MHz (Tejido Animal)

c) $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 3$, $\sigma = 10^{-4}$ S/m a 1 KHz.

TABLA 7-1.

	Cualquier medio	Medio sin pérdidas ($\sigma = 0$)	Medio de bajas pérdidas ($\varepsilon''/\varepsilon' \ll 1$)	Buen conductor ($\varepsilon''/\varepsilon' \gg 1$)
$\alpha =$	$\omega\left[\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2}-1\right]\right]^{1/2}$	0	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\pi f \mu \sigma}$
$\beta =$	$\omega\left[\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2}+1\right]\right]^{1/2}$	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\sqrt{\pi f \mu \sigma}$
$\eta_c =$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$(1+j)\frac{\alpha}{\sigma}$
$u_p =$	ω/β	$1/\sqrt{\mu\varepsilon}$	$1/\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\sqrt{4\pi f/\mu\sigma}$
$\lambda =$	$2\pi/\beta = u_p/f$	u_p/f	u_p/f	u_p/f

$\varepsilon' = \varepsilon$, $\varepsilon'' = \sigma/\omega$, En espacio libre $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$

Baja pérdida si $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \sigma/\omega\varepsilon < 0.01$, Buen conductor si $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} > 10$

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi$ $\quad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ $\quad \mu = \mu_0$ $\quad \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ $\quad \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$

$\omega = 2\pi(10\times10^9) = 6\,283\,185\,307 = 6.27522\times10^{10}$

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma/\omega}{8.85\times10^{-12}} = \frac{10^{-12}/\omega}{8.85\times10^{-12}} = \frac{1.59\times10^{-22}}{8.85\times10^{-12}} = 1.7983\times10^{-11} \ll 1 \therefore \text{Bajas Pérdidas}$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{10^{-12}}{2}\sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}} = 3.72\times10^{-21}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi(10\times10^9)\sqrt{4\pi\times10^{-7}(5)(8.85\times10^{-12})} = 1.54\times10^{-4} = 468.3$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{468.3} = 1.34\times10^{-2}$$

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = 1.34\times10^{8}$$

7.15 EL SUELO SECO TIENE LAS SIG CARACTERISTICAS.

$\varepsilon_r = 2.5$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 10^{-4}$ (S/m)

SEGUN SU FRECUENCIA DETERMINAR $\beta, \lambda, \alpha, u_p$ y η_c

7.21 = EL CAMPO ELEC DE UNA ONDA PLANA

$$E = 25e^{-30x}\cos(2\pi \times 10^9 t - 40x)\hat{z}$$

OBTENER H

$$\mathbb{E} = 25e^{-30x}e^{-j40x}\hat{z}$$

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\eta_c}\hat{k} \times \mathbb{E}$$ OJO

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{120\pi}{2.5}} \quad \mu = 120\pi \quad \varepsilon = \varepsilon_r = 2.5 \quad = 12.28$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{1}{12.28} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25e^{-30x}e^{-j40x} \end{matrix}\right\} \hat{y}\frac{1}{12.28}25e^{-30x}e^{-j40x} = 19.53e^{-30x}e^{-j40x}\hat{y}$$

$$H = 19.53e^{-30x}\cos(2\pi \times 10^9 t - 40x)\hat{y}$$

$$\eta_c = \sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma}e^{j45°}$$ OJO

7.25.- EL CM DE UNA ONDA PLANA VIAJA EN EL AIRE ES

$$H = 50\,\text{sen}(2\pi \times 10^7 t - Ky)\hat{x} \text{ mA/m}$$

DETERMINAR LA DENSIDAD ~~DE POTENCIA~~ PROMEDIO QUE TRANSPORTA LA ONDA.

$$\eta_0 = 120\pi$$

$$E = \cancel{\quad} = -\eta_0\hat{k} \times H = \eta_0 H\hat{z} = \eta_0 50\,\text{sen}(2\pi \times 10^7 t - Ky)$$

$$\begin{matrix} x & y & z \\ 0 & \eta_0 & 0 \\ H & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$S_{AV} = \eta_0\frac{50^2}{2} \times 10^{-6}.$$

7.17 EL FASOR DE C.E. VIAJA ABAJO DEL AGUA

$\mathbb{E} = 5e^{-0.2z} e^{-j0.2z}\hat{x}$

$\hat{z}$ ES LA DIRECCIÓN HACIA ABAJO Y $z=0$ ES LA SUPERFICIE DEL AGUA $\sigma = 4$ S/m

a) Obtener la expresión PARA LA DENSIDAD DE POTENCIA PROMEDIO

b) LA TASA DE ATENUACIÓN.

c) LA PROFUNDIDAD A LA CUAL LA DENSIDAD DE POTENCIA SE REDUCE A 40 dB.

a) $\alpha = \beta = 0.2$

$\eta_c = (1+j)\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = (1+j)\,0.05 = \sqrt{0.05^2+0.05^2}\, e^{-j\tan^{-1}(1)}$

$\eta_c = 0.0707\, e^{j45°}$ — $\theta_\eta =$ OJO

$S_{AV} = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \hat{z} = \frac{25}{2(0.0707)} e^{-0.4z} \cos 45° = 125.01 e^{-0.4z}$

OJO

b) $A = -8.68\alpha z = -8.68(0.2)z = -1.74z$

c) $40\text{ dB} \approx 10^{-4}$ $\therefore$ $10^{-4} = e^{-2\alpha z}$ $\Rightarrow$ $z = \frac{\ln(10^{-4})}{-0.4}$

$z = 23.03$ m.

7.30 - MICROONDAS, LA DENSIDAD DE POTENCIA SEGURA $= S_{AV} = \frac{|E(R)|^2}{2\eta_0}$ ES DE 1 mW/cm². UN RADAR ~~IRRADIA UNA ONDA~~ AMPLITUD DE C.E. E, QUE SE REDUCE CON LA DISTANCIA COMO $E(R) = (3{,}000/R)$ V/m, donde R ES LA DISTANCIA EN METROS.

CUAN ES LA DISTANCIA DE LA REGIÓN NO SEGURA?

$S_{AV} = 1\times10^{-3}\ \frac{W}{cm^2} = 10\ \frac{W}{m^2} = \frac{1\times10^{-3}}{(0.01^2)} = 10$ $\quad \eta_0 = 120\pi$

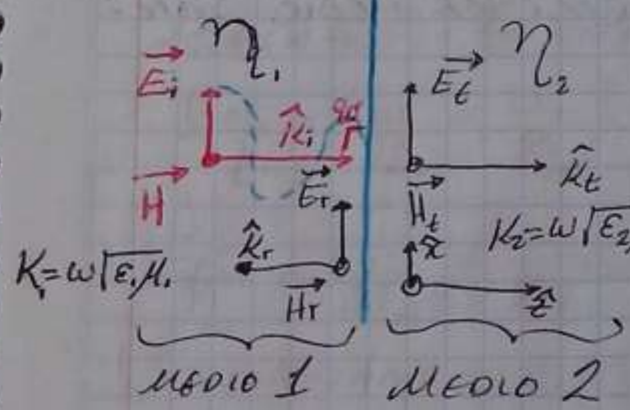
$S_{AV} = \frac{|E(R)|^2}{2\eta_0} = \left(\frac{3000}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2)(120\pi)} = 10$

$R = \left(\frac{1.2\times10^4}{10}\right)^{1/2} = 34.64$ m.

CUARTO EXAMEN 20/OCT/2014

REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN.

DE ONDAS EN EL MEDIO SIN PÉRDIDAS
CONSIDERE AHORA EL CASO EN EL CUAL UNA ONDA QUE VIAJA POR UN MEDIO CON IMPEDANCIA INSTANTANEA η_1 INCIDE DE FORMA NORMAL EN LA FRONTERA CON UN MEDIO. DE IMPEDANCIA INTRÍNSECA.



SI EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO INCIDE ESTÁ DADO POR $\vec{E}_i$, $\vec{H}_i$

AL CHOCAR CON LA FRONTERA SE REFLEJARAN $\vec{E}_r$, $\vec{H}_r$

AL MISMO MEDIO Y OTRA PARTE SE TRANSMITIRÁ AL SEGUNDO MEDIO $(\vec{E}_t, \vec{H}_t)$

PARA CAMPOS REFLEJADOS = CONDICIONES DE FRONTERA PARA CAMPOS EM

INCIDENCIA ~~NATURAL~~ NORMAL LAS UNICAS SERAN TANGENCIALES SERAN IGUALES PARA $\vec{E}$ Y $\vec{H}$.

EJEM PARA FINES DE PRESENTACIÓN CONSIDEREMOS EL CAMPO INCIDENTE

$$E_i(z;t) = E_{oi}\cos(\omega t - K_1 z)\hat{x}$$

$$H_i(z;t) = \frac{E_{oi}}{\eta_1}\cos(\omega t - K_1 z)\hat{y} \qquad H_o = \frac{E_o}{\eta_1}$$

QUE VIAJA EN $\hat{z}$ DONDE LA FRONTERA SE ENCUENTRA EN EL PLANO XY
POR LO TANTO, EL CAMPO REFLEJADO SERÁ:

$$\vec{E}_r = E_{or}\cos(\omega t + K_1 z)\hat{x} \quad , \quad \hat{k}_r = -\hat{z}$$

$$\vec{H}_r = \cancel{H_{or}}\cos(\omega t + K_1 z)\hat{y}$$

$$= -\frac{E_{or}}{\eta}\cos(\omega t + K_1 z)\hat{y}$$

Y EL CAMPO TRANSMITIDO:

$$\vec{E_t} = E_{0t} \cos(\omega t - K_2 z)\,\hat{x}$$

$$\vec{H_t} = H_{0t} \cos(\omega t - K_2 z)\,\hat{y}$$

LOS CAMPOS TOTALES EN CADA MEDIO SON:

(1) MEDIO 1 $= \vec{E_1} = \vec{E_i} + \vec{E_r}$

$$\vec{H_i} = \vec{H_i} + \vec{H_r}$$

(2) ~~CAMPO~~ = MEDIO (2)

$$\vec{E_2} = \vec{E_t}$$

$$\vec{H_2} = \vec{H_t}$$

ES DECIR

$$\vec{E_1} = E_{0i} \cos(\omega t - K_1 z)\,\hat{x} + E_{0r} \cos(\omega t + K_1 z)\,\hat{x}$$

$$\vec{E_2} = E_{0t} \cos(\omega t - K_2 z)\,\hat{x}$$

SI LA FRONTERA ESTA EN $z=0$ ENTONCES:

$$\vec{E_1}(z=0) = \vec{E_2}(z=0)$$

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad \ldots \text{EC 1}$$

POR OTRO LADO PARA EL CAMPO MAGNÉTICO:

$$\vec{H_1} = \vec{H_i} + \vec{H_r}$$

$$= \frac{E_{0i}}{\eta_1} \cos(\omega t - K_1 z)\,\hat{y} - \frac{E_{0r}}{\eta_1} \cos(\omega t + K_1 z)\,\hat{y}$$

$$\vec{H_2} = \vec{H_t} = \frac{E_{0t}}{\eta_2} \cos(\omega t - K z)\,\hat{y}$$

EN LA FRONTERA · $z=0$

$$\vec{H}_1(z=0) = \vec{H}_2(z=0)$$

$$\frac{E_{oi}}{\eta_1} - \frac{E_{or}}{\eta_1} = \frac{E_{ot}}{\eta_2} \quad \text{--- EC. 2}$$

EN AMBAS DESPEJAMOS A E_{or} Y E_{ot}

IGUALAMOS EN LAS DOS EC. A E_{ot}

$$\frac{E_{oi}}{\eta_1} - \frac{E_{or}}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_2}(E_{oi} + E_{or})$$

$$\frac{E_{oi}}{\eta_1} - \frac{E_{oi}}{\eta_2} = \frac{1}{\eta_1}E_{or} + \frac{1}{\eta_2}E_{or}$$

DESPEJANDO Y FACTOR COMÚN

$$\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1\eta_2}\right)E_{oi} = \left(\frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_1\eta_2}\right)E_{or}$$

$$\boxed{E_{or} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \cdot E_{oi}}$$

OJO

INCIDENCIA NATURAL

NORMALMENTE SE DEFINE A EL COEFICIENTE DE REFLEXIÓN $\Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ COMO

$\therefore$ $E_{or} = \Gamma E_{oi}$

PARA DETERMINAR EL CAMPO TRANSMITIDO DE LA EC. 1

$$E_{oi} + \Gamma E_{oi} = E_{ot} \qquad \therefore E_{ot} = \tau E_{oi}$$

$E_{ot} = (1 + \Gamma)E_{oi}$ LO QUE CONOCEMOS COMO

$$\tau = 1 - \Gamma = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$ = COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN

OJO

INCIDENCIA NORMAL

$\therefore E_{ot} = \tau E_{oi}$

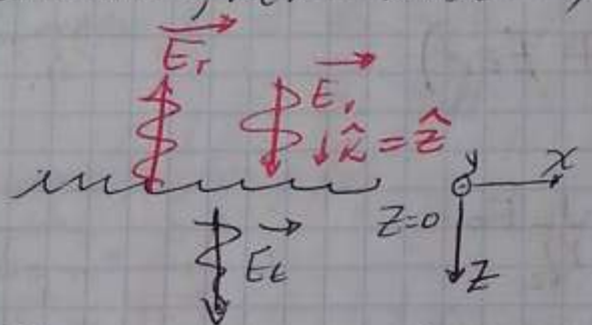
$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$
$\varepsilon_o = 8.85 \times 10^{-12}$

EJEM: UNA ONDA EM QUE VIAJA EN EL AIRE CON CAMPO

$\vec{E_i} = 4\cos(10^6 \cdot 2\pi t - K_1 z)\hat{x}$

INCIDE EN EL AGUA $(\varepsilon_r = 80,\ \mu_r = 1)$

EN FORMA NORMAL EN $z = 0$ DETERMINAR LAS EC. PARA LOS CAMPOS ELECTRICOS Y MAGNÉTICOS INCIDENTES, REFLEJADO Y TRANSMITIDO



$\omega = 10^6 \cdot 2\pi$

$K_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_r \varepsilon_o$

$\varepsilon_2 = (80)(8.85 \times 10^{-12})$

$\mu_2 = \mu_r \mu_o = (1)(4\pi \times 10^{-7})$

$\varepsilon_1 = 7.08 \times 10^{-10}$

$\mu_1 = 4\pi \times 10^{-7}$

$K_2 = \omega\sqrt{}$

SOLUCIÓN.

$\eta_1 = 377\,\Omega$

$\eta_2 = 42.15\,\Omega$

$K_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} = 0.1874\ \frac{rad}{m.}$

$K_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = 0.021\ \frac{rad}{m.}$

$\Gamma = -0.8$

$\tau = 0.2$

$E_{or} = -3.2$

$E_{ot} = 0.8.$

$\vec{E_i} = 4\cos(2\pi \times 10^6 t - 0.021 z)\hat{x}$

$\vec{E_r} = -3.2\cos(2\pi \times 10^6 t + 0.021 z)\hat{x}$

$\vec{E_t} = 0.8\cos(2\pi \times 10^6 t - 0.187 z)\hat{x}$

Incidencia Oblicua: Leyes de Snell

Consideremos que incide con un ángulo θ_i con respecto a la normal a la frontera entre dos medios con distintas permitividades y permitividades y permeabilidades:

(1) ε_1, μ_1 (2) ε_2, μ_2

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}$ $u_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$

Para determinar cuales serán los ángulos de reflexión θ_r y de transmisión θ_t con respecto a la normal a la frontera, analizamos las velocidades de propagación en cada medio.

(1) $u_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}$ (2) $u_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} = \frac{c}{n_2}$, $n_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}}$

$u_1 = \frac{c}{n_1}$, $n_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_{r1}}}$

Sabemos que la velocidad de propagación en cada medio depende del índice de refracción del medio

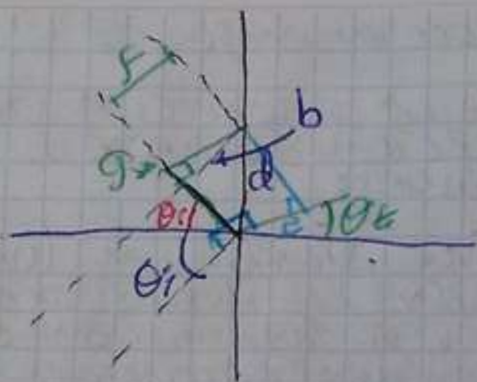
$n_1 = \sqrt{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}$ $n_2 = \sqrt{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}$

$u_{p1} = \frac{c}{n_1}$, $u_{p2} = \frac{c}{n_2}$

Y dicha velocidad es:

$$u_p = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} \therefore \text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Si consideramos el tiempo que transcurre entre que el primer haz $\hat{k}_i$ incide en la frontera hasta que el segundo también incide:



$$t = \frac{b}{v_{p_1}} = \frac{g}{v_{p_1}} = \frac{e}{v_{p_2}}$$

$$\left.\begin{aligned} b &= d\cos(90^\circ-\theta_i) = d\sin\theta_i \\ g &= d\cos(90^\circ-\theta_r) = d\sin\theta_r \\ e &= d\cos(90^\circ-\theta_t) = d\sin\theta_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{b}{v_{p_1}} = \frac{g}{v_{p_1}} = \frac{\cancel{d}\sin\theta_1}{\cancel{v_{p_1}}} = \frac{\cancel{d}\sin\theta_r}{\cancel{v_{p_1}}}$$

$$\frac{b}{v_{p_1}} = \frac{e}{v_{p_2}} = \frac{\cancel{d}\sin\theta_1}{v_{p_1}} = \frac{\cancel{d}\sin\theta_t}{v_{p_2}} \qquad \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{v_{p_2}}{v_{p_1}} = \frac{\frac{c}{n_2}}{\frac{c}{n_1}}$$

LEY DE SNELL

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin\theta_i = \sin\theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r \\ &\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2} \end{aligned}}$$

OJO

EJEM. CALCULAR LOS ÁNGULOS DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE UNA ONDA E.M. QUE INCIDE DE AIRE EN AGUA.

$n_{aire} = 1 \quad n_{agua} = 1.33$

$\theta_t = \sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i$

θ_i	θ_r	θ_t
0°	0°	0°
15°	15°	11.2
20°	20°	14.9
45°	45°	32.11
60°	60°	40.6
80°	80°	47.7.

$\sin\theta_t = \frac{1}{1.33}\sin(15°)$

$\theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1.33}\sin(15°)\right)$

CALCULAR LOS ÁNGULOS DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE UNA ONDA QUE INCIDE DE AGUA EN AIRE:

θ_i	θ_r	θ_t
0°	0°	0°
15°	15°	20.13°
20°	20°	27.05°
45°	45°	70.12°
48°	48°	81.25°
50°	50°	—
60°	60°	—
80°	80°	—

$\sin\theta = \frac{1.33}{1}\sin 15°$

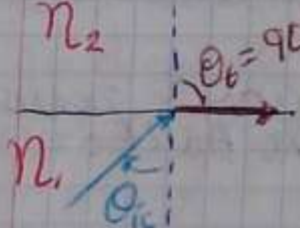
$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1.33}{1}\sin 15°\right)$

ÁNGULO CRÍTICO Y APLICACIÓN EN FIBRAS ÓPTICAS

EL ÁNGULO CRÍTICO OCURRE CUANDO EN UN MEDIO CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN n_1 UN HAZ DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN n_2 EN UN ÁNGULO TAL QUE NO EXISTE TRANSMISIÓN AL SEGUNDO MEDIO Y SOLAMENTE REFLEXIÓN CUANDO $n_2 < n_1$, CONOCIDO COMO DE REFLEXIÓN TOTAL

EN ESTE CASO SE DEFINE AL ÁNGULO CRÍTICO COMO EL ÁNGULO DE INCIDENCIA

θ_{ic} PARA EL CUAL $\theta_t = 90°$ OJO



A PARTIR DE LEY DE SNELL

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}\cdot\sin\theta_t$$

SI $\theta_i = \theta_c \Rightarrow \theta_t = 90°$

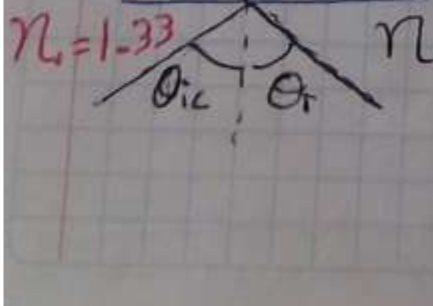
$$\therefore \sin\theta_{ic} = \frac{n_2}{n_1}$$

OJO

$$\theta_{ic} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad n_2 < n_1$$

CUALQUIER INCIDENCIA EN UN ÁNGULO SUPERIOR A θ_{ic} RESULTARÁ EN REFLEXIÓN TOTAL, SIN TRANSMISIÓN AL SEGUNDO MEDIO.

EJEM: DETERMINAR EL ÁNGULO CRÍTICO DE LA INTERFASE AIRE-AGUA



n_2 = AIRE

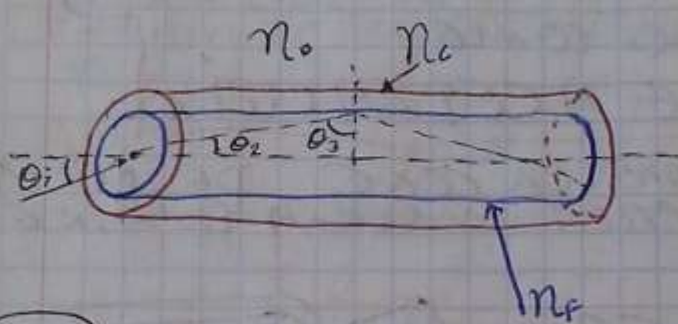
n_1 = AGUA

$$\theta_{ic} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1.33}\right)$$

$$\theta_{ic} = 48.75°$$

APLICACIÓN: FIBRA ÓPTICAS.

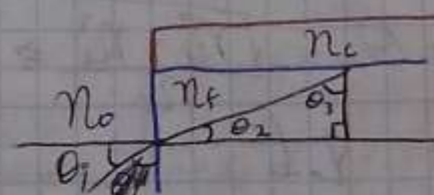
UNA FIBRA ÓPTICA ES UN DISPOSITIVO COMPUESTO DE UN MATERIAL TRANSPARENTE, PARA LUZ A UNA CIERTA FRECUENCIA RECUBIERTO DE UN BARNIZ PROTECTOR Y REFLEJANTE:



LOS INDICES DE REFRACCIÓN DEL MEDIO, LA FIBRA Y LA CAPA DE BARNIZ SON n_0, n_f y n_c RESPECTIVAMENTE DONDE ADEMAS DEBE CUMPLIRSE QUE $n_c < n_f$

BUSQUEMOS QUE ÁNGULO θ_i DE INCIDENCIA ENTRE n_0 y n_f ES NECESARIA PARA GARANTIZAR LA REFLEXIÓN INTERNA TOTAL ENTRE n_c Y n_f:

EL ANGULO CRÍTICO ENTRE n_f Y n_c CUMPLE QUE:



$$\sin \theta_{3c} = \frac{n_c}{n_f}$$

DONDE EL ÁNGULO DE TRANSMISIÓN ENTRE n_0 y n_f DEBE SER:

$$\theta_{2c} = 90° - \theta_{3c} \qquad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(90° - \theta_{2c}) = \frac{n_c}{n_f} \qquad \therefore = 1 \cdot \cos\theta_{2c} - 0 \cancel{\sin(\theta_{2c})} = \cos\theta_{2c}$$

PARA ENCONTRAR θ_{ic} DE LA LEY DE SNELL:

$$\frac{\sin\theta_{2c}}{\sin\theta_{ic}} = \frac{n_0}{n_f} \Rightarrow \sin\theta_{ic} = \frac{n_f}{n_0}\sin\theta_{2c}$$

COMO: $\cos\theta_{2c} = \frac{n_c}{n_f}$ Y COMO $\sin^2\theta_{2c} + \cos^2\theta_{2c} = 1$

$$\sin^2\theta_{2c} = 1 - \cos^2\theta_{2c} \Rightarrow \sin\theta_{2c} = \sqrt{1 - \frac{n_c^2}{n_f^2}}$$

ENTONCES $\boxed{\sin\theta_{ic} = \frac{\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{n_0}}$ OJO

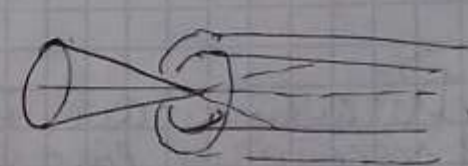
CUALQUIER ÁNGULO DE INCIDENCIA ENTRE EL MEDIO n_0 Y LA FIBRA n_f QUE SEA MAYOR QUE θ_{ic} NO TENDRÁ REFLEXIÓN INTERNA TOTAL, MIENTRAS QUE SI $\theta_i \leq \theta_{ic}$ SE GARANTIZA REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

LO CUAL ES CONOCIDO COMO

CONO DE ACEPTACIÓN

EJEM. DETERMINAR EL CONO DE ACEPTACIÓN DE UNA FIBRA ÓPTICA INMERSA EN AIRE DONDE

$n_c = 1.49$, $n_f = 1.52$



SOLUCIÓN

$$\sin\theta_{ic} = \frac{\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{n_0} \Rightarrow \theta_{ic} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{1.52^2 - 1.49^2}}{1}\right) = 17.48^\circ$$

TAREA 4.1

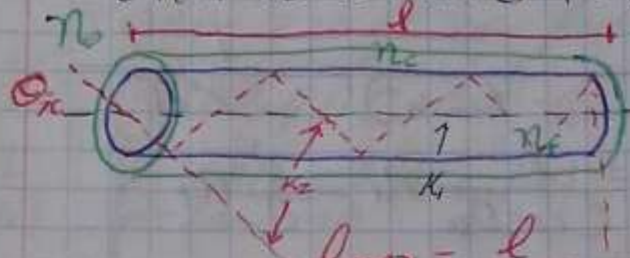
8.1, 8.3, 8.5, 8.17, 8.18, 8.20, 8.22, 8.23, 8.24
8.29.

TAREA 4.2

2.1, 2.2, 2.3, 2.6, 2.11, 2.50, 2.51, 2.52, 2.54
2.55.

Aplicación Fibras Ópticas. y Velocidad de Transmisión

Dada una fibra óptica con índices de refracción n_0, n_f, n_c del medio la fibra y la capa de barniz protector respectivamente,

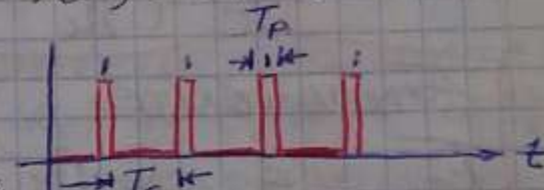


$$l_{max} = \frac{l}{\cos\theta_{ic}}$$

La velocidad de propagación de la onda EM en su interior es:

$$v_f = \frac{c}{n_f}$$

La transmisión de datos al interior de una fibra óptica se da mediante pulsos de duración T_p en intervalos regulares $T_s \left[\frac{s}{bit}\right]$



La frecuencia de transmisión F_s en $\frac{bit}{s}$ o bps. es entonces

$$F_s = \frac{1}{T_s} \text{ bps.}$$

La distancia mínima que puede recorrer un haz de ondas EM es:

$$l_{min} = l \text{ en un tiempo } t_{min} = \frac{l_{min}}{V_f} = \frac{l}{c} n_f$$

La distancia máxima que puede recorrer es:

$$l_{max} = \frac{l}{\cos\theta_{2c}} \text{ en un tiempo } t_{max} = \frac{l_{max}}{V_f} = \frac{l}{c \cdot \cos\theta_{2c}} n_f$$

$$\Delta T = t_{max} - t_{min}$$

PARA EVITAR INTERFERENCIA EN TIEMPO ENTRE LOS HACES RECIBIDOS EL TIEMPO ENTRE PULSOS DEBE SER

$$T_s = 2(t_{máx} - t_{min}) = 2\Delta t$$

$$\therefore F_{smax} = \frac{1}{T_{smin}} = \frac{1}{2(t_{max} - t_{min})} = \frac{1}{2\Delta T}.$$

COMO $\Delta T = t_{máx} - t_{min} = \frac{l}{c\cos\theta_{2c}} n_f - \frac{l}{c} n_f$

$$= \frac{l n_f}{c}\left(\frac{1}{\cos\theta_{2c}} - 1\right) \Rightarrow \cos\theta_{2c} = \frac{n_c}{n_f}$$

$$\therefore \Delta T = \frac{l n_f}{c}\left(\frac{n_f}{n_c} - 1\right) = \frac{l n_f}{c}\left(\frac{n_f - n_c}{n_c}\right)$$

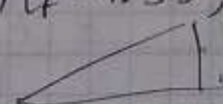
FINALMENTE

$$\boxed{F_{smax} = \frac{c\, n_c}{2 l\, n_f (n_f - n_c)} \ \frac{bit}{s} \text{ ó } bps.}$$

OJO

EJEM. DETERMINAR LA FRECUENCIA MÁXIMA DE TRANSMISIÓN DE UNA FIBRA ÓPTICA PARA:

1) n_0: aire, $n_f = 1.55$, $n_c = 1.49$, $l = 1 Km$

$\theta_{ic} = 15.99.$  $F_{smáx} = c\left(\frac{1.49}{2(1000)1.55(1.55-1.49)}\right) = c\,8.01\times$

$\frac{1000}{0.96} = h = \frac{l}{\cos\theta_{2c}}$ $\cos\theta_{2c} = \frac{n_c}{n_f} \Rightarrow$ $\theta_{2c} = \cos^{-1}\left(\frac{1.49}{1.55}\right) = 15.99.$

2) n_0 = AGUA = 1.33, $n_f = 1.55$, $n_c = 1.49$, $l = 1 Km$

$\theta_{ic} = 18.73°$ $F_{smax} = 2.4$ Mbps.

3) n_0 = AGUA, $n_f = 1.55$, $n_c = 1.52$, $l = 1 Km$.

θ_{ic} = $F_{smax} = 4.9$ Mbps.

Incidencia Oblicua de Campos EM

Ya que analizamos el comportamiento de las direcciones de propagación de los campos EM ahora el comportamiento de las componentes de las ondas EM.

Para fines de análisis consideremos que la frontera es el plano XY y la dirección de propagación es sobre el plano XZ.

Un campo EM que se propaga en el plano XZ tendrá una dirección de propagación e incide en el plano XY

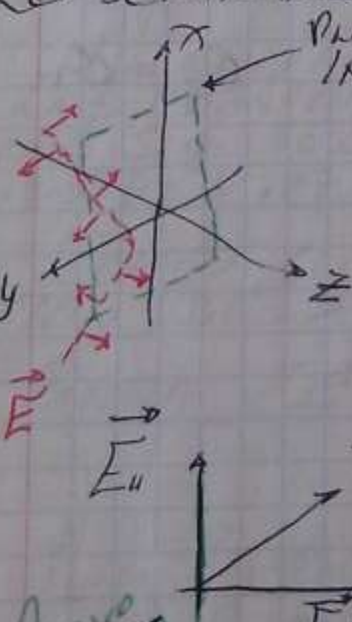
$$\hat{k}_i = \sin\theta_i \,\hat{x} + \cos\theta_i \,\hat{z}$$

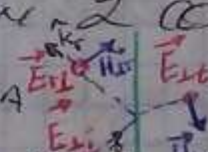
La onda reflejada viaja en dirección $\hat{k}_r = \sin\theta_r \,\hat{x} - \cos\theta_r \,\hat{z}$

La onda transmitida viaja en dirección

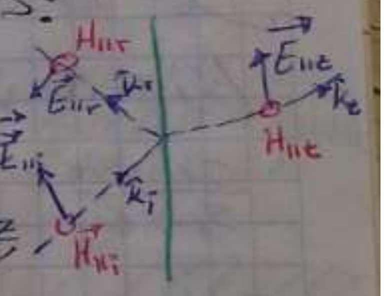
$$\hat{k}_t = \sin\theta_t \,\hat{x} + \cos\theta_t \,\hat{z}$$

Para simplificar el análisis, todo campo EM lo separaremos en 2 componentes:





$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_{normal\,xz}}_{\vec{E}_\perp} + \underbrace{\vec{E}_{tangencial\,xz}}_{\vec{E}_\parallel}$$

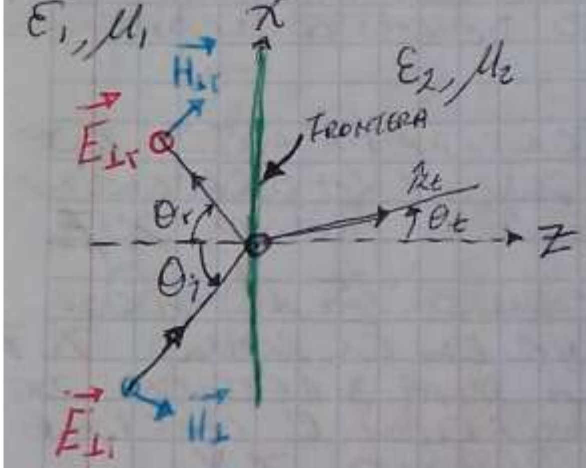


Es decir: aquella componente $\vec{E}_\perp$ es conocida como transversal eléctrica o TE.

Mientras que $\vec{E}_\parallel$ se llama transversal magnética TM:

INCIDENCIA OBLICUA

ONDA TE



SI EL PLANO DE PROPAGACIÓN ES EL PLANO XZ, ENTONCES LA COMPONENTE TRANSVERSAL DEL CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E_i}$ SERÁ:

$$\vec{E}_{\perp i} = E_{\perp 0_i} \cos\left(\omega t - k_1 (\cos\theta_i x + \sin\theta_i z) + \phi_{E_{\perp i}}\right) \hat{y}$$

PARA EL CAMPO REFLEJADO

$$E_{\perp r} = E_{\perp 0_r} \cos(\omega t - k_1(\cos\theta_r x - \sin\theta_r z) + \phi_{E_{\perp r}}) \hat{y}$$

Y PARA EL CAMPO TRANSMITIDO:

$$E_{\perp t} = E_{\perp 0_t} \cos(\omega t - k_2 (\cos\theta_t x + \sin\theta_t z) + \phi_{E_{\perp t}}) \hat{y}$$

DE RESULTADOS ANTERIORES SABEMOS QUE

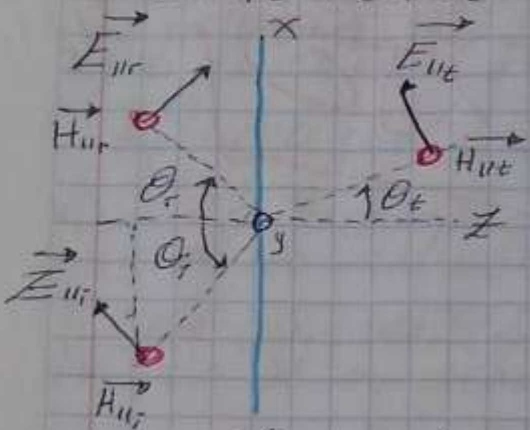
$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \quad , \quad k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \qquad \theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_1}\mu_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}\mu_{r_2}}} = \frac{n_2}{n_1}$$

COMO: $v_{p_1} = \dfrac{c}{n_1}$, $v_{p_2} = \dfrac{c}{n_2}$

$$= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}\mu_{r_1}}} \qquad = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}\mu_{r_2}}}$$

COMPONENTE TM



EN ESTE CASO EL CAMPO ELÉCTRICO POSEE COMPONENTES EN X Y Z

CAMPO INCIDENTE

$$\vec{E}_{\parallel i} = E_{\parallel 0 i}\left(-\sin\theta_i \hat{z} + \cos\theta_i \hat{x}\right)\cdot\cos\left(\omega t - k_1\left(\sin\theta_i \hat{x} + \cos\theta_i \hat{z}\right) + \phi_{E\parallel i}\right)$$

CAMPO REFLEJADO

$$\vec{E}_{\parallel r} = E_{\parallel 0 r}\left(\sin\theta_r \hat{z} + \cos\theta_r \hat{x}\right)\cdot\cos\left(\omega t - k_1\left(\sin\theta_r x - \cos\theta_r z\right) + \phi_{E\parallel r}\right)$$

CAMPO TRANSMITIDO

$$E_{\parallel t} = E_{\parallel 0 t}\left(-\sin\theta_i \hat{z} + \cos\theta_i \hat{x}\right)\cdot\cos\left(\omega t - k_2\left(\sin\theta_t x + \cos\theta_t z\right) + \phi_{E\parallel t}\right)$$

COHEFICIENTE DE REFLEXIÓN DE ONDAS TE Y TM

AL INICIAR EN UNA FRONTERA ENTRE DOS MEDIOS, LAS COMPONENTES TE Y TM DE UNA ONDA TENDRÁN LAS SIG. RELACIONES EN FUNCIÓN DE LA ONDA INCIDENTE

COHEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN DE FRESNEL PARA ONDAS TE Y TM:

ONDA TE: $E_{\perp r0} = \Gamma_\perp E_{\perp i0}$

$E_{\perp t0} = \tau_\perp E_{\perp i0}$

OJO

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \qquad \tau_\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$\tau_\perp = 1 + \Gamma_\perp$$

ONDAS TM:

$$E_{\parallel r_0} = \Gamma_{\parallel} E_{\parallel i_0}$$
$$E_{\parallel t_0} = \tau_{\parallel} E_{\parallel i_0}$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

$$\tau_{\parallel} = (1 + \Gamma_{\parallel}) \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}$$

OJO

ÁNGULO DE BREWSTER

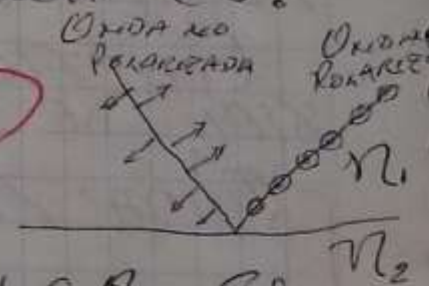
LOS COEFICIENTES DE REFLEXIÓN NO SÓLO DEPENDEN DE LAS IMPEDANCIAS DEL MEDIO, SINO TAMBIÉN DEL ÁNGULO DE INSIDENCIA EN LA FRONTERA DE LAS MISMAS.

ESTO LLEVA A UN FENÓMENO CONOCIDO COMO POLARIZACIÓN POR REFLEXIÓN EN EL CUAL EL COEFICIENTE $\Gamma_{\parallel} = 0$, LO CUAL IMPLICA QUE LA COMPONENTE $\vec{E}_{\parallel r} = 0$ TRAS LA REFLEXIÓN CONSERVANDO ÚNICAMENTE LA COMPONENTE $\vec{E}_{\perp r}$

EL ÁNGULO EN EL CUAL $\Gamma_{\parallel} = 0$ ES LLAMADO ÁNGULO DE BREWSTER Y SU SOLUCIÓN ES:

$$\sin\theta_{i-B_{\parallel}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}}{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2}}$$

OJO



CUANDO EL ÁNGULO DE INSIDENCIA ES IGUAL AL ÁNGULO DE BREWSTER PARA $\Gamma_{\parallel} = 0$, UNA ONDA ES REFLEJADA COMO UNA ONDA LINEALMENTE POLARIZADA PARALELA A LA FRONTERA ENTRE LOS MEDIOS:

ESEM.

EMPLEANDO EL SISTEMA DE COORDENADAS PARTICULAR VISTO PARA INCIDENCIAS OBLICUAS, DETERMINAR, DADO EL CAMPO ELÉCTRICO DE UNA ONDA INCIDENTE

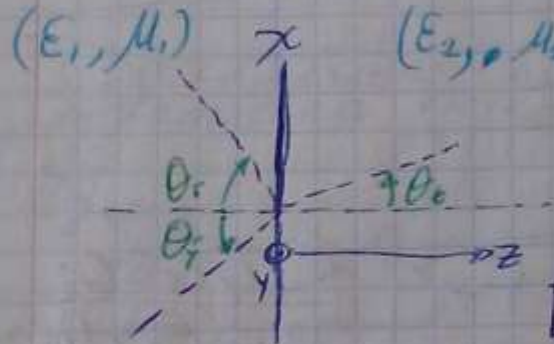
$$\vec{E}_i = 100\cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z)$$

QUE SE PROPAGA EN EL AIRE E INCIDE SOBRE UN MEDIO NO MAGNÉTICO CON $\varepsilon_{r_2} = 4$

I) LAS CONSTANTES DE PROPAGACIÓN K_1, K_2 Y EL ÁNGULO DE INCIDENCIA θ_i

II) LAS EXPRESIONES DE CE REFLEJADO Y TRANSMITIDO

∴ ONDA COMPONENTE TM



$$\vec{E}_y = E_{0i}\cos(\omega t - K_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i) + \phi_{Ei})\,\hat{y}$$

DE DONDE

$$\boxed{-\pi}\,x\,\boxed{-1.73\pi}\,z = \boxed{-K_1\sin\theta_i}\,x\,\boxed{-K_1\cos\theta_i}\,z$$

$$\frac{\pi = K_1\sin\theta_i}{1.73\pi = K_1\cos\theta_i} \Rightarrow \frac{1}{1.73} = \tan\theta_i \Rightarrow \boxed{\theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1.73}\right) = 30^\circ}$$

$$K_1 = \frac{\pi}{\sin\theta_i} = \frac{\pi}{\sin 30^\circ} = \boxed{2\pi\ \frac{rad}{m}}$$

DE DONDE:

$$K_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$$

$$\omega = \frac{K_1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = C\,K_1 = (3\times10^8)(2\pi) = 6\pi\times10^8\ \frac{rad}{s}$$

ó $f = 300\ MHz$

$$K_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \omega\sqrt{\mu_{r_2}\varepsilon_{r_2}\mu_0\varepsilon_0} = \omega\sqrt{4}\cdot\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \qquad C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$K_2 = \frac{2\omega}{c} = \frac{(2)(6\pi\times10^8)}{3\times10^8} \Rightarrow K_2 = 4\pi\ \frac{rad}{s}$$

SIGUE

EMPLEAMOS LA LEY DE DE SNELL PARA CALCULAR LOS ÁNGULOS DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN.

$$\theta_r = \theta_i = 30^\circ$$

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad n_1 = \sqrt{\underbrace{\varepsilon_{r}}_{1}\underbrace{\mu_{r_1}}_{1}} = 1$$

$$n_2 = \sqrt{\underbrace{\varepsilon_{r_2}}_{2}\underbrace{\mu_{r_2}}_{1}} = 2$$

$$\sin\theta_t = \frac{1}{2}\sin\theta_i = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = 0.25 \Rightarrow \theta_t = 14.5^\circ$$

II) AL SER UNA ONDA TE:

$$E_{or} = \Gamma_\perp E_{oi} \quad y \quad E_{ot} = \tau_\perp E_{oi}$$

DONDE:

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \qquad \tau_\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$\underbrace{\eta_1 = 120\pi}_{\text{EN EL AIRE}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\overbrace{\mu_{r_2}}^{1}}{\underbrace{\varepsilon_{r_2}}_{1}}}\cdot 120\pi = 60\pi$$

$$\Gamma_\perp = \frac{60\pi\cos 30^\circ - 120\pi\cos 14.5^\circ}{60\pi\cos 30^\circ + 120\pi\cos 14.5^\circ} = -0.38$$

$$\tau_\perp = \frac{(2)60\pi\cdot\cos 30^\circ}{60\pi\cos 30^\circ + 120\pi\cos 14.5^\circ} = 0.62$$

$$E_{or} = \Gamma_\perp\cdot\underbrace{100}_{E_{i}} = (-0.38)(100) = -38\,\frac{V}{m}$$

$$E_{ot} = \tau_\perp\cdot 100 = (0.62)(100) = 62\,\frac{V}{m}$$

Las expresiones para los campos son:

$$\vec{E_i} = 100\cos(6\pi\times10^8 t - \pi x - 1.73\pi z)\,\hat{y}\ \frac{V}{m}$$

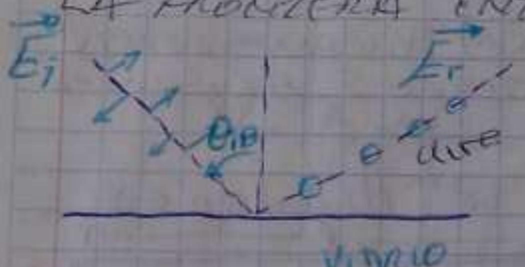
$$\vec{E_r} = -38\cos(6\pi\times10^8 t - \pi x + 1.73\pi z)\,\hat{y}\ \frac{V}{m}$$

$$\vec{E_t} = 62\cos(6\pi\times10^8 t - \underbrace{k_2}_{4\pi}(\sin\underbrace{\theta_t}_{14.5^\circ} x + \cos\underbrace{\theta_t}_{14.5^\circ} z))\,\hat{y}\ \frac{V}{m}$$

$$\vec{E_t} = 62\cos(6\pi\times10^8 t - \pi x - 3.8\pi z)\,\hat{y}\ \frac{V}{m}$$

Ejem. 2

Determinar el ángulo de Brewster para la frontera entre el aire y vidrio ($\varepsilon_{r\,vidrio} = 9$)



Solución:

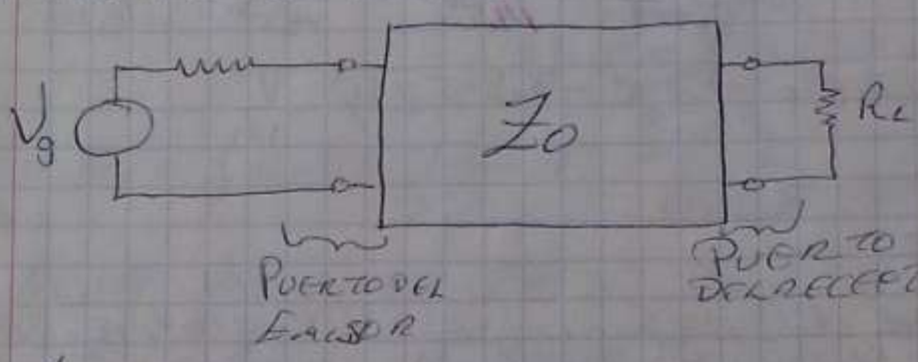
$$\sin\theta_{B\parallel} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_1}}{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2}}$$

$$\sin\theta_{B\parallel} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{81}}} = 0.9486 \Rightarrow \theta_{B\parallel} = 71.56^\circ$$

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN.

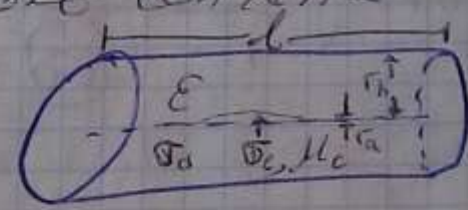
SE ENTENDERÁ POR UNA LÍNEA DE TRANSM. A AQUEL DISP. O CUERPO FÍSICO POR EL CUAL SE PROPAGARÁ

EL ANÁLISIS DE LA ONDA EM SE REALIZA A PARTIR DE VOLTAJE O CORRIENTE.

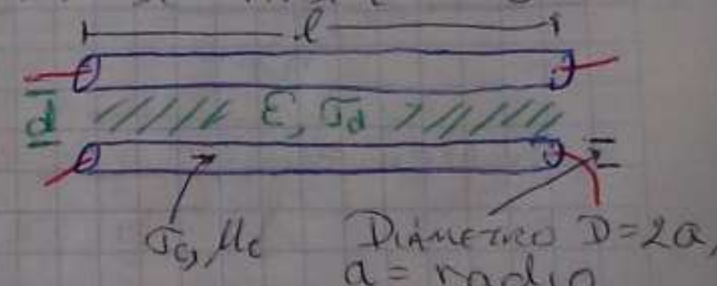


LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN PUEDEN TENER DIVERSAS GEOMETRÍA Y MATERIALES, ALGUNA DE ELLAS, PERO NO LIMITADAS, SON:

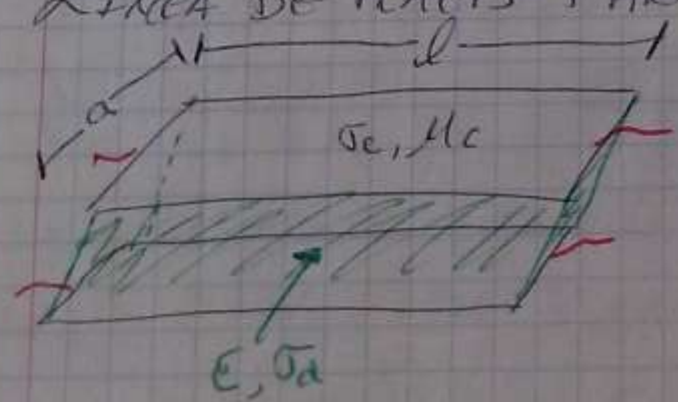
- CABLE COAXIAL



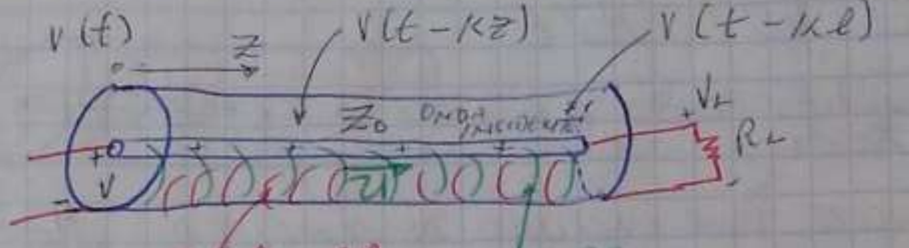
PAR DE ALAMBRES



LÍNEA DE PLACAS PARALELAS.



EL ANÁLISIS DE LA PROPAGACIÓN DE UNA SEÑAL DE VOLTAJE Y CORRIENTE SE REALIZA MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LAS MISMAS ECUACIONES DE MAXWELL AL INTERIOR DE ESTE MEDIO



LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DEL VOLTAJE Y LA CORRIENTE AL INTERIOR DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN; DEPENDERÁ DE LA PERMITIVIDAD DEL DIELÉCTRICO Y DE LA PERMEABILIDAD DEL CONDUCTOR

NUEVAMENTE:

$$U_P = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

SIN EMBARGO, ESTE CÁLCULO PUEDE SER OBTENIDO A PARTIR DE LOS PARÁMETROS DE LA PROPIA LÍNEA. COMO FUE ANALIZADO EN EL CASO DEL CABLE COAXIAL:

$$\mu\epsilon = L'C'$$

DONDE:

L': INDUCTANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD $\left(\frac{H}{m}\right)$ DE LA LÍNEA

C': CAPACITANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD $\left(\frac{F}{m}\right)$ DE LA LÍNEA.

SI LA LÍNEA PRESENTA BAJAS PÉRDIDAS Ó ESTAS SON DESPRECIABLES ($\sigma_c \to \infty$ $\sigma_d \to 0$) CON BASE EN L' Y C' SE PUEDE DETERMINAR LA IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN EN FORMA SIMILAR A LOS CAMPOS EM COMO:

OJO $$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$ LÍNEAS SIN PÉRDIDAS

ANÁLISIS TRANSITORIOS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

PULSO DE VOLTAJE

LOS PARÁMETROS DE LAS DIFERENTES LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

- L': INDUCTANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD $\frac{H}{m}$
- C': CAPACITANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD $\frac{F}{m}$
- R': RESISTENCIA POR UNIDAD DE LONGITUD $\frac{\Omega}{m}$
- G': CONDUCTANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD $\frac{S}{m}$

DE DIFERENTES GEOMETRÍAS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN SON: OJO TABLA

PARÁMETRO	COAXIAL	DOS ALAMBRES	PLACAS PARALELAS	UNIDADES
C'	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{d}{2a}+\sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2-1}\right)}$	$\frac{\varepsilon a}{d}$	$\frac{F}{m}$
L'	$\frac{\mu\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}{2\pi}$	$\frac{\mu}{\pi}\ln\left(\frac{d}{2a}+\sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2-1}\right)$	$\frac{\mu d}{a}$	$\frac{H}{m}$
R'	$\frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2R_s}{a}$	$\frac{\Omega}{m}$
G'	$\frac{2\pi\sigma_d}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$	$\frac{\pi\sigma_d}{\ln\left(\frac{d}{2a}+\sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2-1}\right)}$	$\frac{\sigma_d a}{d}$	$\frac{S}{m}$

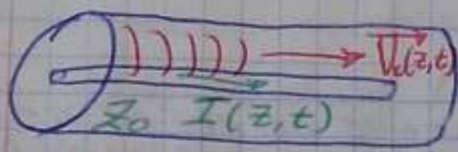
$* R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}}$

- EN CUALQUIER CASO LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN
- AL INTERIOR DE LA LÍNEA CUANDO ESTA NO PRESENTA PÉRDIDAS ES:

$$\boxed{u_p = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}}$$

OJO

AL INTERIOR DE LA LÍNEA LA RELACIÓN ENTRE LA AMPLITUD DE LA CORRIENTE Y VOLTAJE ESTÁ DADO POR:



$$Z_0 = \frac{V(z,t)}{I(z,t)}$$

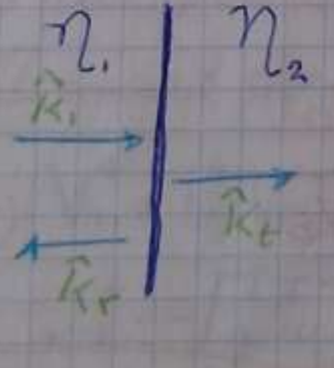
DIAGRAMA DE REBOTE DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN SIN PÉRDIDAS

CONSIDERE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN SIN PÉRDIDAS. ($R'=0$, $G'=0$), LA CUAL SE CONECTA A UN GENERADOR DE PULSOS DE VOLTAJE Y A UNA CARGA EN UN EXTREMO:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

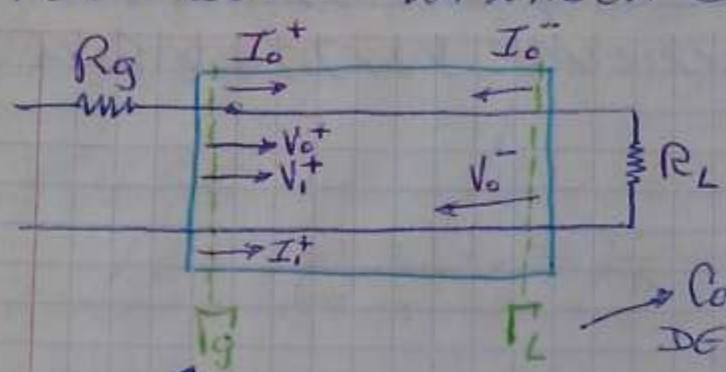
$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

CON BASE EN LOS CÁLCULOS REALIZADOS PARA CAMPOS EM SABEMOS QUE EL COEFICIENTE DE REFLEXIÓN, EN LAS FRONTERAS DE DOS MEDIOS CON IMPEDANCIA. η_1 y η_2 ES:



$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

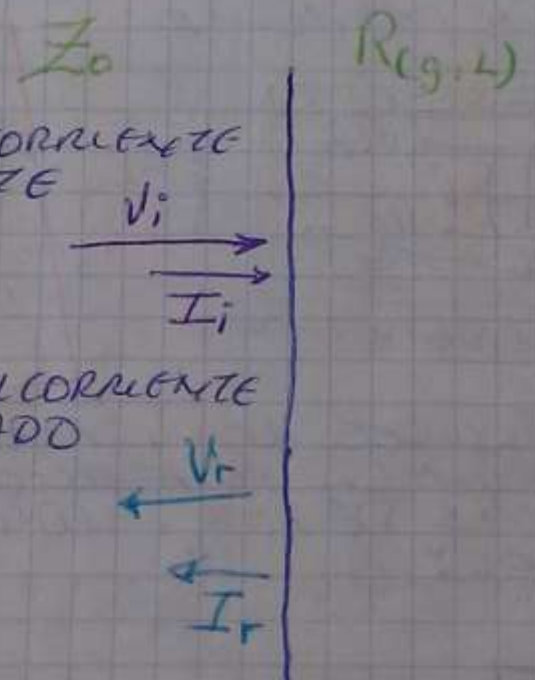
Referido a la línea de transmisión:



→ Coeficiente de reflexión de voltaje en la carga.

↑ Coeficiente de reflexión de voltaje en el generador

Donde:



Voltaje y corriente incidente

Voltaje y corriente reflejado

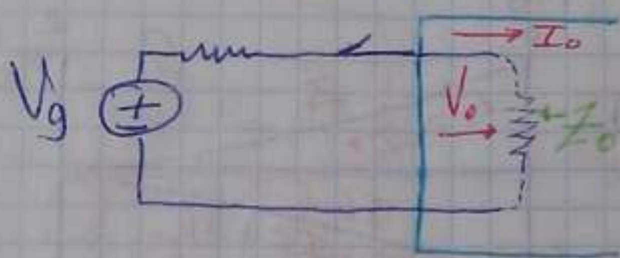
$$\Gamma_{(g,L)} = \frac{R_{(g,L)} - Z_0}{R_{(g,L)} + Z_0}$$

$$V_r = \Gamma_{(g,L)} \cdot V_i$$
$$I_r = -\Gamma_{(g,L)} \cdot I_i$$

OJO

• ANÁLISIS DE REFLEXIÓN DE VOLTAJE:

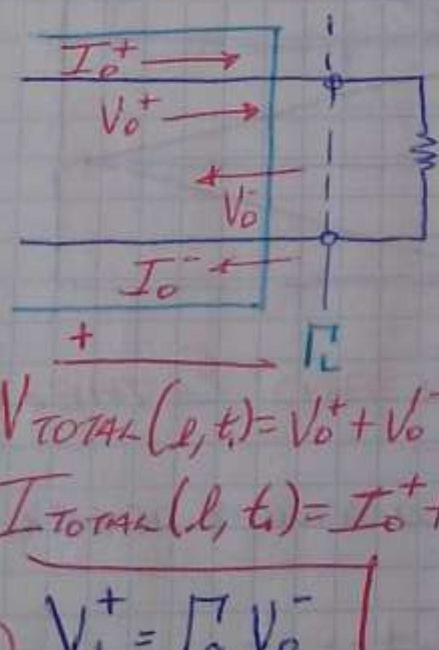
EN $t=0^+$ (UN INSTANTE DESPUES DE $t=0$)



$$V_0^+ = \frac{Z_0}{Z_0+R_g} \cdot V_g$$

$$I_0^+ = \frac{1}{Z_0+R_g} \cdot V_g$$

EN $t_1 = \frac{l}{u_p}$ EL VOLTAJE Y LA CORRIENTE LLEGAN AL FINALIZAR DE LA LÍNEA:



$$V_0^- = \Gamma_L V_0^+$$
$$I_0^- = -\Gamma_L I_0^+$$

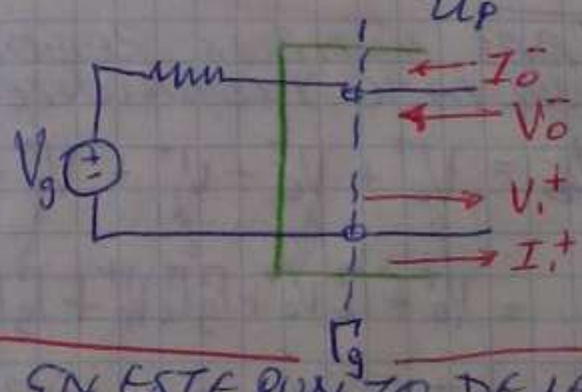
OJO

$$V_{TOTAL}(l, t_1) = V_0^+ + V_0^-$$
$$I_{TOTAL}(l, t_1) = I_0^+ + I_0^-$$

EN $t_2 = 2\frac{l}{u_p}$

OJO

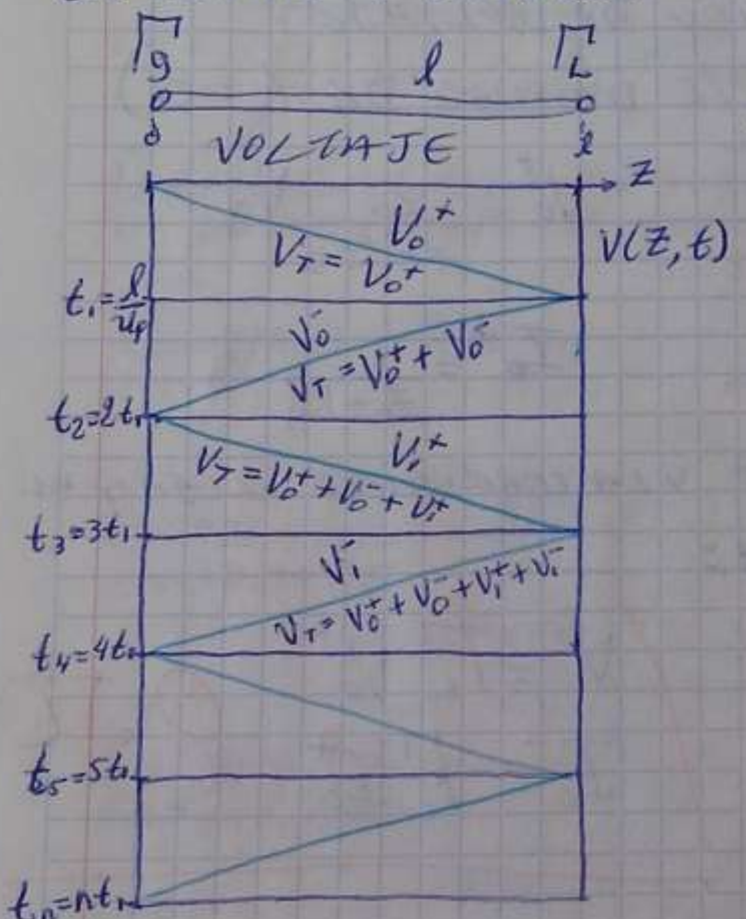
$$V_1^+ = \Gamma_g V_0^-$$
$$I_1^+ = -\Gamma_g I_0^-$$

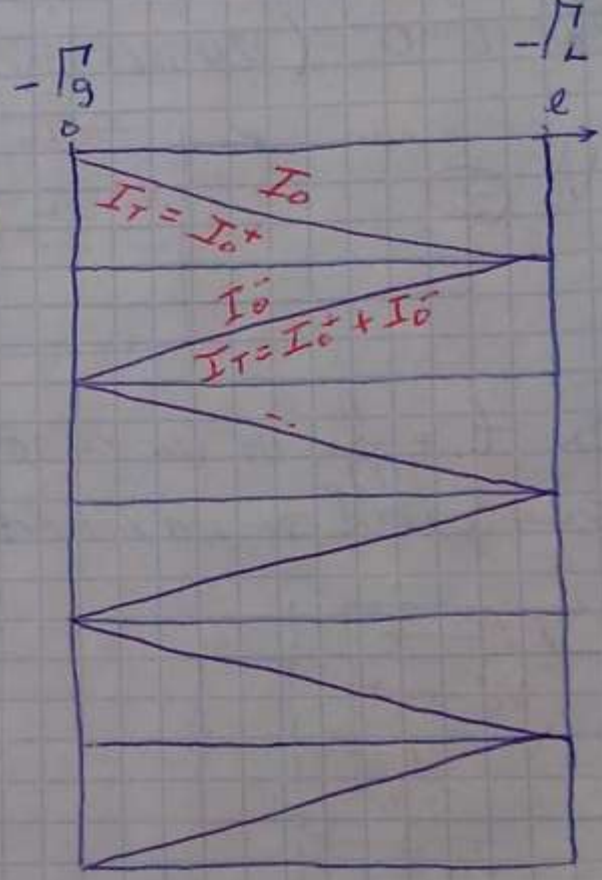


EN VOLTAJE Y CORRIENTE TOTALES EN ESTE PUNTO DE LA LINEA:

$V_{TOTAL}(0, t_2) = V_0^+ + V_0^- + V_1^+$ OJO $I_{TOTAL(0,t_2)} = I_0^+ + I_0^- + I_1^+$

ESTE IR Y VENIR DE ONDAS DE VOLTAJE Y CORRIENTE LO REPRESENTAMOS GRÁFICAMENTE EN EL LLAMADO DIAGRAMA DE REBOTE EL CUAL PERMITE DETERMINAR EL VOLTAJE Y CORRIENTE REFLEJADAS Y TOTALES AL INTERIOR DE LA LÍNEA EN TIEMPO Y ESPACIO.





• VOLTAJE Y CORRIENTE EN ESTADO ESTABLE $(t \to \infty)$

TRAS MÚLTIPLES REBOTES AL INTERIOR DE LA LÍNEA EL VOLTAJE Y CORRIENTE SON:

$$V_\infty = V_0^+ + V_0^- + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + \cdots$$

$$= V_0^+ + \Gamma_L V_0^+ + \Gamma_g \Gamma_L V_0^+ + \Gamma_g \Gamma_L^2 V_0 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 V_0 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^3 V_0 + \cdots$$

$$= V_0^+ \left(1 + \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^3 + \cdots\right.$$

$$S = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\Gamma_g}$$

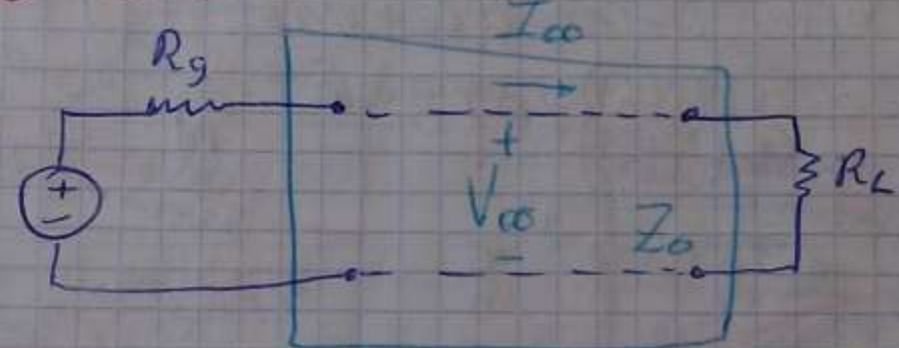
$$V_\infty = \frac{V_0^+(1+\Gamma_L)}{1-\Gamma_g\Gamma_L} \quad , \quad V_0^+ = \frac{Z_0}{Z_0+R_g} V_g$$

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

$$\boxed{V_\infty = \frac{R_L}{R_g + R_L} V_g}$$

OJO

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0}$$



$$\boxed{\begin{aligned} V_\infty &= \frac{R_L}{R_L + R_g} V_g \\ I_\infty &= \frac{V_g}{R_L + R_g} \end{aligned}}$$

OJO

DIBUJAR EL DIAGRAMA DE REBOTE DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN COAXIAL DONDE:

$r_a = 1\ mm$
$r_b = 5\ mm$
$\varepsilon_r = 9\varepsilon_0$
$\mu_r = 1\mu_0$
$l = 10\ Km$

SI LA FUENTE PRESENTA UN VOLTAJE DE 10V E IMPEDANCIA DEL GENERADOR Y CARGA DE 50Ω Y 75Ω RESPECTIVAMENTE

SOLUCIÓN PARA UN CABLE COAXIAL

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = \frac{2\pi(9(\varepsilon_0))}{\ln\left(\frac{5\times10^{-3}}{1\times10^{-3}}\right)} = 49.5\times10^{-12}\ \frac{F}{m}$$

$$L' = \frac{\mu \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}{2\pi} = 321\times10^{-9}\ \frac{H}{m}$$

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = 1\times10^{8}\ \frac{m}{s}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 80.6\ \Omega$$

$$t_1 = \frac{l}{u_p} = 1\times10^{-4}\ s$$

LOS COEFICIENTES DE REFLEXIÓN SON:

$$\Gamma_g = \frac{50-80.6}{50+80.6} = \frac{R_1 + Z_0}{R_1 + Z_0} = -0.234$$

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{Z_0 + R_L} = \frac{75-80.6}{75+80.6} = -0.0362$$

EL VOLTAJE Y CORRIENTE INICIALES QUE SE PROPAGAN EN LA LÍNEA SON:

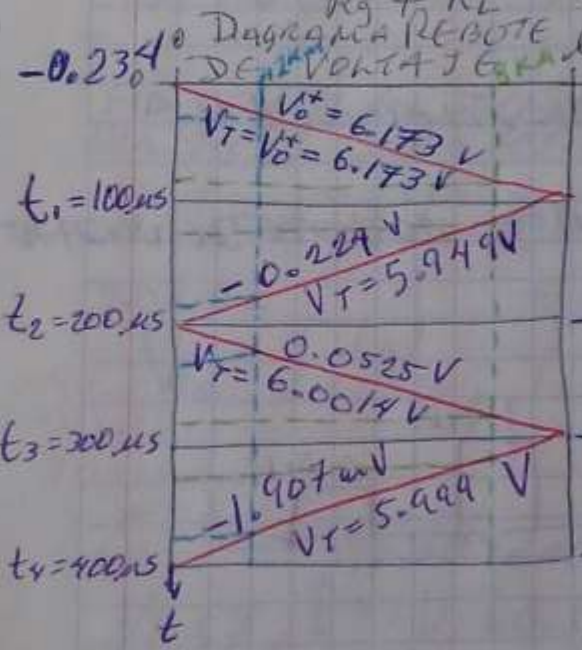
$$V_0^+ = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} \cdot 10 = \frac{80.6}{80.6 + 50} \cdot 10 = 6.173\ V$$

$$I_0^+ = \frac{10}{Z_0 + R_g} = \frac{10}{80.6 + 50} = 76.54\ mA$$

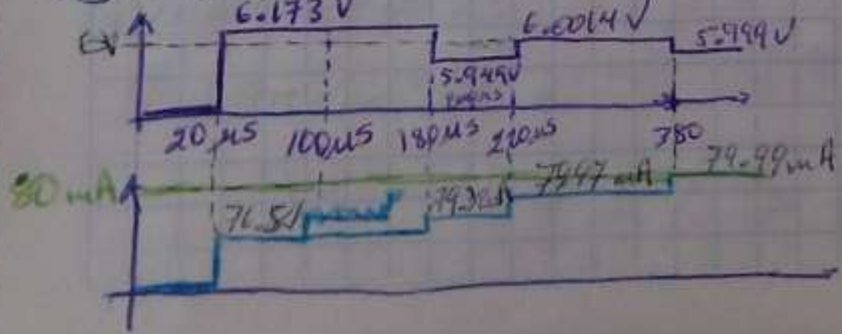
EL VOLTAJE Y CORRIENTE EN ESTADO ESTABLE EN LA LÍNEA DEBERÍA SER:

$$V_\infty = \frac{R_L}{R_g + R_L} V_g = \frac{75}{75 + 50} \cdot 10 \cong 6V$$

$$I_\infty = \frac{V_g}{R_g + R_L} = \frac{10}{75 + 50} \cong 80\ mA$$



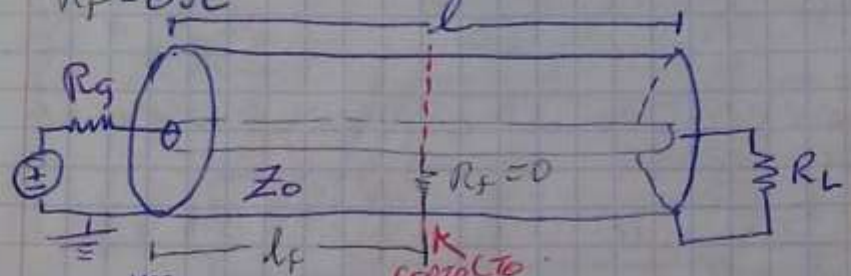
ESTOS DIAGRAMAS PERMITEN DETERMINAR EL NIVEL DE VOLTAJE Y CORRIENTE EN CUALQUIER LUGAR. EJEM. $\ell = 2Km$.



CIRCUITO EN UNA LÍNEA

SI UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN SUFRE UN CORTO CIRCUITO EN ALGUNO DE SUS TRAMOS O AL FINAL DE ELLA ENTONCES LA IMPEDANCIA DE LA FALLA ES:

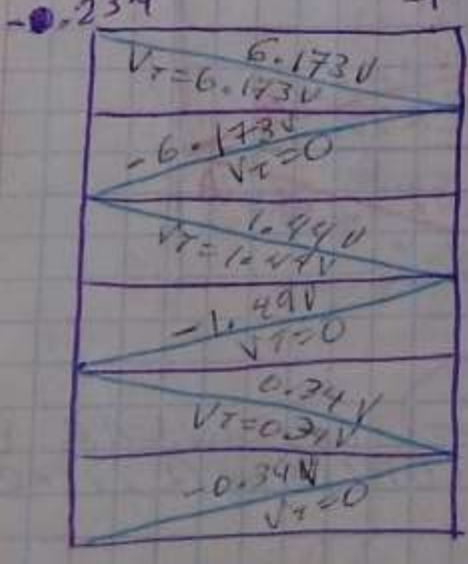
$R_f = 0\Omega$



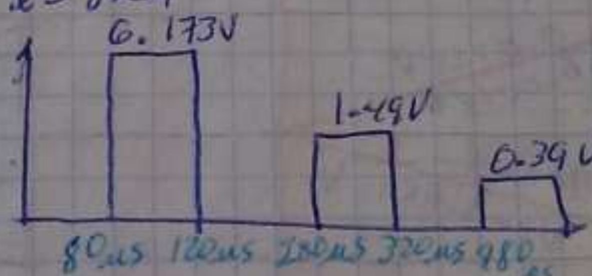
$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} \qquad \Gamma_L = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$$

EJEM. SUPONER, PARA LA LÍNEA AL FINAL DE ELLA OCURRE UN CORTO CTO

BOSQUEJAR EL DIAGRAMA DE REBOTE DE VOLTAJE

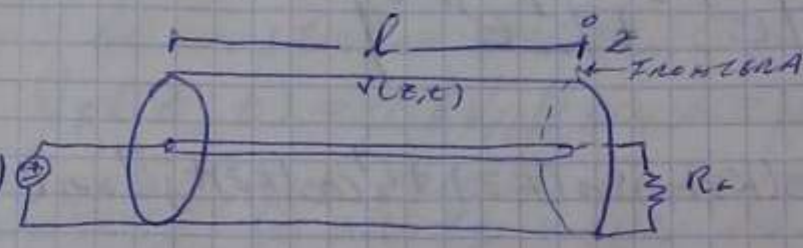


$l = 8 Km$



ONDAS ESTACIONARIAS

CONSIDÉRESE AHORA UNA TRANSMISIÓN SIN PÉRDIDAS QUE ES ALIMENTADA POR UN VOLTAJE SINUSOIDAL



AL INTERIOR DE LA LÍNEA VIAJARÁ UNA ONDA DE VOLTAJE

$$V_i(z;t) = V_{i0}\cos(\omega t - kz + \phi_{V_i})$$

AL LLEGAR AL FINAL DE LA LÍNEA PARTE DE ESTE VOLTAJE SERÁ REFLEJADO

$$V_r(z,t) = V_{r0}\cos(\omega t + kz + \phi_{V_r})$$

DONDE

$$V_{r0} = \Gamma_L V_{i0}, \quad \Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

$\therefore$ EL VOLTAJE TOTAL AL INTERIOR DE LA LÍNEA ES:

$$V_T(z;t) = V_i(z;t) + V_r(z;t)$$

SU FASOR ES: $\mathbb{V}_T(z) = V_{i0}e^{j(-kz+\phi_{V_i})} + V_{r0}e^{j(kz+\phi_{V_r})}$

SIN PÉRDIDAS DE GENERALIDAD CONSIDEREMOS

$$\phi_{V_i} = Q_{V_r} = 0^\circ \Rightarrow \mathbb{V}_T(z) = V_{i0}e^{j(-kz)} + \Gamma_L V_{i0}e^{j(kz)}$$

$$= V_{i0}(e^{-jkz} + \Gamma_L e^{jkz})$$

LA MAGNITUD DEL VOLTAJE TOTAL EN LA LÍNEA ES:

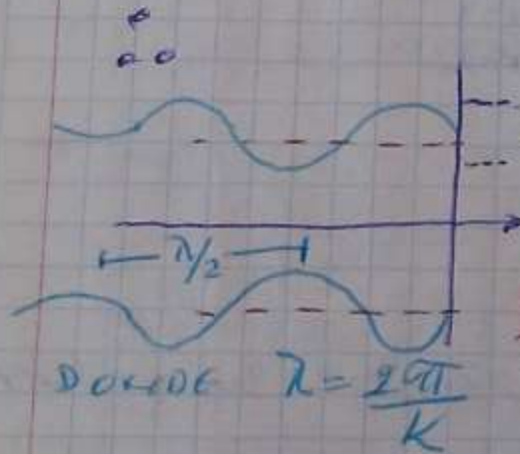
$$|V_T(z)| = |V_{i0}| \left| e^{-jkz} + \Gamma_L e^{jkz} \right|$$

$$= |V_{i0}| \left| \cos(kz) - j\sin(kz) + \Gamma_L \cos(kz) + j\Gamma_L \sin(kz) \right|$$

$$|V(z)| = |V_{i0}| \left| \underbrace{(1+\Gamma_L)\cos kz}_{\mathbb{R}} + \underbrace{j\sin(kz)(-1+\Gamma_L)}_{\mathbb{I}} \right|$$

$$|V_T(z)| = V_{i0} \left| (1+\Gamma_L)^2 \cos^2 kz + (-1+\Gamma_L)^2 \sin^2 kz \right|^{1/2}$$

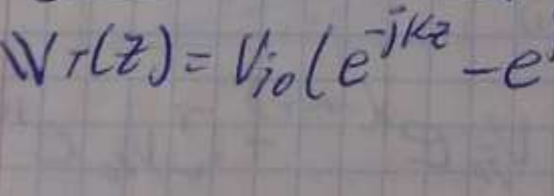
$$= |V_{i0}| \left(1+\Gamma_L^2 + 2\Gamma_L \cos 2kz \right)^{1/2}$$



$2|V_{i0}|\Gamma_L \cos 2kz$

OBSERVAMOS QUE LOS PUNTOS DONDE LA ONDA DE VOLTAJE TOTAL ES MÁXIMA OCURRE CADA $\lambda/2$, CON λ LA LONGITUD DE ONDA INCIDENTE.

DONDE $\lambda = \frac{2\pi}{k}$



CON $R_L = 0$

EL FACTOR DE VOLTAJE TOTAL ES:

$$V_T(z) = V_{i0}\left(e^{-jkz} - e^{jkz}\right) = V_{i0}\left(\cancel{\cos kz} - j\sin kz - \cancel{\cos kz} - j\sin kz\right)$$

$$= V_{i0}\left(-2j\sin kz\right)$$

∴ LA MAGNITUD DEL VOLTAJE EN LA LÍNEA ES:

$$|V_T(z)| = |V_{i0}||2||\sin kz|$$

Y EL VOLTAJE TOTAL ES:

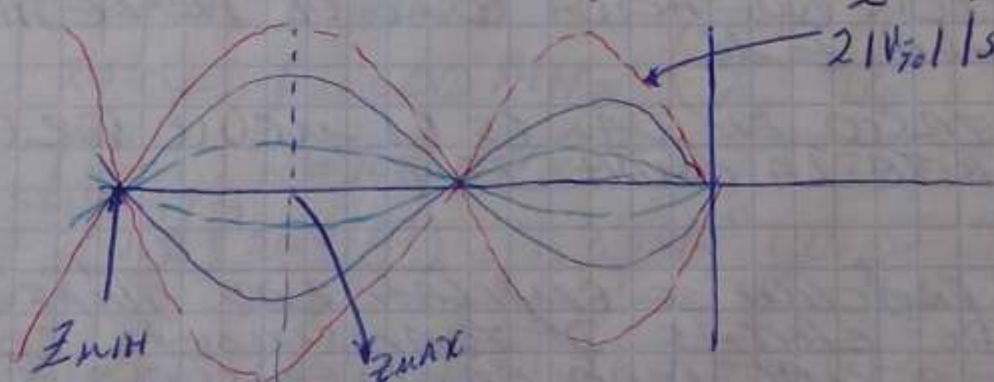
$$V_T(z;t) = 2|V_{i0}|(\sin kz)\cos(\omega t)$$

ES DECIR, QUE EXISTEN PUNTOS DONDE EL NIVEL DE VOLTAJE ES NULO, Y SON AQUELLOS QUE CUMPLEN CON:

$$V(z;t) \quad z = \frac{\lambda}{2} - n\lambda, \; n = 0,1,2,3 \ldots$$

$$= z_{min} = -n\frac{\lambda}{2}, \; n = 0,1,2,3 \ldots$$

Y LA AMPLITUD MÁXIMA $z_{max} = \left(-\frac{1}{2} - n\right)\lambda, \; n = 0,1,2 \ldots$



GUIAS DE ONDAS.

ES UNA ESTRUCTURA QUE PERMITE "GUIAR" A LAS ONDAS EM MEDIANTE UN CONDUCTO QUE TOMA DIFERENTES FORMAS

EN GENERAL UNA GUÍA DE ONDAS SE COMPONE DE DOS PARTES

- CONDUCTOR QUE ACTUA COMO EL REFLEJANTE DE LA ONDA EM.
- DIELECTRICO, EL CUAL ES EL MEDIO POR EL QUE SE TRANSMITE LA ONDA EM

EN LA PRÁCTICA SE EMPLEAN LAS GUÍAS DE ONDA EN VEZ DE LÍNEAS DE TRANSMISION COMO EL CABLE COAXIAL PARA FRECUENCIAS SUPERIORES 20-30 GHZ, Ó INCLUSO PARA FRECUENCIAS INFERIORES DONDE NO SE DESEE EMPLEAR UNA LINEA.

EN EL CASO PARTÍCULAR DE FRECUENCIAS MAYORES A 30 GHZ SE EMPLEAN ÚNICAMENTE GUIAS DE ONDA YA QUE EL EMPLEO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN IMPLICA PÉRDIDAS MAYORES DE ENERGÍA.

* CANTENNA

TAREA 4.1. 8.1, 8.3, 8.5, 8.17, 8.18, 8.20, 8.22, 8.23, 8.24, 8.29.

TAREA 4.2.

2.1, 2.2, 2.3, 2.6, 2.11, 2.50, 2.51, 2.52, 2.54, 2.55.

PROBLEMA 2.1. LÍNEA DE TRANSMISIÓN DE LONGITUD l CONECTA UNA CARGA A UNA FUENTE SINUSOIDAL CON UNA FRECUENCIA f, SUPONIENDO QUE LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN ES C.

¿PARA CUÁL DE LAS SIG. ES RAZONABLE IGNORAR LA PRESENCIA DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN EN LA SOLUCIÓN DEL CIRCUITO

a) $l = 20$ cm, $f = 20$ KHz

b) $l = 50$ Km, $f = 60$ HZ

c) $l = 20$ cm, $f = 600$ MHz

d) $l = 1$ mm, $f = 100$ GHZ

CUANDO $\frac{l}{\lambda} \leq 0.01$

$\frac{l}{\lambda} = \frac{lf}{u_p}$

MHz $= \times 10^6$

GHz $= \times 10^9$

$u_p = 3\times10^8$

RESPUESTA:

a) $\frac{lf}{u_p} = \frac{(0.2)(20\times10^3)}{3\times10^8} = 1.33\times10^{-5}$ SE PUEDE IGNORAR.

b) $\frac{lf}{u_p} = \frac{(50\times10^3)(60)}{3\times10^8} = 0.01$ SE PUEDE IGNORAR.

c) $\frac{lf}{u_p} = \frac{(0.2)(600\times10^6)}{3\times10^8} = 0.4$

d) $\frac{lf}{u_p} = \frac{(1\times10^{-3})(100\times10^9)}{3\times10^8}$ 0.333

2.2. CALCULE LOS PARÁMETROS DE LÍNEA R', L', G' Y C' PARA UNA LÍNEA COAXIAL CON DIÁMETRO INTERNO DE 0.5 CM Y EXTERNO DE 1 cm, RELLENO CON UN MATERIAL AISLANTE DONDE $\mu = \mu_0$ $\varepsilon_r = 4.5$ Y $\sigma = 10^{-3}$ S/m.

LOS CONDUCTORES SON DE COBRE CON $\mu_c = \mu_0$ Y ~~[illegible]~~ $\sigma_c = 5.8 \times 10^{-7}$ LA $f = 1$ GHz

radio $a = (0.5/2) = 0.25$ cm $= 0.25 \times 10^{-2}$ m
radio $b = (1/2) = 0.5 \times 10^{-2}$ m

$$R' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad \text{OJO} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{7} \quad \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$$

$$R' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi(1\times10^{9})(4\pi\times10^{-7})}{5.8\times10^{-7}}}\left(\frac{1}{0.25\times10^{-2}}+\frac{1}{0.5\times10^{-2}}\right) = 0.788$$

COAXIAL

$$L' = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{(4\pi\times10^{-7})}{2\pi}\left(\ln\left|\frac{0.5\times10^{-2}}{0.25\times10^{-2}}\right|\right) =$$

$$G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\times10^{-3}}{\ln\left(\frac{0.5\times10^{-2}}{0.25\times10^{-2}}\right)} = 9.1\times10^{-3}$$

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\times4.5\times(8.854\times10^{-12})}{\ln\left(\frac{0.5\times10^{-2}}{0.25\times10^{-2}}\right)} =$$

2.3.- UNA LÍNEA DE TRANSM. DE PLACAS PARALELAS DE 1 GHz TIRAS DE COBRE DE 1.2 cm DE ANCHO SEPARADAS POR UNA CAPA DE POLIESTIRENO DE 0.15 cm DE GROSOR. APÉNDICE B $\mu_c = \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ $\sigma_c = 5.8\times10^{7}$ Y $\varepsilon_r = 2.6$ DETERMINAR PARÁMETROS SUPONGA QUE $\mu = \mu_0$ Y $\sigma \simeq 0$ $a = \text{OJO} = w = 1.2\times10^{-2}$ = ANCHO DE LAS TIRAS

PARALELAS

$$R' = \frac{2R_s}{w{=}a} = \frac{2}{w}\sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \qquad L' = \frac{\mu d}{w{=}a} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(1.5\times10^{-3})}{1.2\times10^{-2}} = 1.57\times10^{-7}$$

$$G' = \frac{\sigma a}{d} \quad \text{si } \sigma \simeq 0 \ G' = 0 \qquad C' = \frac{\varepsilon a}{d} = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{a}{d} =$$

d = grosor

2.6.- ADEMÁS DE NO DISIPAR ENERGÍA LÍNEA SIN PÉRDIDAS

1.- NO ES DISPERSORA $\Rightarrow$ u_p ES INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA

2.- SU IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA Z_0 ES REAL

$R' \ll \omega L'$ Y $G' \ll \omega C'$

A VECES NO ES POSIBLE DISEÑAR QUE $R' \ll \omega L'$ Y $G' \ll \omega C'$, PERO SÍ QUE $R'C' = L'G'$ $\Rightarrow$ SON LÍNEA LIBRE DE DISTORCIÓN

$$\alpha = R'\sqrt{\frac{C'}{L'}} = \sqrt{R'G'} \qquad \beta = \omega\sqrt{L'C'} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$\gamma = \alpha + \beta j = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \sqrt{L'C'}\sqrt{\left(\frac{R'}{L'} + j\omega\right)\left(\frac{G'}{C'} + j\omega\right)}$$

$$= \sqrt{L'C'}\left(\frac{R'}{L'} + j\omega\right) = \underbrace{R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}}_{\alpha} + j\underbrace{\omega\sqrt{L'C'}}_{\beta}$$

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\sqrt{\frac{R'/L' + j\omega}{G'/C' + j\omega}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

10

2.11 SE USA POLIETILENO $\varepsilon_r = 2.25$ CON UNA IMPEDANCIA CARACT. DE DE 50 Ω, EL RADIO DEL CONDUCTOR INTERNO 1.2 mm

a) EL RADIO DEL CONDUCTOR EXTERNO?

b) VELOCIDAD DE FASE DE LA LÍNEA?

a) $Z_0 = \left(\frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow b = a e^{Z_0\sqrt{\varepsilon_r}/60} = 4.2\times10^{-3}$ m

b) $u_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{2.25}} = 2\times10^8$

2.50

y 251

250 GENERE UN DIAGRAMA DE REBOTE

1m de longitud $Z_0 = 50\Omega$ $u_p = \frac{2c}{3}$ $t=0$

$V_g = 60V$ $R_g = 100\Omega$ $Z_L = 25\Omega$ $t_f = 25\,ns$

COEFICIENTES DE REFLEXIÓN

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{100-50}{100+50} = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{25-50}{25+50} = -\frac{1}{3}$$

$$V_0^+ = \frac{Z_0}{R_g + Z_0} V_g = \frac{50}{100+50} \cdot 60 = 20V \qquad I_0^+ = \frac{V_g}{R_g + Z_0} = \frac{60}{100+50} = 0.4A$$

$$T = \frac{l}{u_p} = \frac{l}{\frac{2c}{3}} = \frac{(1)(3)}{2(3\times10^8)} = 5\,ns.$$

$$V_\infty = V_0^+ + V_0^- + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^-$$

$$= V_0^+ + \Gamma_L V_0^+ + \Gamma_g \Gamma_L V_0^+ + \Gamma_g \Gamma_L^2 V_0^+ + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 V_0^+ + \Gamma_g^2 \Gamma_L^3 V_0^+ \ldots$$

$$= 20V + -\frac{20}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)20 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^2 20 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 20 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^3 20$$

$$= 20 - 6.6 + \left(-\frac{20}{9}\right) + \left(\frac{20}{27}\right) + \left(\frac{20}{81}\right) + \left(-\frac{20}{243}\right)$$

$$= 20 - 6.6 - 2.22 + 0.74 + 0.24 - 0.082.$$

$$I_\infty = I_0^+ + I_0^- + I_1^+ + I_1^-$$

$$= I_0^+ + (-\Gamma_L I_0^+) + (-\Gamma_g - \Gamma_L I_0^+) + (-\Gamma_g - \Gamma_L^2 I_0^+)$$

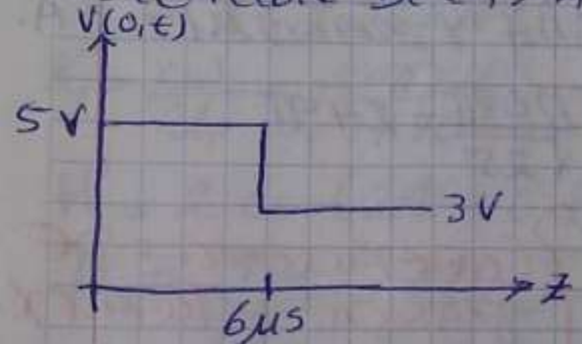
2.54

$V_g = 15V$ Y RESIST. EN SERIE R_g
LINEA $l = 1Km$. SU velocidad de PROPAGACION ES DE 1×10^8 Y $Z_L = 100\Omega$

a) DETERMINAR R_g

b) EXPLIQUE QUE LA CAIDA EN $t = 6ms$ NO ES POR REFLEXIÓN DE LA CARGA.

c) DETERMINE LA RESISTENCIA EN DERIVACIÓN R_f Y LA UBICACION DE LA FALLA RESPONSABLE



$$V_0^+ = \frac{V_g Z_0}{R_g + Z_0} \qquad V_0^+ = 5V$$

2.55

PROBLEMA

8.1 ONDA PLANA EN EL AIRE AMPLITUD DE CE DE $20\frac{V}{m}$ INCIDE NORMALMENTE EN LA SUPERFICIE DE UN MEDIO NO MAGNÉTICO SIN PÉRDIDAS $\varepsilon_r = 25$

a) LOS COEFICIENTES DE TRANSM. Y REFLEXIÓN.

b) LA RAZÓN DE ONDA ESTACIONARIA EN EL AIRE

c) LAS DENSIDADES DE POTENCIA PROMEDIO DE LAS ONDAS INCIDENTES, REFLEJADA Y TRANSMITIDA.

$$\eta_1^{aire} = \eta_0 = 120\pi \qquad \eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{25}} = 24\pi$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{24\pi - 120\pi}{24\pi + 120\pi} = -0.67 \\ \tau &= 1 + \Gamma = 1 - 0.67 = 0.33 \end{aligned}\right\} \text{COEFICIENTES DE TRANSM. Y REFLEX.}$$

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.67}{1 - 0.67} = 5 \longleftarrow \text{RAZÓN DE ONDA ESTAC.}$$

c) DENSIDADES DE POTENCIA

$$S_{AV}^{i} = \frac{|E_0^i|^2}{2\eta_0} = \frac{20^2}{2 \times 120\pi} = 0.52$$

$$S_{AV}^{r} = |\Gamma|^2 S_{AV}^{i} = (0.67)^2 (0.52) = 0.24$$

$$S_{AV}^{t} = |\tau|^2 S_{AV}^{i} = (0.33^2)(0.52) = 0.28$$

8.3 ONDA PLANA VIAJA $\varepsilon_{r_1} = 9$ INCIDE EN $\varepsilon_{r_2} = 4$
SI EL CM ES $H^i = 2\cos(2\pi \times 10^9 t - Ky)\,\hat{z}$

a) OBTENGA EXPRECIONES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO PARA LOS CE Y CM EN LOS DOS MEDIOS.

b) LA DENSIDAD DE POTENCIA PROMEDIO DE LA INCIDENTE Y REFLEJADA Y TRANSMITIDA.

$$u_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{9}} = 1\times10^8$$

$$K_1 = \frac{\omega}{u_p} = \frac{2\pi\times10^9}{1\times10^8} = 20\pi$$

$$H^i = 2\cos(2\pi\times10^9 t - \overset{K_1}{20\pi}\, y)\,\hat{z}$$

$$\eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{9}} = 125.67$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}} = 188.5$$

$$E^i = 2\eta_1 \cos(2\pi\times10^9 t - 20\pi y) - \hat{x} =$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = 0.2$$

$$\tau = 1 + \Gamma = 1.2$$

$$E^r = 2\eta_1 \Gamma \cos(2\pi\times10^9 t - 20\pi y) - \hat{x}$$

$$H^r = \frac{E^r}{\eta_1}$$

$$E = E^i + E^r$$

$$H = H^i + H^r$$

Medio 1

PARA EL MEDIO 2

$$K_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}\,k_1 = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot 20\pi = \frac{40\pi}{3}$$

OJO

$$E_2 = 2\eta_1 \tau \cos\left(2\pi\times10^9 - \frac{40\pi}{3}y\right) - \hat{x}$$

$$= 301.61 \cos\left(2\pi\times10^9 - \frac{40\pi}{3}y\right) - \hat{x}$$

$$H_2 = \frac{E_2}{\eta_2}$$

OJO

b) $$S^i_{AV} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_1}\hat{y}$$

$$S^r_{AV} = |\Gamma|^2 S^i_{AV}$$

OJO

$$S^t_{AV} = S^r_{AV} - S^i_{AV}$$

8.5 REDETIR 8.3 PERO $\varepsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$
Y $\sigma = 10^{-4}$

MEDIO 1

$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi$ $\quad K_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 10^9}{3\times10^8} = \frac{4\pi}{3}$

MEDIO 2.

$\frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_2}$

$\alpha_j = \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \frac{\sigma_2}{2} \cdot \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}$

$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}{c}$

$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\left(1 + \frac{j\sigma_2}{2\omega\varepsilon_2}\right)$

8.17 UN RAYO DE LUZ INCIDE EN UN PRISMA EN EL AIRE EN UN ANGULO θ, SE REFRACTA EN LA 1ER SUPERFICIE Y DE NUEVO EN LA SEGUNDA EN FUNCIÓN DE ϕ DEL PRISMA Y SU REFRACCIÓN n

DETERMINAR θ_{min} AL CUAL EL RAYO EMERGERÁ POR EL OTRO LADO
PARA $n = 1.4$ Y $\phi = 60°$

$\theta_3 < \theta_c$ sí $\sin\theta_c = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow 180° = \phi + (90° - \theta_2) + (90° + \theta_3)$

$$\theta_{min} = \sin^{-1}\left[n \sin\left(\phi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]$$ OJO

8.22 UN SEMICILINDRO CON $n_1 = 1.5$ ESTÁ COLOCADO DE MANERA QUE SU SUPERF PLANA ESTÁ EN HORIZONTAL SOPORTA UNA GOTA DE ACEITE, CUANDO LA LUZ SE DIRIGE AL ACEITE OCURRE UNA REFLEXIÓN INTERNA SI θ EXCEDE LOS 53°
CUAL ES EL ÍNDICE DE REFRACCIÓN DEL ACEITE?

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{ACEITE}}{1.5} \Rightarrow n_{ACEITE} = 1.5 \sin 53°$$

8.20 UN RAYO DE LUZ INCIDE A 45° ATRAVIESA 2 DIELECTRICOS CON REFRACCIÓN Y ESPESOR INDICADOS SI EL CHOCA A 2 cm
¿A QUE ALTURA CHOCARÁ CON LA PANTALLA?

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \frac{1}{1.5}\sin 45° = 0.47 \Rightarrow \theta_2 = \sin^{-1}(0.47)$$

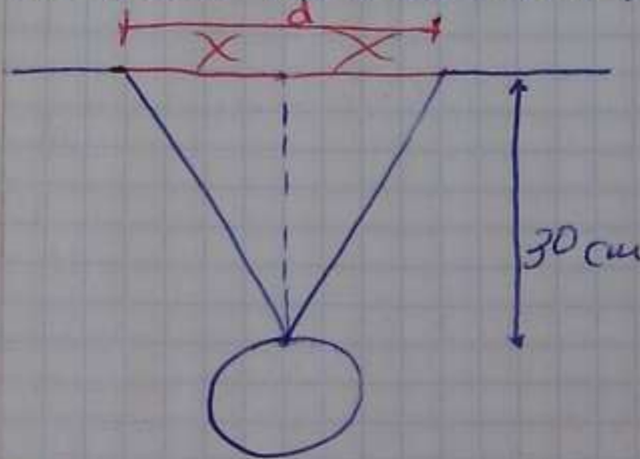
$\theta_2 = 28.03°$

$h_2 = d \times \tan\theta_2$

h = altura
d = distancia recorrida
por el ~~[illegible]~~ AS

8.23.- UNA MONEDA PROFUNDIDAD 30 cm.

DETERMINAR EL DIÁMETRO DEL PAPEL QUE FLOTA SOBRE LA SUPERFICIE Y LA OCULTA.
$n = 1.33$ PARA EL AGUA.



n_1

$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1.33}\right) = 48.7^\circ$$

n_2

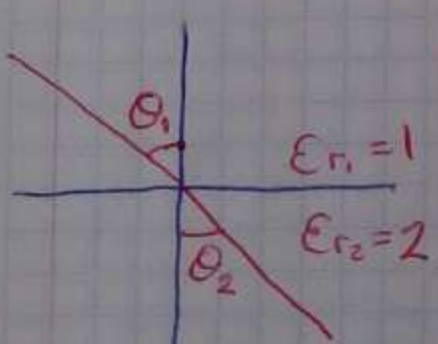
$$d = 2x = 2\left[30\,\text{cm} \times \tan(\theta_c)\right]$$
$$= 68.42.\ \text{cm}$$

8.24 SUPONGA QUE LA FIBRA OPTICA SE SUMERGE EN AGUA (CON $n = 1.33$)
DETERMINAR θ_a Y f_p EN ESE CASO

$n_o = 1.33$, $n_f = 1.52$ · $n_c = 1.49$

$$\sin\theta_a = \frac{1}{n_o}\left(n_f^2 - n_c^2\right)^{1/2} = \frac{1}{1.33}\left[(1.52^2 - 1.49^2)\right]^{1/2}.$$

8.29 UNA ONDA PLANA PARALELAMENTE POLARIZADA INCIDE EN EL AIRE CON $\mathcal{E}_r = 9$ AL ANGULO DE Brewster
¿CUALES EL ANGULO DE REFRACCIÓN?



$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{9}{1}}\right)$$

$$\theta_1 = 71.57^\circ$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{\sin(71.57)}{3} = 0.32$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}(0.32) = 18.44^\circ$$

UACM Universidad Autónoma de la Ciudad de México — *Nada humano me es ajeno*	Teoría Electromagnética – Semestre 2014-II	Primer Examen Parcial
	Apellido, Nombre:	Matrícula:
	A: 2 +B: 5 +C: 5 +D: 2 = **Calif.: 14 /20**	

Instrucciones: Todas las preguntas deben ser respondidas en forma ordenada, indicando en el recuadro la(s) respuesta(s) solicitada(s). **La respuesta final será la que plasme en esta hoja, y en las hojas adicionales que emplee debe emplearlas para indicar claramente el procedimiento.** La calificación final consiste en la suma de los puntos obtenidos en cada sección. **Tiempo para resolver el examen: 1 hr y 20 minutos.**

Resuelva los problemas presentados.

A. (5 puntos) Una región esférica definida en la zona $R \in (3,4)\,m$, el campo eléctrico está dado por $\vec{\mathbf{E}} = \frac{5(R-3)^3}{\varepsilon}\hat{\mathbf{R}}$. Determinar la densidad volumétrica de carga en la región $R = 4\,m$.

$\rho_V =$ 15/4 ✗

B. (5 puntos) Considere el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}} = -x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$. Determine el trabajo necesario para mover una carga de $1\,C$ desde el punto $P_1(a,0,0)$ al punto $P_2\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$.

$W =$ $a^2/2$ ✓

C. (5 puntos) Una esfera dieléctrica de radio $R = 0.50\,m$ y centro en el origen presenta un campo eléctrico $\overrightarrow{E_1} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_1 R^3}\left(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{R}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$, con p constante; y se encuentra rodeada por un segundo medio con permitividad $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$. Determine el campo eléctrico en el segundo medio si $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$.

$\overrightarrow{E_2} =$ ——— VER DESARROLLO OJO

D. (5 puntos) Un conductor cilíndrico de 200 m de largo de sección transversal uniforme con área de un milímetro cuadrado presenta una caída de voltaje de 8 V entre sus extremos y transporta una corriente de 1.4 A. Determine la conductividad del material del conductor.

$\sigma = \frac{E_0}{5.71\,C} = \frac{[illegible]}{7175.39}$ ✗

UACM Universidad Autónoma de la Ciudad de México *Nada humano me es ajeno*	**Teoría Electromagnética – Semestre 2014-II**	**Primer Examen Parcial**
	Apellido, Nombre:	**Matrícula**
	A: 2 **+B:** 5 **+C:** 5 **+D:** 2 **= Calif.:** 14 **/20**	

Instrucciones: Todas las preguntas deben ser respondidas en forma ordenada, indicando en el recuadro la(s) respuesta(s) solicitada(s). **La respuesta final será la que plasme en esta hoja, y en las hojas adicionales que emplee debe emplearlas para indicar claramente el procedimiento.** La calificación final consiste en la suma de los puntos obtenidos en cada sección. **Tiempo para resolver el examen: 1 hr y 20 minutos.**

Resuelva los problemas presentados.

A. (5 puntos) Una región esférica definida en la zona $R \in (3,4)\,m$, el campo eléctrico está dado por $\vec{\mathbf{E}} = \frac{5(R-3)^3}{\varepsilon}\,\widehat{\mathbf{R}}$. Determinar la densidad volumétrica de carga en la región $R = 4\,m$.

$\rho_V =$ 15/4

B. (5 puntos) Considere el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}} = -x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$. Determine el trabajo necesario para mover una carga de $1\,C$ desde el punto $P_1(a,0,0)$ al punto $P_2\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$.

$W = a^2/2$

C. (5 puntos) Una esfera diléctrica de radio $R = 0.50\,m$ y centro en el origen presenta un campo eléctrico $\overrightarrow{E_1} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_1 R^3}\left(2\cos\theta\,\widehat{\mathbf{R}} + \sin\theta\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$, con p constante; y se encuentra rodeada por un segundo medio con permitividad $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$. Determine el campo eléctrico en el segundo medio si $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$.

$\overrightarrow{E_2} =$ ——— VER DESARROLLO OJO

D. (5 puntos) Un conductor cilíndrico de 200 m de largo de sección transversal uniforme con área de un milímetro cuadrado presenta una caída de voltaje de 8 V entre sus extremos y transporta una corriente de 1.4 A. Determine la conductividad del material del conductor.

$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{5.71\,C} = \frac{h(\;)}{7175.39}$

UACM Universidad Autónoma de la Ciudad de México *Nada humano me es ajeno*	Teoría Electromagnética – Semestre 2014-II	Segundo Examen Parcial
	Apellido, Nombre:	Matrícula
	A: 4 +B: 2.5 +C: 2.5 = **Calif.:** 9 /15	

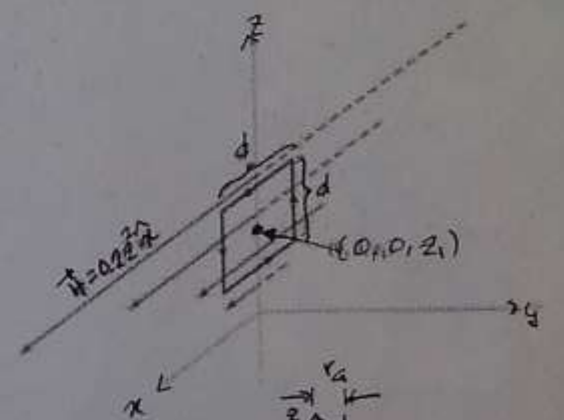
Instrucciones: Todas las preguntas deben ser respondidas en forma ordenada, indicando en el recuadro la(s) respuesta(s) solicitada(s). **La respuesta final será la que plasme en esta hoja**, y en las hojas adicionales que emplee debe emplearlas para indicar claramente el procedimiento. La calificación final consiste en la suma de los puntos obtenidos en cada sección. *Tiempo para resolver el examen: 1 hr y 15 minutos.*

A. (5 puntos) En cierta región del espacio se sabe que el campo magnético en coordenadas cartesianas es $\vec{H} = 0.2z^2\hat{x}$. Encuentre la densidad de corriente $\vec{J}$ asociada y la corriente que circula por un área como la mostrada en la figura.

4

$\vec{J} = 0.4z\,\hat{x}$ ✓

$I = 0.1 d^3$ ✗



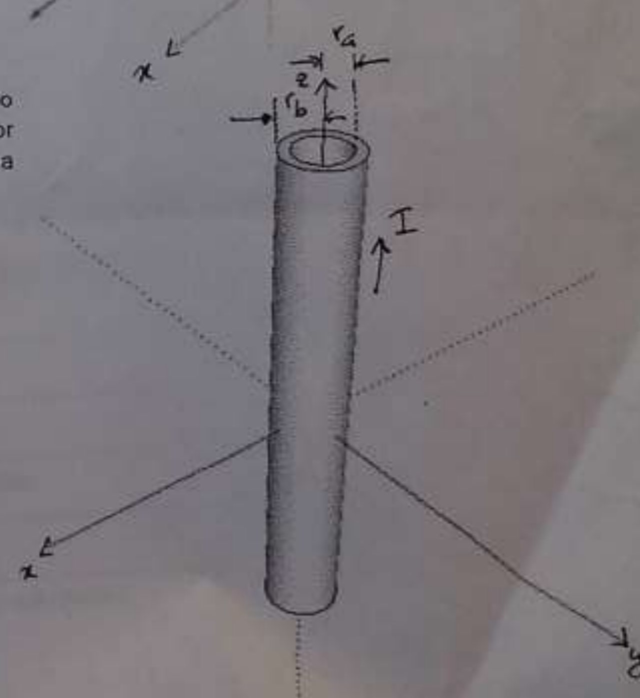
B. (5 puntos) Emplee la Ley de Ampère para determinar el campo magnético en las regiones indicadas, si al interior de un conductor cilíndrico hueco muy largo mostrado en la figura circula una corriente I con una densidad uniforme.

2.5

Región $r < r_a$
$\vec{H} = \frac{I r_0}{2\pi r_a^2}$ ✗ $= 0$

Región $r \in (r_a, r_b)$
$\vec{H} = \frac{I}{2\pi (r_b - r_a)^2}$ ✓

Región $r > r_b$
$\vec{H} =$



C. (5 puntos) Considere dos medios separados por el plano $z = 0$, donde no circula una corriente superficial entre ambos y en el primer medio, situado en $z > 0$, existe un campo magnético $\vec{H}_1 = 4\hat{x} + 2\hat{z}\ \frac{A}{m}$. Determine el campo magnético en el segundo medio, situado en $z < 0$, si la permeabilidad magnética en cada medio es $\mu_1 = 4\mu_0$ y $\mu_2 = 2\mu_0$.

2.5

$\vec{H}_2 = 8\hat{x} + 4\hat{z}$ ✗

UACM Universidad Autónoma de la Ciudad de México *Nada humano me es ajeno*	Teoría Electromagnética – Semestre 2014-II	Segundo Examen Parcial
	Apellido, Nombre:	Matrícula
	A: 4 +B: 2.5 +C: 2.5 = **Calif.:** 9 /15	

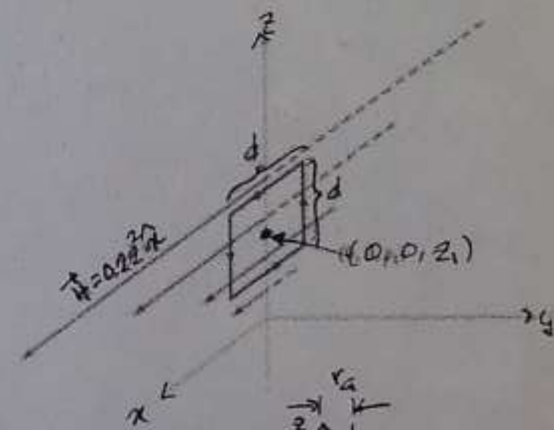
Instrucciones: Todas las preguntas deben ser respondidas en forma ordenada, indicando en el recuadro la(s) respuesta(s) solicitada(s). **La respuesta final será la que plasme en esta hoja**, y en las hojas adicionales que emplee debe emplearlas para indicar claramente el procedimiento. La calificación final consiste en la suma de los puntos obtenidos en cada sección. *Tiempo para resolver el examen: 1 hr y 15 minutos.*

A. (5 puntos) En cierta región del espacio se sabe que el campo magnético en coordenadas cartesianas es $\vec{H} = 0.2z^2\hat{x}$. Encuentre la densidad de corriente $\vec{J}$ asociada y la corriente que circula por un área como la mostrada en la figura.

4

$\vec{J} = 0.4z\,\hat{x}$

$I = 0.1 d^3$



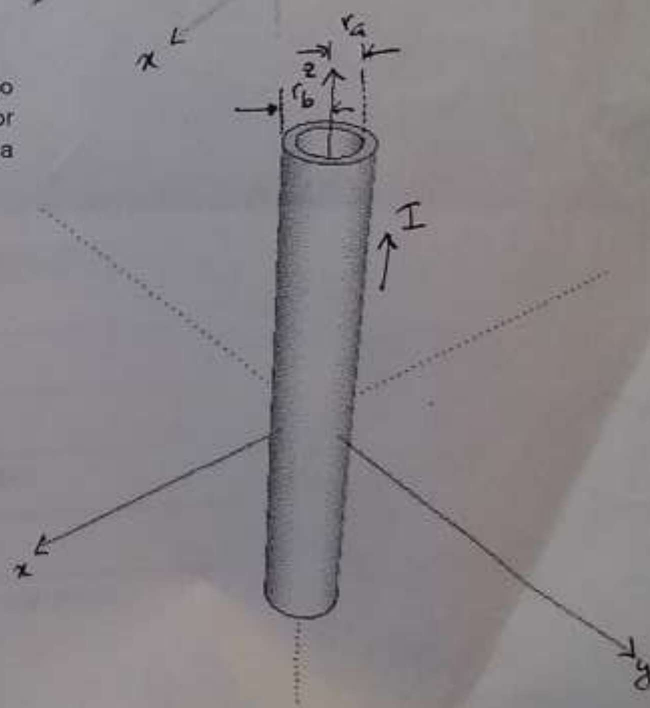
B. (5 puntos) Emplee la Ley de Ampère para determinar el campo magnético en las regiones indicadas, si al interior de un conductor cilíndrico hueco muy largo mostrado en la figura circula una corriente I con una densidad uniforme.

2.5

Región $r < r_a$
$\vec{H} = \frac{I r_a}{2\pi r_a^2}$ =0

Región $r \in (r_a, r_b)$
$\vec{H} = \frac{I}{2\pi (r_b - r_a)^2}$

Región $r > r_b$
$\vec{H} =$



C. (5 puntos) Considere dos medios separados por el plano $z = 0$, donde no circula una corriente superficial entre ambos y en el primer medio, situado en $z > 0$, existe un campo magnético $\vec{H}_1 = 4\hat{x} + 2\hat{z}\ \frac{A}{m}$. Determine el campo magnético en el segundo medio, situado en $z < 0$, si la permeabilidad magnética en cada medio es $\mu_1 = 4\mu_0$ y $\mu_2 = 2\mu_0$.

2.5

$\vec{H}_2 = 8\hat{x} + 4\hat{z}$

UACM Universidad Autónoma de la Ciudad de México *Nada humano me es ajeno*	Teoría Electromagnética – Semestre 2014-II	Tercer Examen Parcial
	Apellido, Nombre:	Matrícula
		Calificación: 10 /35

Tercer evaluación

Tiempo para resolver el examen: 1.5 Hrs. 35 puntos totales.

Instrucciones: Todas las preguntas deben ser respondidas en forma ordenada, indicando en el recuadro de esta página la(s) respuesta(s) solicitada(s). La calificación final consiste en la suma de los puntos obtenidos en cada sección.

1. (10 puntos) En una región del espacio sin pérdidas, $\mu = 1 \cdot 10^{-5} \frac{H}{m}$ y $\varepsilon = 1.2 \cdot 10^{-10} \frac{F}{m}$. Si el campo magnético presente es $\vec{\mathbf{H}} = 2\cos(10^{10}t - kx)\hat{\mathbf{z}} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$, emplee las ecuaciones de Maxwell para determinar la corriente de desplazamiento asociada.

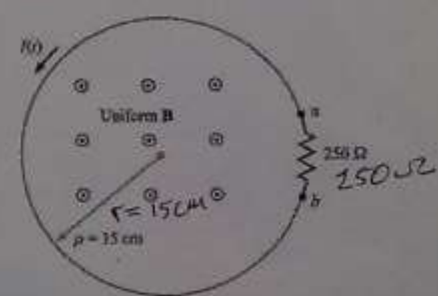
9

$577(10^{10}) \operatorname{sen}(10^{10}t - kx)$, 4 ¿Valor de k?

2. (10 puntos) La espira circular de la figura se encuentra dentro de un campo magnético de magnitud $B = 0.2\cos(120\pi t)$ T. Determine el voltaje entre los puntos a y b.

MAL

$$\boxed{V_{ab} = (0.6)\times 10^{-2}\cos(120\pi t)\sin(120\pi t)}$$



3. (10 puntos) Dada una onda plana uniforme de 20 MHz con un campo magnético $\vec{\mathbb{H}} = (6\hat{\mathbf{x}} - j2\hat{\mathbf{y}})e^{-jz}\left[\frac{A}{m}\right]$ que viaja en un medio sin pérdidas caracterizado por $\varepsilon_r = 5$ y μ_r desconocida. Determine:

x

3.1. (1 punto) La dirección y sentido de propagación:	z
3.2. (1 punto) La constante de propagación:	$\beta =$
3.3. (1 punto) La velocidad de propagación:	
3.4. (1 puntos) La permeabilidad magnética relativa del medio:	
3.5. (2 puntos) La impedancia del medio:	
3.6. (2 puntos) La ecuación temporal que expresa al campo eléctrico:	
3.7. (2 puntos) El vector de potencia promedio	

4. (5 puntos) Se sabe que en un medio con pérdidas una onda EM sufre la atenuación (α) de la componente de campo eléctrico a un 5% de su valor original en z=0 cuando penetra una distancia de z=15 cm. Determine:

4.1. La atenuación que sufre la onda en decibeles.	
4.2. La profundidad de penetración δ en metros.	0.15 m.

UACM Universidad Autónoma de la Ciudad de México *Nada humano me es ajeno*	Teoría Electromagnética – Semestre 2014-II	Tercer Examen Parcial
	Apellido, Nombre:	Matrícula
		Calificación: 10 /35

Tercer evaluación

Tiempo para resolver el examen: 1.5 Hrs. 35 puntos totales.

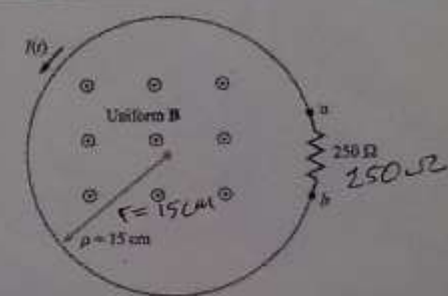
Instrucciones: Todas las preguntas deben ser respondidas en forma ordenada, indicando en el recuadro de esta página la(s) respuesta(s) solicitada(s). La calificación final consiste en la suma de los puntos obtenidos en cada sección.

1. (10 puntos) En una región del espacio sin pérdidas, $\mu = 1 \cdot 10^{-5}\frac{H}{m}$ y $\varepsilon = 1.2 \cdot 10^{-10}\frac{F}{m}$. Si el campo magnético presente es $\vec{\mathbf{H}} = 2\cos(10^{10}t - kx)\hat{\mathbf{z}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$, emplee las ecuaciones de Maxwell para determinar la corriente de desplazamiento asociada.

9

$$\boxed{577\,(10^{10})\,\mathrm{sen}(10^{10}t - kx), \quad \text{¿Valor de } k\text{?}}$$

2. (10 puntos) La espira circular de la figura se encuentra dentro de un campo magnético de magnitud $B = 0.2\cos(120\pi t)$ T. Determine el voltaje entre los puntos a y b.



$$\boxed{V_{ab} = 10.6\times10^{-2}\cos(120\pi t)\sin(120\pi t)}$$

3. (10 puntos) Dada una onda plana uniforme de 20 MHz con un campo magnético $\vec{\mathbb{H}} = (6\hat{x} - j2\hat{y})e^{-jz}[\frac{A}{m}]$ que viaja en un medio sin pérdidas caracterizado por $\varepsilon_r = 5$ y μ_r desconocida. Determine:

x

3.1. (1 punto) La dirección y sentido de propagación:	z
3.2. (1 punto) La constante de propagación:	$\beta =$
3.3. (1 punto) La velocidad de propagación:	
3.4. (1 puntos) La permeabilidad magnética relativa del medio:	
3.5. (2 puntos) La impedancia del medio:	
3.6. (2 puntos) La ecuación temporal que expresa al campo eléctrico:	
3.7. (2 puntos) El vector de potencia promedio	

4. (5 puntos) Se sabe que en un medio con pérdidas una onda EM sufre la atenuación α de la componente de campo eléctrico a un 5% de su valor original en z=0 cuando penetra una distancia de z=15 cm. Determine:

4.1. La atenuación que sufre la onda en decibeles.	
4.2. La profundidad de penetración δ en metros.	0.15 m.

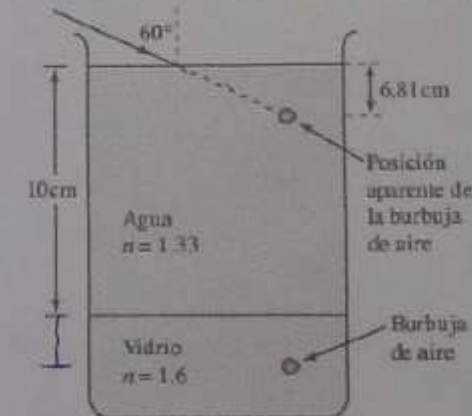
UACM Universidad Autónoma de la Ciudad de México — Nada humano me es ajeno	Teoría Electromagnética – Semestre 2014-II	Cuarto Examen Parcial
	Apellido, Nombre:	Matrícula
	[illegible]	Calificación: 25 /35

Cuarta evaluación

Tiempo para resolver el examen: 1 hr, 15 minutos.

Instrucciones: Todas las preguntas deben ser respondidas en forma ordenada, indicando mediante un recuadro la(s) respuesta(s) solicitada(s). La calificación final consiste en la suma de los puntos obtenidos en cada sección.

Resuelva los problemas presentados.



1. (10 puntos) En la figura se muestra un recipiente cuyo fondo de vidrio presenta una pequeña burbuja de aire. Si el recipiente contiene agua y, visto desde arriba (aire) a un ángulo de 60° la burbuja de aire parece estar a una profundidad de 6.81 cm, determina la profundidad verdadera de la burbuja. *Sugerencia: Emplee geometría para determinar la profundidad real de la burbuja.*

   3

2. (15 puntos) Una onda plana que viaja en un medio 1 con $\varepsilon_{r1} = 9$ incide **normalmente** en un medio 2 con $\varepsilon_{r2} = 4$. Ambos medios son no magnéticos y no conductores. Si el campo magnético incidente en el medio 1 es $\mathbf{H}^i = 2\cos(2\pi \cdot 10^9 t - ky)\hat{\mathbf{z}}$, determine:

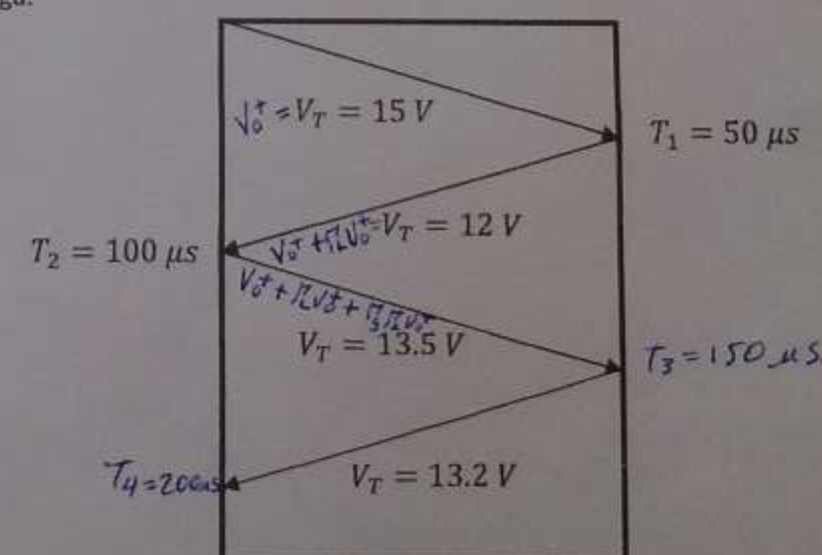
   15

   2.1. La expresión **en el dominio del tiempo** para el campo eléctrico transmitido.
   2.2. Las velocidades de propagación en cada medio, así como la longitud de onda
   2.3. El ángulo de Brewster
   2.4. El ángulo crítico entre ambos medios

3. (10 puntos) Se obtuvo un diagrama de rebote para el voltaje total en una línea indicado en figura, donde la línea de transmisión se sabe posee parámetros $\varepsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$ y se conecta con un generador de voltaje escalón de 20 V con impedancia de 20 Ω. Con base en esta información, determine:

   7

   3.1. La impedancia de la línea y de la carga.
   3.2. La longitud de la línea
   3.3. El diagrama de rebote de corriente.



UACM Universidad Autónoma de la Ciudad de México — Nada humano me es ajeno

Teoría Electromagnética – Semestre 2014-II		Cuarto Examen Parcial
Apellido, Nombre:		Matricula
		Calificación: 25 /35

Cuarta evaluación

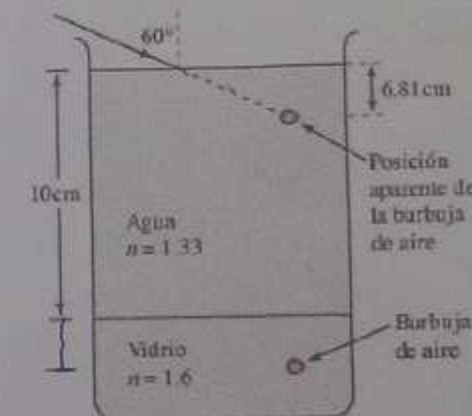
Tiempo para resolver el examen: 1 hr, 15 minutos.

Instrucciones: Todas las preguntas deben ser respondidas en forma ordenada, indicando mediante un recuadro la(s) respuesta(s) solicitada(s). La calificación final consiste en la suma de los puntos obtenidos en cada sección.

Resuelva los problemas presentados.

1. (10 puntos) En la figura se muestra un recipiente cuyo fondo de vidrio presenta una pequeña burbuja de aire. Si el recipiente contiene agua y, visto desde arriba (aire) a un ángulo de 60° la burbuja de aire parece estar a una profundidad de 6.81 cm, determina la profundidad verdadera de la burbuja. *Sugerencia: Emplee geometría para determinar la profundidad real de la burbuja.*

3



2. (15 puntos) Una onda plana que viaja en un medio 1 con $\varepsilon_{r1} = 9$ incide **normalmente** en un medio 2 con $\varepsilon_{r2} = 4$. Ambos medios son no magnéticos y no conductores. Si el campo magnético incidente en el medio 1 es $\mathbf{H}^i = 2\cos(2\pi \cdot 10^9 t - ky)\hat{\mathbf{z}}$, determine:

15

   2.1. La expresión **en el dominio del tiempo** para el campo eléctrico transmitido.
   2.2. Las velocidades de propagación en cada medio, así como la longitud de onda
   2.3. El ángulo de Brewster
   2.4. El ángulo crítico entre ambos medios

3. (10 puntos) Se obtuvo un diagrama de rebote para el voltaje total en una línea indicado en figura, donde la línea de transmisión se sabe posee parámetros $\varepsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$ y se conecta con un generador de voltaje escalón de 20 V con impedancia de 20 Ω. Con base en esta información, determine:

7

   3.1. La impedancia de la línea y de la carga.
   3.2. La longitud de la línea
   3.3. El diagrama de rebote de corriente.